Pola trójkątów podobnych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W przypadku trójkątów podobnych ich odpowiednie boki są tak samo proporcjonalne jak długości ich obwodów. W tej lekcji wyprowadzimy oraz wykorzystamy do rozwiązywania zadań zależność, która występuje pomiędzy polami trójkątów podobnych. Bazując na wiedzy teoretycznej i omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

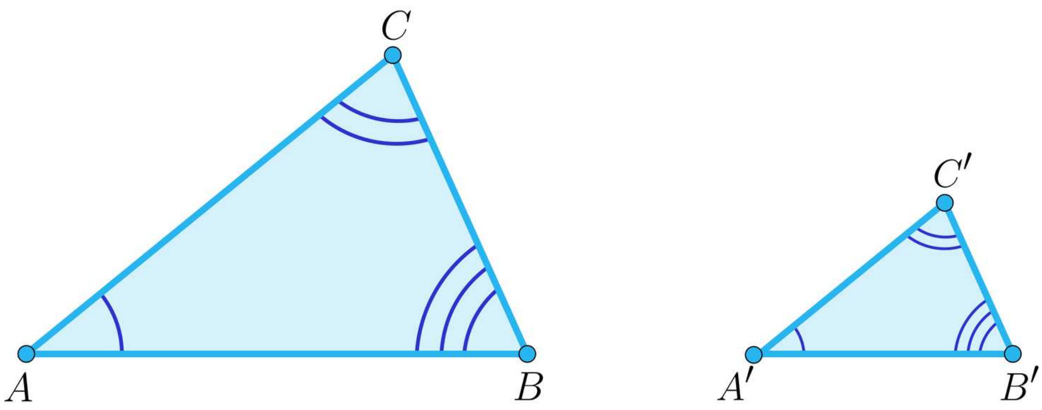
Twoje cele

- Określisz wzór na skalę podobieństwa trójkątów podobnych, gdy dane są ich pola.
- Obliczysz zależności między bokami, obwodami i polami trójkątów podobnych.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

W materiale omówimy zależność, jaka występuje pomiędzy polami trójkątów podobnych.

Jeżeli trójkąty mają ustalone nazwy wierzchołków, to podobieństwo tych trójkątów zapisujemy symbolicznie $\triangle ABC$~ $\triangle$ A’B’C’.

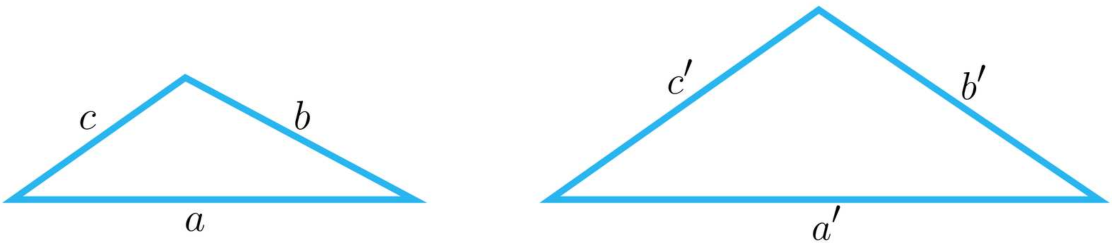


Trójkąty są podobne, gdy zachodzi jeden z poniższych warunków:

- długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta,
- trójkąty mają takie same kąty,
- długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między tymi bokami są równej miary.

Wymienione warunki nazywamy cechami podobieństwa trójkątów.

Na rysunku przedstawiono trójkąty podobne z zaznaczonymi długościami boków oraz obwodami.



$L = a + b + c$ $\qquad$ $L' = a' + b' + c'$

Jeżeli przez k oznaczymy skalę podobieństwa tych trójkątów, to:

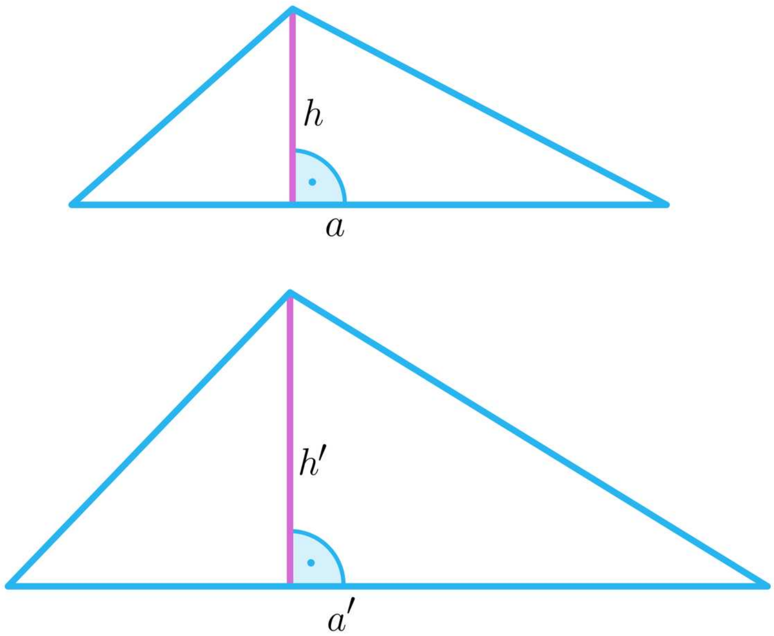
- $k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$,
- $k = \frac{L'}{L}$.

Twierdzenie: pola trójkątów podobnych

Stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych trójkątów.

Dowód

Narysujmy dwa trójkąty, które są podobne w skali k, gdzie $k > 0$. Wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunkach:



Jeżeli trójkąty są podobne w skali k, to ich odpowiednie boki oraz wysokości są proporcjonalne.

Zatem:

$k = \frac{a'}{a}$, więc $a' = k \cdot a$,

$k = \frac{h'}{h}$, więc $h' = k \cdot h$.

Oznaczmy pole mniejszego trójkąta jako P, a większego jako P'.

Wówczas, stosując oznaczenia z rysunków otrzymujemy:

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$,

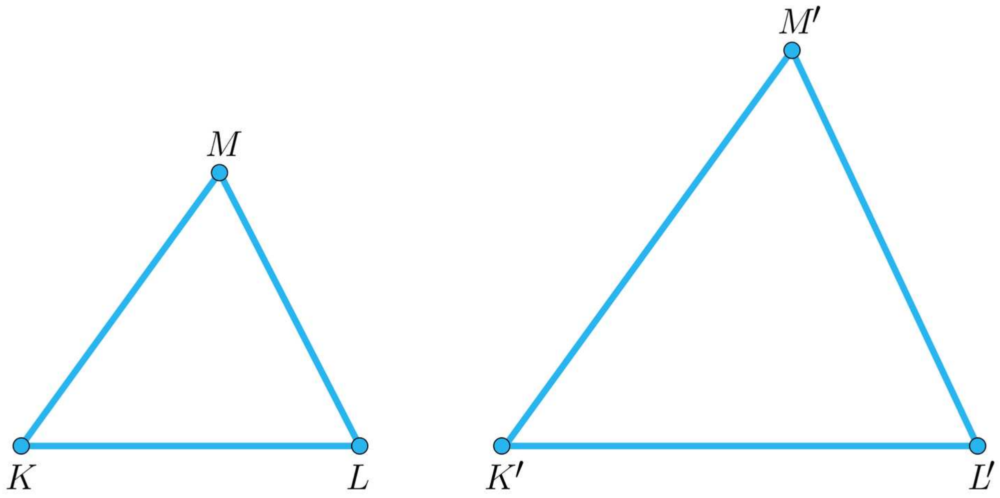
$P' = \frac{1}{2} \cdot a' \cdot h'$.

Zatem:

$\frac{P'}{P} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a' \cdot h'}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot a \cdot k \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h} = k^2.$

Przykład 1

Stosunek pól trójkątów podobnych KLM oraz $K'L'M'$ wynosi $\frac{9}{16}$. Wiedząc, że długość podstawy KL trójkąta KLM jest o 4 mniejsza od długości podstawy $K'L'$, obliczymy długości tych podstaw.



Rozwiązanie:

Jeżeli przez k oznaczymy skalę podobieństwa tych trójkątów oraz zapiszemy $|K'L'| = |KL| + 4$, to:

$k^2 = \frac{9}{16}$, zatem $k = \frac{3}{4}$.

Zauważmy, że $k = \frac{|KL|}{|K'L'|}$, zatem $\frac{3}{4} = \frac{|KL|}{|KL|+4}$.

Z równania otrzymujemy, że $|KL| = 12$, zatem $|K'L'| = 16$.

Przykład 2

Obwód trójkąta ABC wynosi 72, a jego pole 144. Obwód trójkąta $A'B'C'$ do niego podobnego wynosi 18. Obliczymy pole trójkąta $A'B'C'$.

Rozwiązanie:

Ponieważ trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są podobne, zatem:

$k = \frac{L_{ABC}}{L_{A'B'C'}} = \frac{72}{18} = 4.$

Korzystając z faktu, że stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa otrzymujemy, że:

$k^2 = \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}$, więc $4^2 = \frac{144}{P_{A'B'C'}}$.

Zatem $P_{A'B'C'} = 9$.

Przykład 3

Suma pól dwóch trójkątów podobnych jest równa 270 , a skala podobieństwa tych trójkątów wynosi $k = 3$. Wyznaczymy pole każdego z tych trójkątów.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia:

P_1 – pole pierwszego trójkąta,

P_2 – pole drugiego trójkąta.

Jeżeli skala podobieństwa tych trójkątów wynosi $k = 3$, to do wyznaczenia pola każdego z tych trójkątów rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = 270 \\ \frac{P_1}{P_2} = 3^2 \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika, że $P_1 = 9 \cdot P_2$, zatem:

$9 \cdot P_2 + P_2 = 270$, czyli $P_2 = 27$.

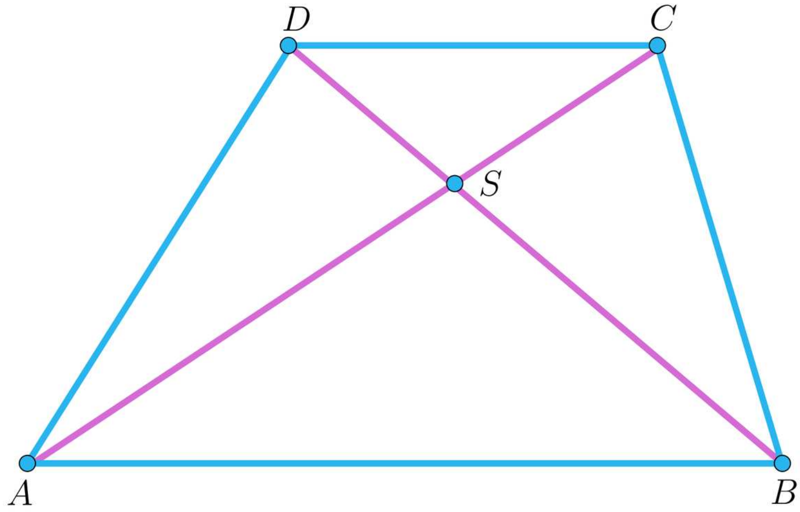
$P_1 = 9 \cdot P_2 = 9 \cdot 27 = 243$.

Pola tych trójkątów wynoszą 243 i 27.

Zależność pomiędzy polami trójkątów podobnych możemy wykorzystać do obliczania pól innych figur.

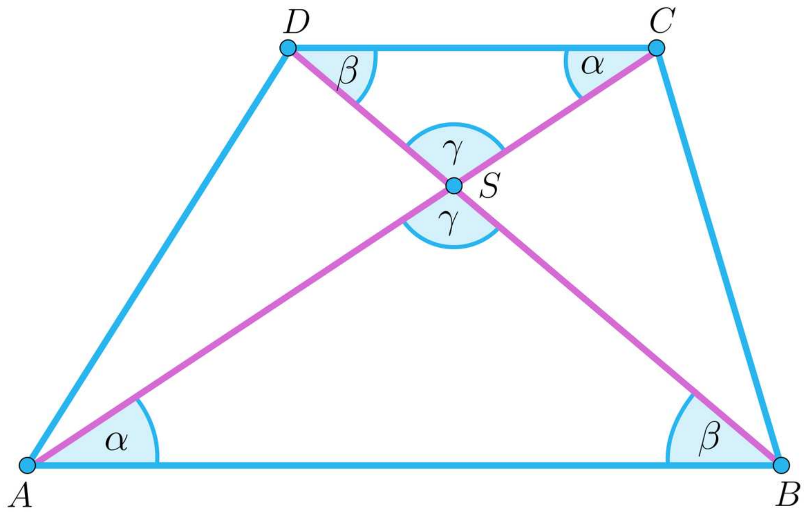
Przykład 4

Wyznaczymy pole trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku, jeżeli wiadomo, że pola trójkątów ABS oraz SCD wynoszą odpowiednio 28 i 7.



Rozwiązanie:

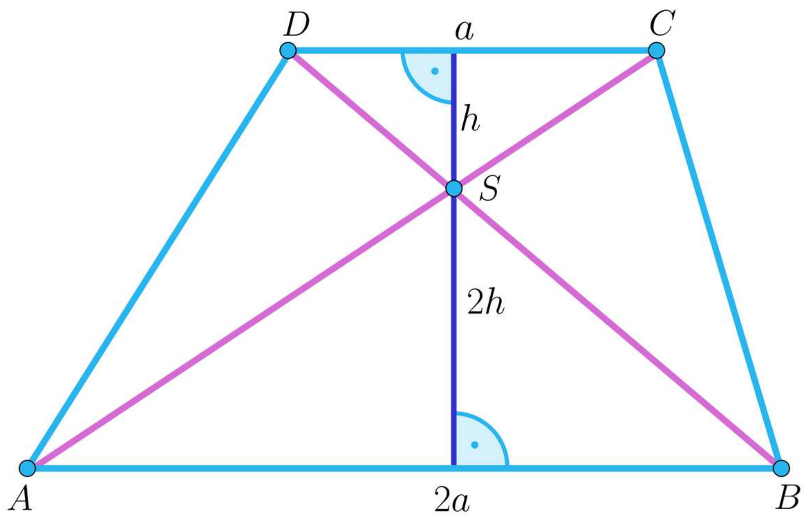
Zauważmy, że trójkąty ABS oraz SCD są podobne, ponieważ mają takie same kąty.



Zatem $k^2 = \frac{P_{ABS}}{P_{SCD}} = \frac{28}{7} = 4$, więc skala podobieństwa tych trójkątów wynosi 2.

Podstawy i wysokości trójkątów ABS oraz SCD pozostają zatem w stosunku $2 : 1$.

Wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Zgodnie z oznaczeniami mamy:

$P_{SCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, czyli $7 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, więc $a \cdot h = 14$.

$P_{ABCD} = \frac{(2a+a) \cdot 3h}{2} = \frac{9 \cdot a \cdot h}{2} = \frac{9 \cdot 14}{2} = 63$.

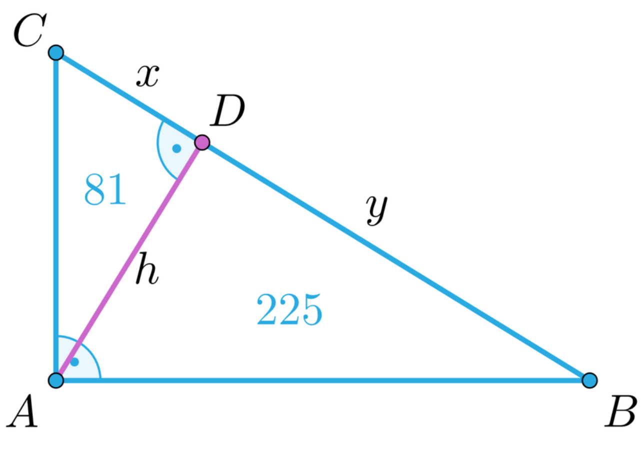
Pole trapezu $ABCD$ wynosi 63.

Przykład 5

Obliczymy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, jeśli wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła ten trójkąt na dwa trójkąty o polach 81 i 225.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt prostokątny i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Trójkąty ABD oraz ADC są podobne (ich odpowiednie kąty są równe), zatem zachodzi zależność:

$\frac{h}{x} = \frac{y}{h}$, czyli $h^2 = xy$

Pola trójkątów ABD oraz ADC obliczamy ze wzorów:

$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot h$

$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h$

Zatem $\frac{1}{2} \cdot x \cdot h = 81$ oraz $\frac{1}{2} \cdot y \cdot h = 225$.

Zauważmy, że $\frac{\frac{1}{2} \cdot x \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot y \cdot h} = \frac{81}{225}$.

Wobec tego $\frac{x}{y} = \frac{9}{25}$, czyli $y = \frac{25}{9}x$.

Po przekształceniu mamy: $x \cdot h = 162$, czyli $h = \frac{162}{x}$.

Po podstawieniu zależności $h = \frac{162}{x}$ oraz $y = \frac{25}{9}x$ do równania $h^2 = xy$, rozwiązujemy równanie z niewiadomą x:

$\left(\frac{162}{x}\right)^2 = x \cdot \left(\frac{25}{9}x\right)$

$\frac{26244}{x^2} = \frac{25}{9}x^2$

$x^4 = \frac{9 \cdot 26244}{25}$

Ponieważ $x > 0$, zatem $x = \frac{\sqrt{3} \cdot 9\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{30}}{5}$.

Długość przeciwprostokątnej BC wynosi:

$|BC| = x + \frac{25}{9}x = \frac{34}{9}x$

Wobec tego

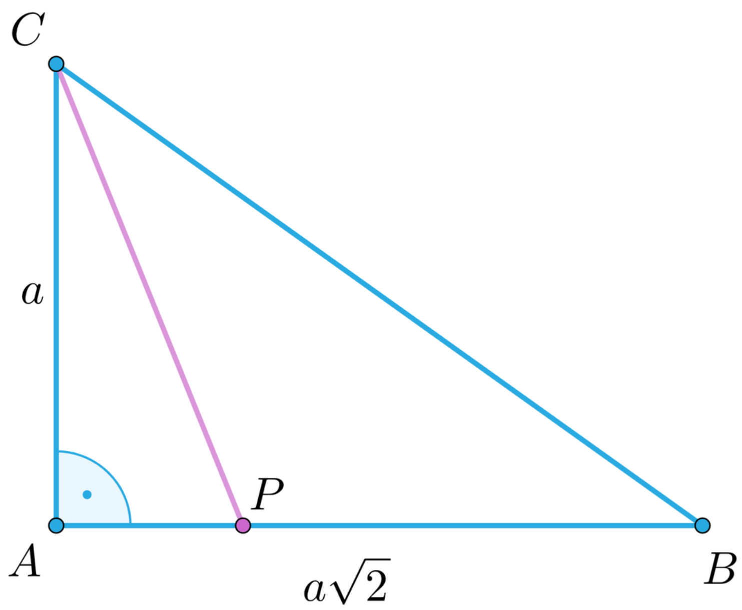
$|BC| = \frac{34}{9} \cdot \frac{9\sqrt{30}}{5} = \frac{34\sqrt{30}}{5}$

Przykład 6

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne AB i AC mają odpowiednio długości $a\sqrt{2}$ i a. Na przyprostokątnej AB wybrano taki punkt P, że $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle ACB|$. Obliczymy pola trójkątów APC i PBC.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt prostokątny i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia.



Zauważmy, że trójkąty APC i ABC są podobne na podstawie cechy podobieństwa kkk.

Pole trójkąta ABC wynosi:

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Jeżeli k jest skalą podobieństwa trójkąta APC do trójkąta ABC, to:

$k = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ponieważ stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa, zatem:

$P_{APC} = k^2 \cdot P_{ABC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

oraz

$P_{PBC} = P_{ABC} - P_{APC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} - \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

Słownik

trójkąty podobne

trójkąty, w których odpowiednie boki są parami proporcjonalne, a kąty między tymi bokami są równe

cechy podobieństwa trójkątów

warunki konieczne i wystarczające, aby dwa trójkąty były podobne

Aplet

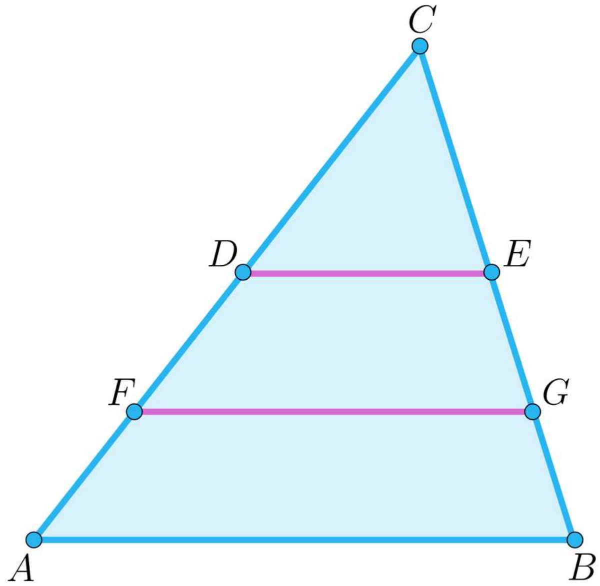
Polecenie 1

Zapoznaj się ze apletem, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D17Z1UCaL

Polecenie 2

Odcinki DE, FG, AB są równoległe, a pola trójkątów ABC, FGC i DEC pozostają w stosunku $16 : 9 : 4$.



Wyznacz skalę podobieństwa trójkątów:

a. ABC i DEC,

b. DEC i FGC.

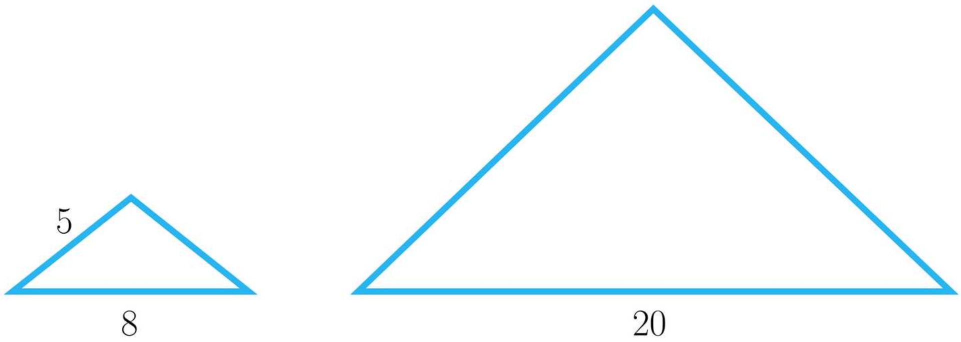
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono dwa trójkąty równoramienne, które są podobne.



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

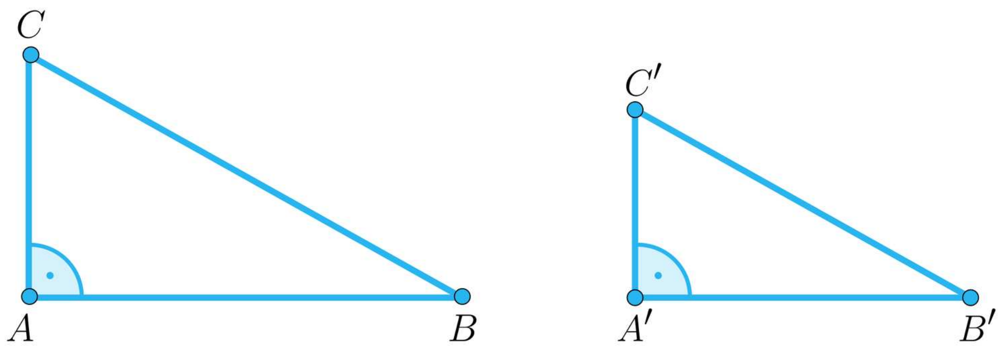
Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

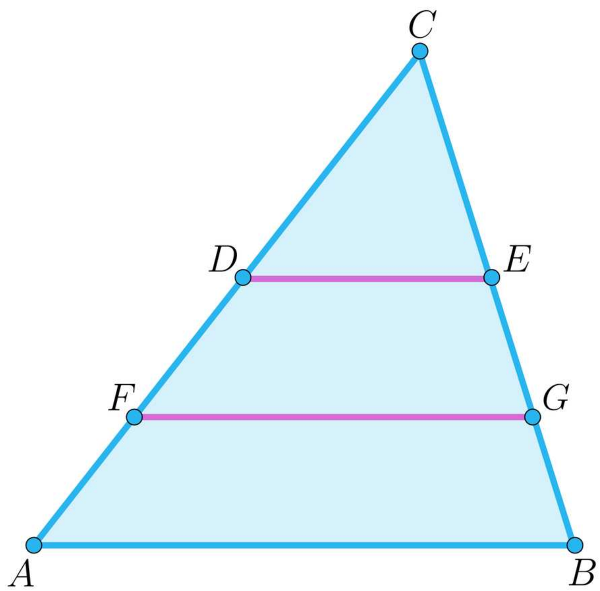
Trójkąty prostokątne ABC oraz $A'B'C'$ przedstawione na poniższym rysunku są podobne. Przyprostokątne AB i AC trójkąta prostokątnego ABC mają długości odpowiednio 8 i 10, a przeciwprostokątna $B'C'$ trójkąta $A'B'C'$ ma długość $\sqrt{82}$.

Wyznacz pole trójkąta $A'B'C'$.



Ćwiczenie 8

Odcinki DE, FG, AB są równoległe, a boki trójkątów ABC, FGC i DEC pozostają w stosunku $4 : 2 : 1$. Wyznacz pole trójkąta ABC i FGC, jeżeli wiadomo, że pole trójkąta DEC wynosi 2.



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pola trójkątów podobnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:
9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- Określia wzór na skalę podobieństwa trójkątów podobnych, gdy dane są ich pola.
- Oblicza zależności między bokami, obwodami i polami trójkątów podobnych.
- Wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- tworzenie przez analogię;
- giełda pomysłów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat lekcji. Uczniowie przypominają wiadomości z poprzednich lekcji. Uczniowie wspólnie z nauczycielem ustalają cel oraz kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przygotowują w parach pytania związane z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4-osobowych zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału w sekcji „Aplet”. Po zaznajomieniu się z materiałem, uczniowie omawiają rozwiązanie polecenia.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania zadania.
5. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Pola trójkątów podobnych”).

Materiały pomocnicze:

- Pola figur podobnych.

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Aplet” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach.
- „Aplet” można wykorzystać podczas lekcji dotyczącej obliczania pól trójkątów.