Wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej

Wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej

Źródło: Thomas Suisse, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W wyznaczaniu wzajemnego położenia prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej wykorzystamy m.in. pojęcie siecznej, czyli prostej przecinającej daną krzywą w co najmniej dwóch punktach. Sprawdzimy, czy jest możliwe, aby prosta i okrąg przecinały się w więcej niż dwóch punktach. Użyjemy w tym celu równań prostych oraz okręgów w różnych postaciach. Bazując na części teoretycznej i omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Dowiesz się, jak określić wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej.
- Poznasz i wykorzystasz wzory na równanie okręgu i prostej w różnych postaciach.
- Nauczysz się wyznaczać wartości parametrów, dla których prosta i okrąg mają określoną liczbę punktów wspólnych.
- Obliczysz współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu, korzystając z układu równań.

Przeczytaj

Okrąg na płaszczyźnie kartezjańskiej opisujemy za pomocą równania. Wyróżniamy dwie postacie tego równania:

- równanie okręgu w postaci ogólnej $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, gdzie promień okręgu obliczamy ze wzoru $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, zaś punkt $S = (a, b)$ jest środkiem okręgu,
- równanie okręgu w postaci kanonicznej $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie r nazywamy promieniem okręgu, zaś punkt $S = (a, b)$ środkiem okręgu.

Prostą na płaszczyźnie opisujemy za pomocą równania. Wyróżniamy dwie postacie tego równania:

- postać ogólną prostej $Ax + By + C = 0$, gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz A i B nie są jednocześnie równe 0,
- postać kierunkową prostej $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Do badania wzajemnego położenia prostej i okręgu wykorzystamy wzór na odległość d punktu $S = (a, b)$ od prostej k danej wzorem $Ax + By + C = 0$.

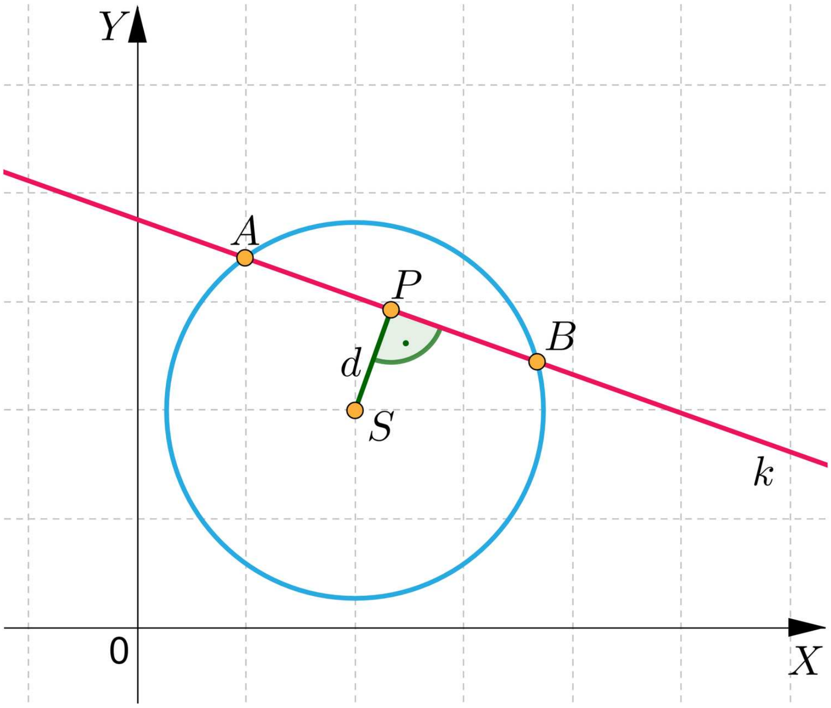
Wzór ten przedstawia się następująco:

$d(S, k) = \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Liczba punktów wspólnych prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej zależy od odległości prostej od środka okręgu.

Prosta i okrąg na płaszczyźnie kartezjańskiej:

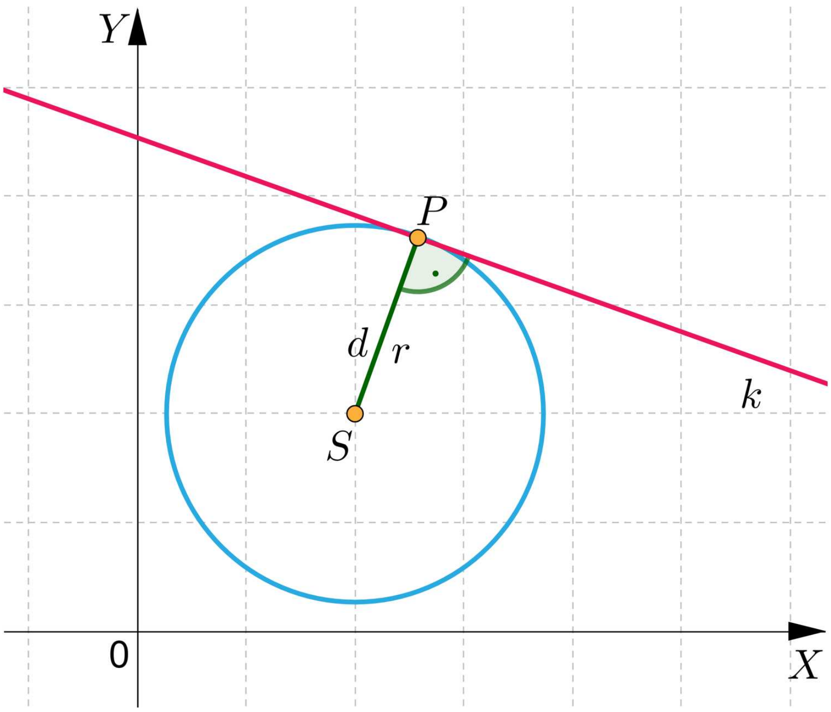
- przecinają się w dwóch punktach A i B, gdy zachodzi warunek: $d(S, k) < r$,



Zauważmy, że $d(S,k)=|SP|$.

Prostą k nazywamy sieczną.

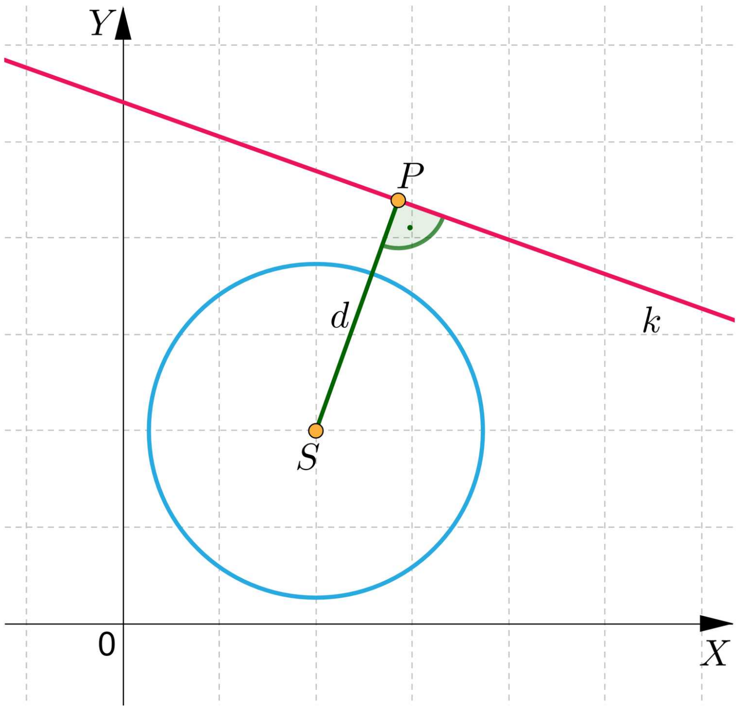
- przecinają się w jednym punkcie P, gdy zachodzi warunek: $d(S,k)=r$,



Zauważmy, że $r=|SP|$.

Mówimy, że okrąg i prosta są styczne, a prosta k jest styczną do okręgu.

- nie przecinają się, gdy zachodzi warunek: $d(S,k)>r$.



Ważne!

Okrąg i prosta przecinają się co najwyżej w dwóch punktach.

Przykład 1

Zbadamy wzajemne położenie prostej o równaniu $2x - 3y + 5 = 0$ i okręgu o równaniu $(x-1)^2 + y^2 = 9$.

Rozwiązanie:

Z równania okręgu możemy odczytać, że $S = (1, 0)$ oraz $r = 3$.

Obliczymy odległość punktu S od podanej prostej.

Zatem:

$d = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$.

Zauważmy, że $d = \frac{7\sqrt{13}}{13} < 3 = r$, zatem prosta i okrąg przecinają się w dwóch punktach.

Jeżeli równanie prostej zapisane jest w postaci kierunkowej, to przekształcamy je najpierw do postaci ogólnej, a następnie wyznaczamy odległość środka okręgu od tej prostej.

Przykład 2

Zbadamy wzajemne położenie prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 3$ i okręgu o równaniu $x^2 + (y-2)^2 = 16$.

Rozwiązanie:

Z równania okręgu możemy odczytać, że $S = (0, 2)$ oraz $r = 4$.

Zapiszemy równanie prostej $y = \frac{1}{2}x - 3$ w postaci ogólnej.

Po przekształceniu mamy: $x - 2y - 6 = 0$.

Obliczymy odległość punktu S od podanej prostej.

Zatem:

$d = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

Zauważmy, że $d = 2\sqrt{5} > 4 = r$, zatem prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.

Czasami równanie okręgu jest zapisane w postaci ogólnej. Nie odczytamy wówczas bezpośrednio współrzędnych środka i długości promienia, ale obliczamy je ze wzorów.

Przykład 3

Określimy wzajemne położenie prostej o równaniu $2x - y - 1 = 0$ i okręgu o równaniu $x^2 + 4x + y^2 = 0$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na równanie okręgu w postaci ogólnej $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, obliczamy wartości współczynników a,b oraz c.

Zatem: $-2a = 4$, $-2b = 0$ oraz $c = 0$.

Czyli $a = -2, b = 0,\ c = 0$.

Środek okręgu $S = (-2, 0)$.

Obliczamy długość promienia okręgu $r = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 - 0} = 2$.

Wyznaczamy odległość środka S okręgu od podanej prostej.

$d = \frac{|2 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$.

Ponieważ $d = \sqrt{5} > 2 = r$, zatem prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.

W łatwy sposób można określić wzajemne położenie okręgu i prostej, która jest równoległa lub prostopadła do osi układu współrzędnych.

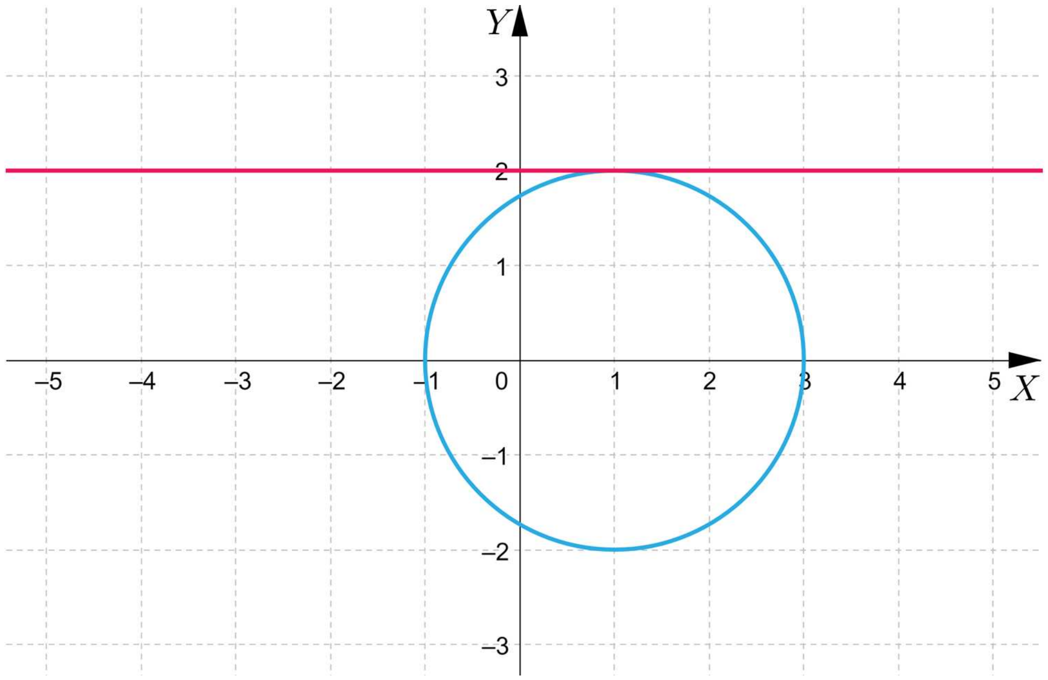
Przykład 4

Zbadamy wzajemne położenie prostej o równaniu $y = m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$ i okręgu o równaniu $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Rozwiązanie:

Z równania okręgu możemy odczytać, że $S = (1, 0)$ oraz $r = 2$.

Przedstawmy na rysunku wzajemne położenie tego okręgu z prostą o równaniu $y = 2$.



Możemy zauważyć, że dla różnych wartości parametru m, gdzie $m \in \mathbb{R}$, prosta i okrąg mają:

- 0 punktów wspólnych, gdy $m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$,
- 1 punkt wspólny, gdy $m \in \{-2, 2\}$,
- 2 punkty wspólne, gdy $m \in (-2, 2)$.

W celu wyznaczenia punktów wspólnych prostej i okręgu możemy rozwiązać układ równań, w którym jedno równanie jest liniowe, a drugie kwadratowe. Na podstawie rozwiązania możemy stwierdzić, jakie jest ich wzajemne położenie.

Przykład 5

Wyznaczymy punkty wspólne prostej o równaniu $y = -x + 4$ i okręgu o równaniu $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia punktów wspólnych rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Jeżeli zastosujemy metodę podstawiania, to otrzymujemy równanie z niewiadomą x:

$(x-1)^2 + (-x+4)^2 = 4.$

Równanie przekształcamy do postaci $2x^2 - 10x + 13 = 0.$

Ponieważ wyróżnik tego równania jest mniejszy od 0, więc równanie nie ma rozwiązań, zatem układ równań nie ma rozwiązania.

Prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.

Słownik

równanie okręgu

postać ogólna: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, promień okręgu $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, $S = (a, b)$ - środek okręgu

postać kanoniczna: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, r - promień okręgu, $S = (a, b)$ - środek okręgu

równanie prostej

postać ogólna: $Ax + By + C = 0$, gdzie A, B, C oraz A i B nie są jednocześnie równe 0

postać kierunkowa: $y = ax + b$, gdzie a, $b \in \mathbb{R}$

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym apletem dotyczącym określania wzajemnego położenia prostej i okręgu, gdy prosta i okrąg są zapisane za pomocą równań.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DafCcBCjj

Polecenie 2

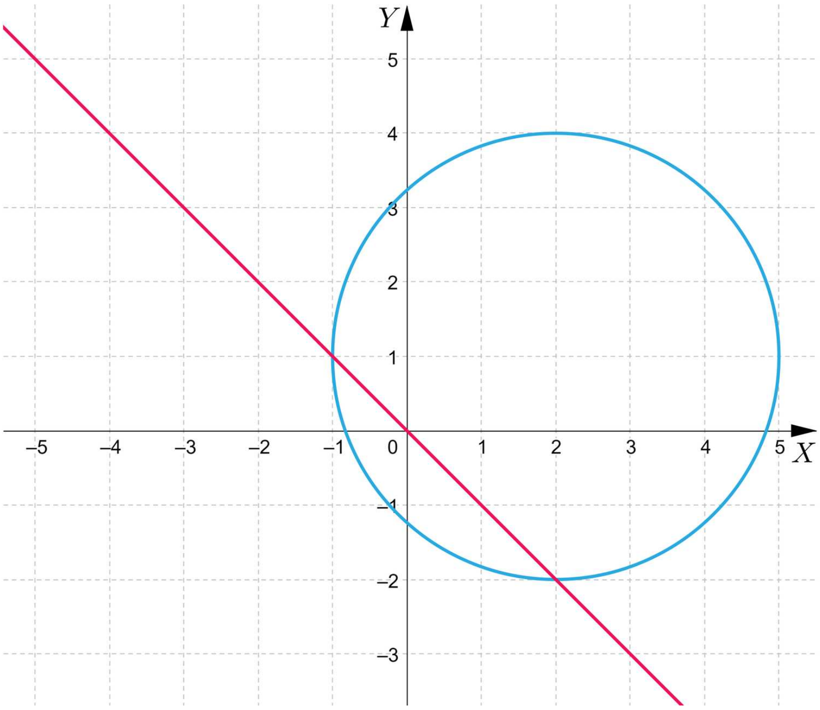
Zbadaj wzajemne położenie prostej o równaniu $\sqrt{2}x - 2y + \sqrt{2} = 0$ i okręgu o równaniu $(x-2)^2 + y^2 = 3$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Na poniższym rysunku przedstawiono okrąg i prostą.



Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Określ liczbę punktów wspólnych prostej o równaniu $y = x + m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$, z okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = 4$, w zależności od parametru m.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej,
- wykorzystuje wzory na równanie okręgu i prostej w różnych postaciach,
- wyznacza wartości parametrów, dla których prosta i okrąg mają określoną liczbę punktów wspólnych,
- oblicza współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu, korzystając z układu równań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- z użyciem e-podręcznika;

- metoda krokodyla;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej", wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie dzielą się na małe grupy i wymieniają się informacjami pozyskanymi w domu. Metodą graffiti matematycznego sporządzają schematy zawierające różne możliwości wzajemnego położenia prostej i okręgu. Każda grupa układa 2 zadania oparte na uzyskanych w domu wiadomościach. Grupy wymieniają się zadaniami, wspólnie sprawdzają poprawność ich wykonania.
2. Uczniowie zapoznają się z materiałem z e-podręcznika.
3. Uczniowie wykonują polecenia z sekcji „Aplet". W razie trudności proszą o pomoc nauczyciela.
4. Uczniowie biorą udział w lidze zadaniowej - wykonują w grupach na czas ćwiczenia 1-5 z sekcji „Sprawdź się", a następnie omawiają zadania wspólnie z całą klasą.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8 metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki" i „ożywia się" tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązania ćwiczeń w temacie: „Wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej”).

Materiały pomocnicze:

- Wzajemne położenie prostej i okręgu.

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Aplet” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania i problemy w omawianym temacie.