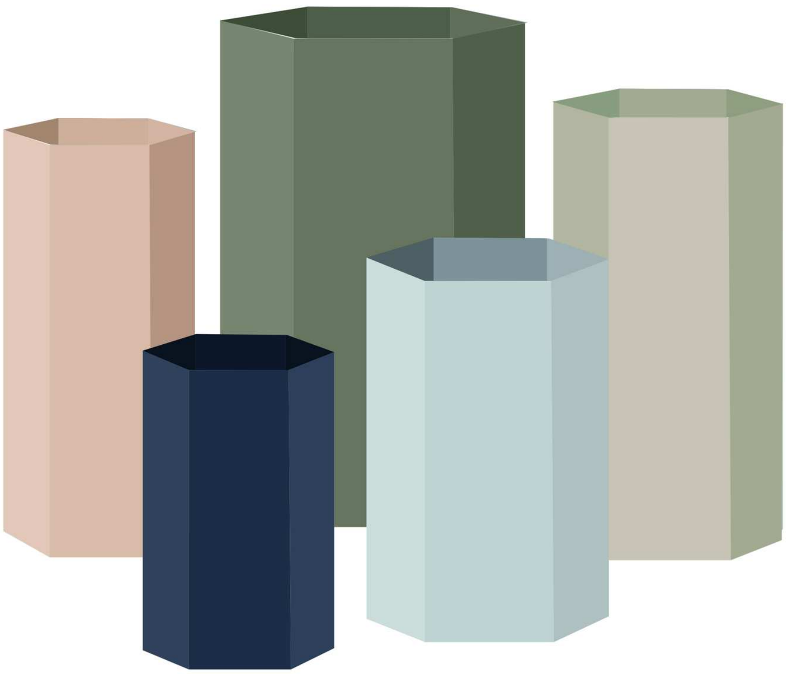
Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wiele naczyń ozdobnych ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, są wśród nich szklanki, wazony. Napełniamy je wodą lub innym napojem, przelewamy z jednego naczynia do drugiego. W ten sposób wykorzystujemy objętość naczynia.



W omawianym temacie lekcji zajmiemy się objętością graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego i jej związkami z długością odcinków i miarą kątów w graniastosłupie.

Twoje cele

- Obliczysz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mając daną długość krawędzi podstawy i wysokości graniastosłupa.
- Obliczysz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mając dane długości różnych odcinków i miary kątów w graniastosłupie.
- Obliczysz długości odcinków i miary kątów w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym mając jego objętość.

Przeczytaj

Wiesz już, że objętość każdego graniastosłupa można policzyć ze wzoru $V = P_p \cdot H$, gdzie P_p jest polem podstawy, a H wysokością graniastosłupa.

Korzystając ze wzoru na pole sześciokąta foremnego otrzymujemy wzór na objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego postaci:

$$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\mathrm{H},$$

gdzie a jest długością krawędzi podstawy.

Przykład 1

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wszystkie krawędzie są tej samej długości. Krótsza przekątna podstawy ma długość 12. Obliczymy objętość tego graniastosłupa.

W sześciokącie foremnym krótsza przekątna ma długość $a\sqrt{3}$. A zatem $a\sqrt{3} = 12$. I stąd $a = 4\sqrt{3}$.

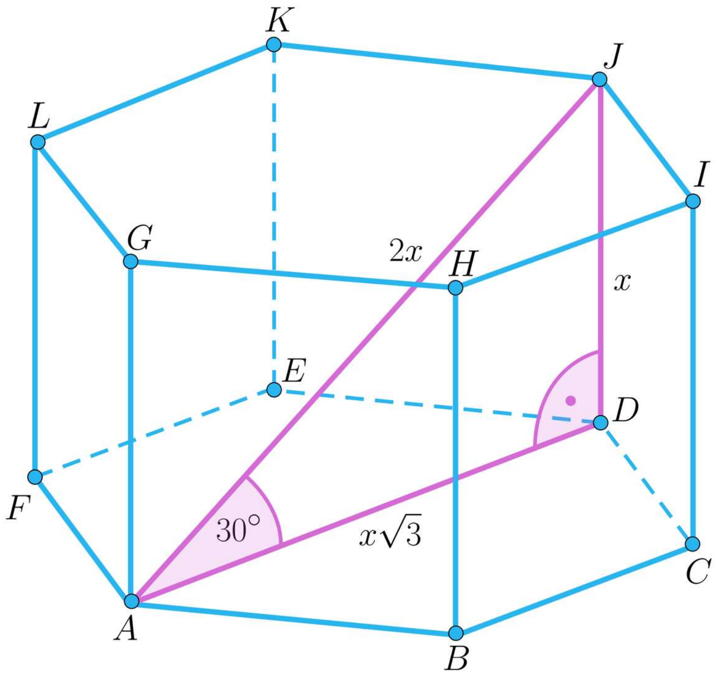
Ponieważ wszystkie krawędzie graniastosłupa są tej samej długości, to $H = 4\sqrt{3}$.

Możemy już obliczyć objętość tego graniastosłupa: $V = 6 \cdot \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3} = 864 \text{ j}^3$.

Przykład 2

Obliczymy objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym dłuższa przekątna graniastosłupa ma długość 12 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°.

Zróbmy rysunek pomocniczy:



Zależności pomiędzy bokami trójkąta na rysunku zostały na nim oznaczone.

Wiemy, że $2x = 12$. Stąd $x = 6$ i $x\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

A zatem $H = 6$ i dłuższa przekątna podstawy $2a = 6\sqrt{3}$. Stąd krawędź podstawy ma długość $a = 3\sqrt{3}$. Możemy już policzyć objętość tego graniastosłupa.

Mamy więc $V = 6 \cdot \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 243\sqrt{3}$ j^3.

Znając objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego możemy policzyć długości odcinków, miary kątów i pole powierzchni tego graniastosłupa.

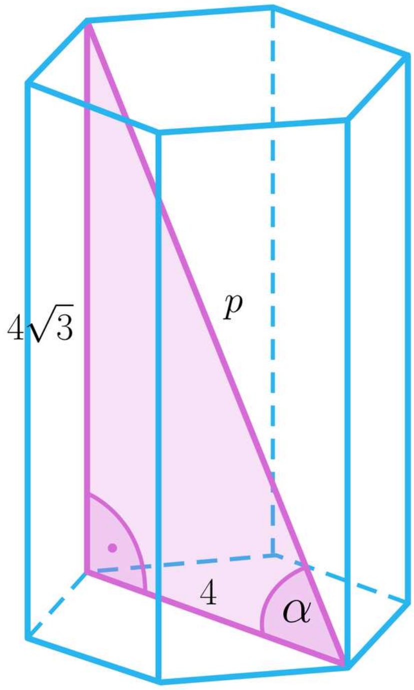
Przykład 3

Oblicz długość dłuższej przekątnej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o objętości 72 i krawędzi podstawy 2. Jaką miarę ma kąt nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy?

Najpierw obliczymy długość wysokości graniastosłupa korzystając ze wzoru na objętość graniastosłupa.

Mamy $72 = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4}H$. Czyli $12 = \sqrt{3}H$, a stąd $H = 4\sqrt{3}$.

Zróbmy rysunek pomocniczy:



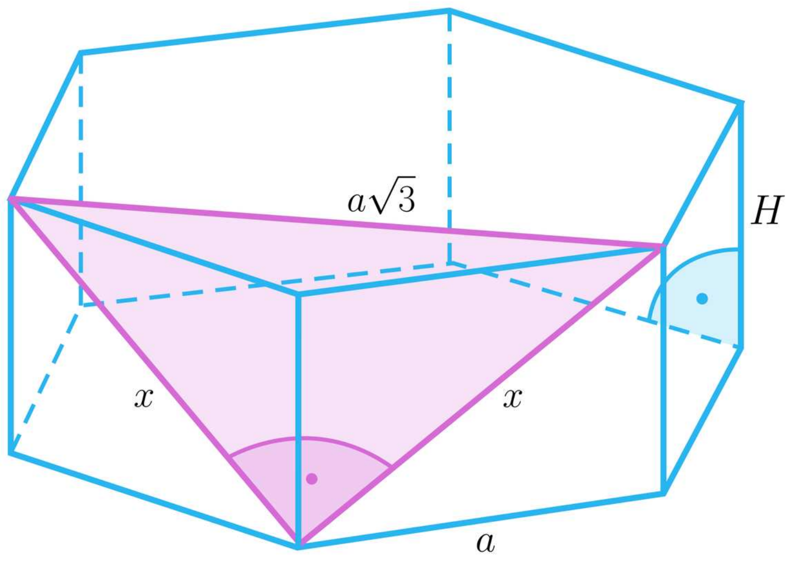
Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 = p^2$, a stąd $p^2 = 64$ i ostatecznie dłuższa przekątna graniastosłupa ma długość $p = 8$.

Przyglądając się długościom boków trójkąta, z którego korzystaliśmy, widzimy, że jest to trójkąt prostokątny o kątach ostrych 30°, 60°. A zatem kąt nachylenia dłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy ma miarę $\alpha = 60^{\circ}$.

Przykład 4

Kąt pomiędzy przekątnymi sąsiednich ścian bocznych w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym ma miarę 90°. Oblicz pole powierzchni tego graniastosłupa wiedząc, że objętość wynosi $48\sqrt{6}$.

Zróbmy rysunek pomocniczy:



Trójkąt zaznaczony na rysunku jest równoramienny i prostokątny. Czyli $a\sqrt{3} = x\sqrt{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa $x = \sqrt{a^2 + H^2}$. Czyli $a\sqrt{3} = \sqrt{2a^2 + 2H^2}$. Podnosząc wyrażenie stronami do kwadratu otrzymujemy $3a^2 = 2a^2 + 2H^2$. Czyli $a^2 = 2H^2$, a stąd $a = H\sqrt{2}$.

Podstawmy to do objętości graniastosłupa: $48\sqrt{6} = 6 \cdot \frac{\left(H\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} H$. A zatem $32\sqrt{6} = 2\sqrt{3}H^3$. Mamy więc $H^3 = \frac{32\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = 16\sqrt{2}$. Stąd $H = 2\sqrt{2}$ oraz $a = 4$.

Możemy więc obliczyć już pole powierzchni tego graniastosłupa $P_c = 12 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} = 48\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$.

Słownik

graniastosłup prawidłowy sześciokątny

graniastosłup, którego podstawa jest sześciokątem foremnym, a ściany boczne są przystającymi prostokątami

przekątna graniastosłupa

odcinek, którego końce są wierzchołkami dwóch różnych podstaw graniastosłupa nie leżące na jednej ścianie bocznej

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj polecenia 2 i 3.

Polecenie 2

Rozważmy graniastosłup z prezentacji. Jaką miarę ma kąt między krótszą przekątną graniastosłupa a jego podstawą?

Polecenie 3

Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $96\sqrt{3}$, a kąt pomiędzy dłuższą przekątną graniastosłupa, a podstawą ma miarę 45°. Oblicz długość krawędzi podstawy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma miarę 90°, a dłuższa przekątna podstawy długość $24\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 8

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym dłuższa przekątna graniastosłupa jest dwukrotnie dłuższa od krótszej przekątnej podstawy. Objętość graniastosłupa wynosi $192\sqrt{6}$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa: X Stereometria, Poziom podstawowy

Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- Oblicza objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mając daną długość krawędzi podstawy i wysokości graniastosłupa.
- Oblicza objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mając dane długości różnych odcinków i miary kątów w graniastosłupie.
- Oblicza długości odcinków i miary kątów w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym mając jego objętość.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody pracy:

- burza mózgów
- rozmowa nauczająca
- dyskusja

- ćwiczeniowa

Formy pracy:

- praca całą klasą,
- praca w parach,
- praca samodzielna.

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora,
- materiały zawarte w e-podręczniku,
- modele graniastosłupów.

Przebieg lekcji:

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wraz z uczniami przypomina w formie pogadanki dotychczasowe wiadomości o graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym: odcinki, kąty w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym.
2. Nauczyciel wspierając się sekcją wprowadzenie formułuje pytanie kluczowe odnoszące się do rzeczywistości.
3. Nauczyciel wraz z uczniami formułują kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przypomina pojęcie objętości i przy wsparciu sekcji Przeczytaj odnosi je do graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.
2. Nauczyciel analizuje przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj.
3. Nauczyciel przedstawia uczniom Aplet przykładu obliczania objętości graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Stara się, aby pomysły na kolejne kroki wychodziły od uczniów, prowadzi dyskusję nad kolejnymi etapami rozwiązywania zadania.
4. Uczniowie rozwiązują w parach ćwiczenia 1-4 z sekcji Sprawdź się.
5. Nauczyciel wraz z uczniami sprawdzają odpowiedzi i analizują rozwiązania.
6. Wybrani uczniowie rozwiązują Ćwiczenia 7 i 8 na tablicy przy wsparciu nauczyciela i giełdzie pomysłów pozostałej części klasy.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie wykonują samodzielnie polecenia z sekcji Aplet.
2. Uczniowie dokonują ewaluacji kryteriów sukcesu wybraną przez nauczyciela metodą.

Praca domowa:

Ćwiczenie 5 i 6 z sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

Jednostki objętości. Zamiana jednostek

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać multimedium do samodzielnego przygotowania do sprawdzianu z działu.