



Czy można wyglądać jak trójkąt, a nie być trójkątem?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Mapa myśli
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Czy można wyglądać jak trójkąt, a nie być trójkątem?

Czy wiesz, że przekrój poprzeczny jednego z najbardziej charakterystycznych nowojorskich wieżowców Flatiron Building, ma kształt trójkąta? Wpisany na listę UNESCO w 1990 roku gród warowny na wzgórzu w Moskwie znany jako Kreml, również jest na planie trójkąta. Litera alfabetu greckiego delta ma również kształt trójkąta. Czy znasz miejsca, przedmioty, symbole w kształcie trójkąta?

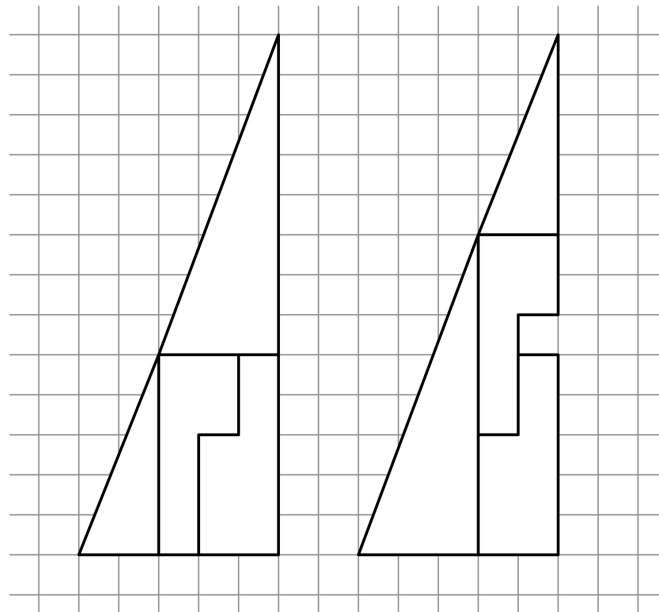
Twoje cele

- Rozpoznasz i sklasyfikujesz poszczególne rodzaje trójkątów.
- Wykonasz doświadczenie ilustrujące paradoks matematyczny.
- Zweryfikujesz prawdziwość stwierdzeń dotyczących własności trójkąta.
- Poszukasz analogii w zakresie wykorzystania własności trójkąta do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Trójkąt to figura płaska, w której suma kątów wewnętrznych jest równa 180° , zaś suma długości dwóch boków jest większa od długości trzeciego. Czy taka definicja trójkąta jest wystarczająca? Z matematycznego punktu widzenia tak, przecież opisuje własności figury w ten sposób ją definiując.

Jak zatem wyjaśnisz poniższy matematyczny paradoks?



Zagadka brakującego kwadratu. Figury na rysunkach nie są trójkątami.

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o..

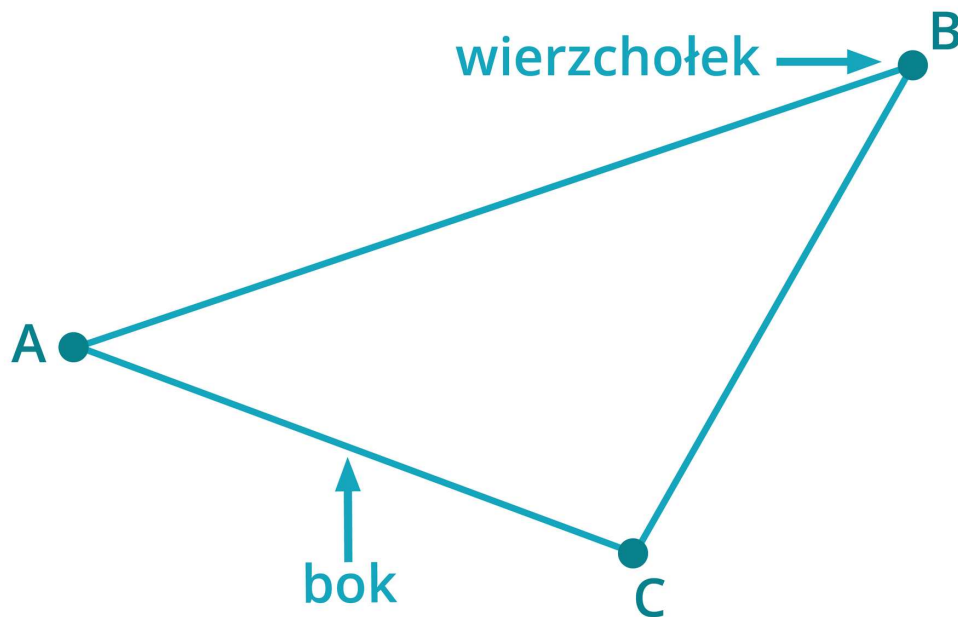
Uzasadnienie: powyższe figury nie są trójkątami, co pokażemy, i korzystając z własności kątów. Skoro w pierwszym przypadku wydaje się, że trójkąt jest trójkątem prostokątnym, a suma kątów w trójkącie powinna być równa 180° , to odcinając kąty ostre przy wierzchołkach, powinniśmy po ich złożeniu dostać kąt prosty.

Różnica jest niewielka. W pierwszym przypadku do kąta prostego brakuje kąta o mierze ok. 1° , natomiast w drugim przypadku jest za dużo o 1° .

Warto zatem rozważyć następujące pytanie:

Co to jest trójkąt i jakie własności posiada?

Trójkąt



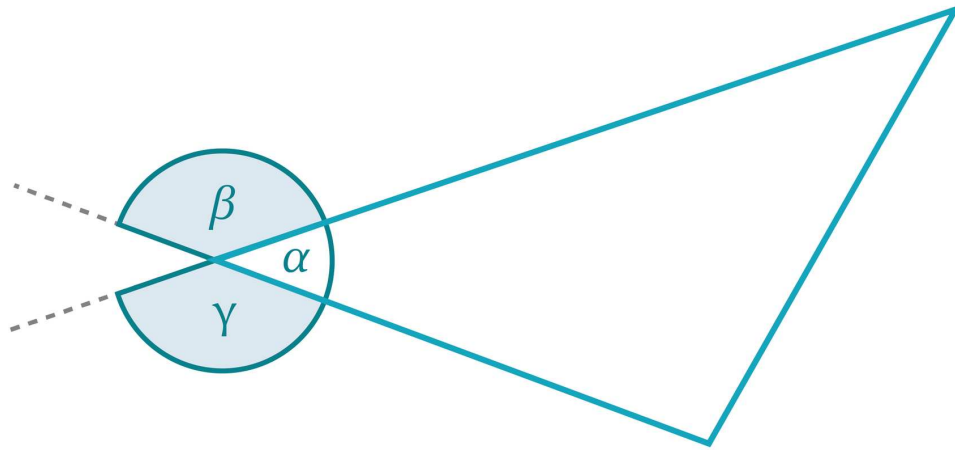
Trójkąt jest wielokątem, który posiada trzy boki. Punkt wspólny sąsiednich boków nazywany jest wierzchołkiem.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

- A, B, C – wierzchołki trójkąta
- AC, CB, AB – boki trójkąta
- $L = |AC| + |CB| + |AB|$ – obwód trójkąta

Definicja: Kąt zewnętrzny trójkąta

Każdy kąt przyległy do kąta wewnętrznego trójkąta nazywamy kątem zewnętrznym trójkąta.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Nierówność trójkąta

Twierdzenie: Nierówność trójkąta

W dowolnym trójkącie długość każdego boku jest mniejsza od sumy długości pozostałych boków.

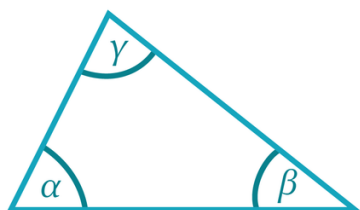
Z odcinków o długościach a , b , c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a < b + c,$$

$$b < a + c,$$

$$c < a + b.$$

Rodzaje trójkątów

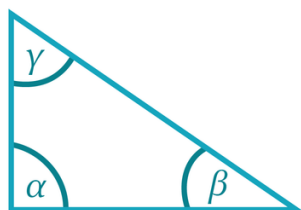


**trójkąt
ostrokątny**

$$\alpha < 90^\circ$$

$$\beta < 90^\circ$$

$$\gamma < 90^\circ$$

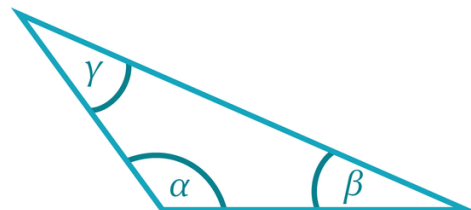


**trójkąt
prostokątny**

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\beta < 90^\circ$$

$$\gamma < 90^\circ$$



**trójkąt
rozwartokątny**

$$\alpha > 90^\circ$$

$$\beta < 90^\circ$$

$$\gamma < 90^\circ$$

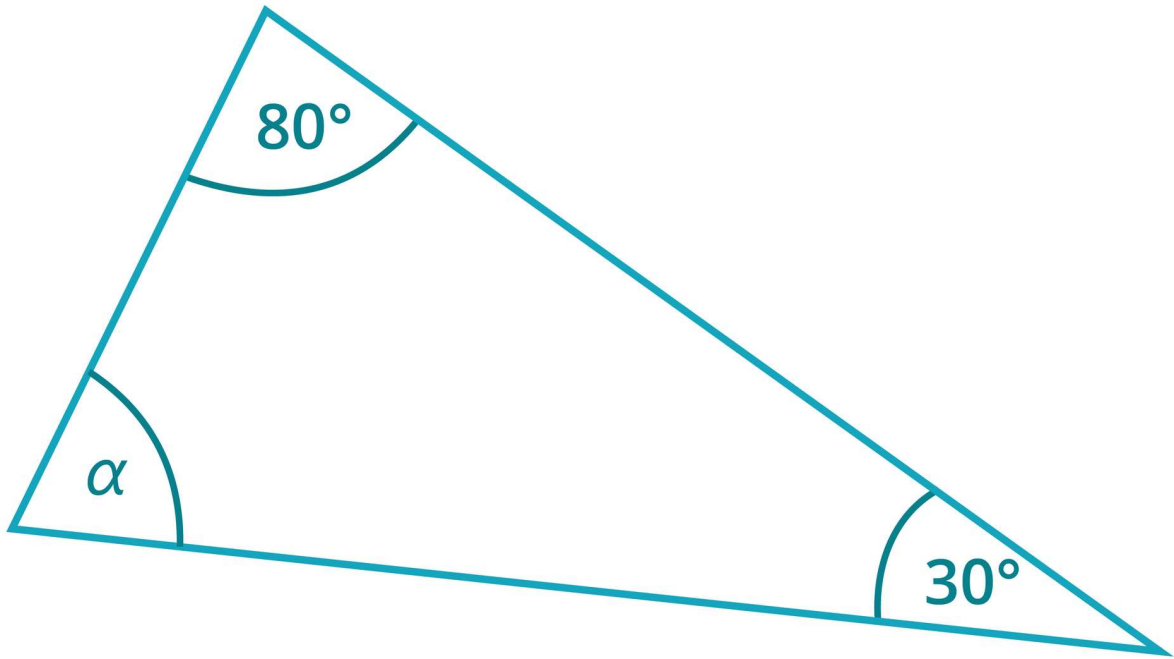
Trójkąty klasyfikujemy ze względu na miary ich kątów na trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

- Każdy kąt trójkąta ostrokątnego ma miarę mniejszą od 90° .
- W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ma miarę równą 90° .
- W trójkącie rozwartokątnym miara jednego z kątów jest większa od 90° .

Trójkąty można klasyfikować ze względu na długości ich boków.

- Trójkąt, który ma wszystkie boki tej samej długości nazywamy **trójkątem równobocznym**.
- Jeśli w trójkącie dwa boki są tej samej długości, to trójkąt taki nazywamy **trójkątem równoramiennym**.
- Trójkąt, w którym wszystkie boki są różnej długości, nazywamy **trójkątem różnobocznym**.

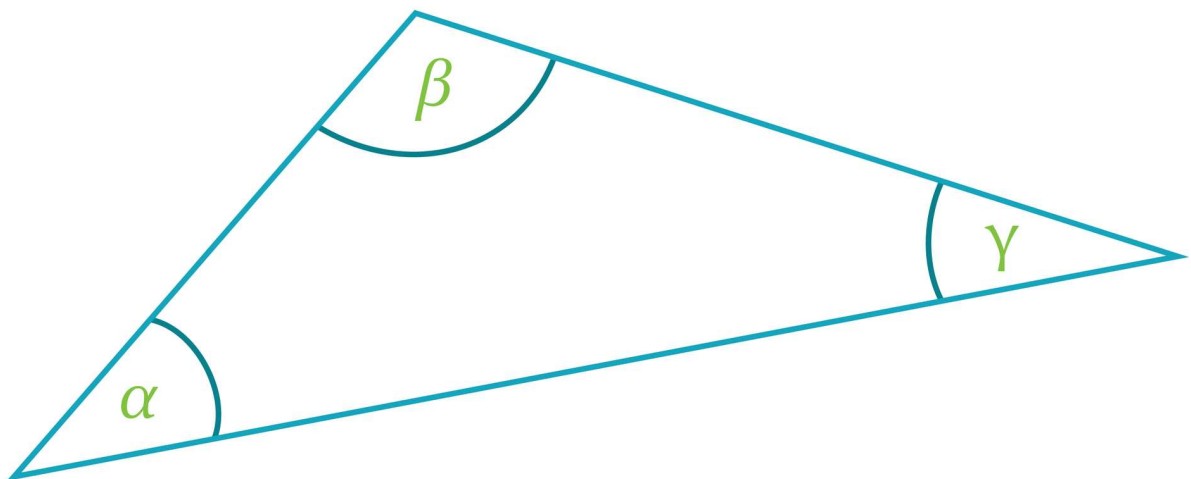


Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Suma kątów w trójkącie

Twierdzenie: Twierdzenie: Suma miar kątów trójkąta

Suma miar kątów trójkąta jest równa 180° .



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ważne!

Wniosek

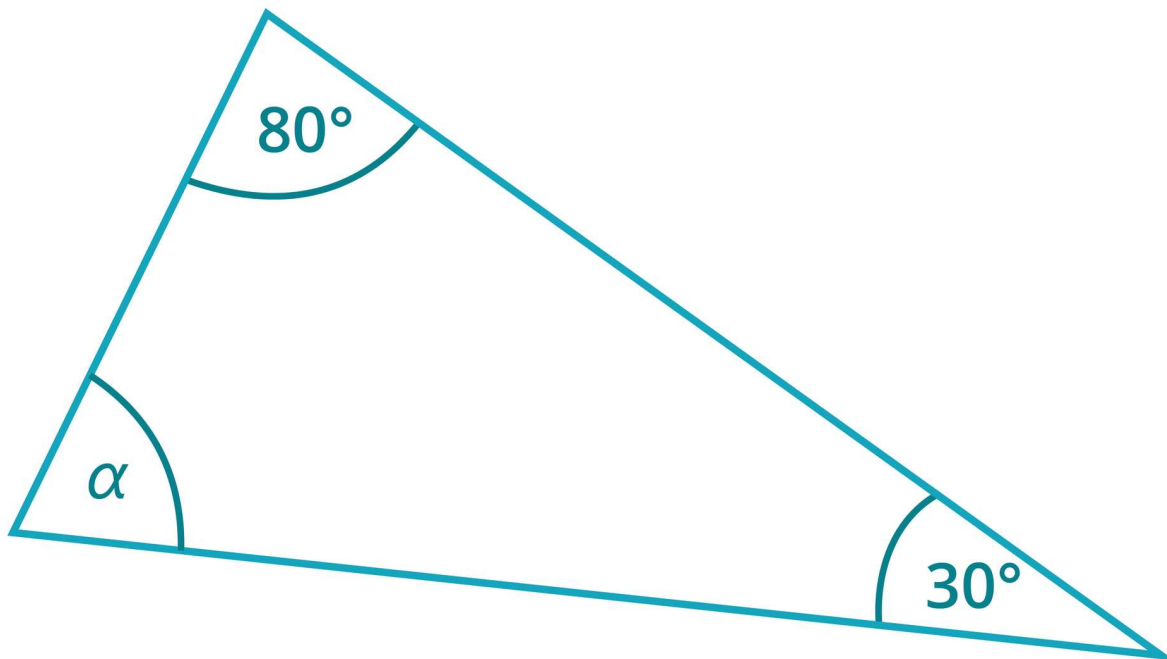
- Jeżeli w trójkącie jeden z kątów jest rozwarty, to każdy z pozostałych kątów jest kątem ostrym.
- Jeżeli w trójkącie jeden z kątów jest prosty, to każdy z pozostałych kątów jest ostry. Suma miar tych kątów ostrych jest równa 90° .

$$\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Przykład 1

Znajdziemy miarę kąta α przedstawionego na poniższym rysunku.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Układamy i rozwiązujemy odpowiednie równanie.

Suma kątów trójkąta jest równa 180° .

$$\alpha + 80^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + 110^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 110^\circ$$

$$\alpha = 70^\circ$$

Przykład 2

W trójkącie równoramiennym jeden z kątów ma miarę 40° . Obliczmy miary pozostałych kątów.

W trójkącie równoramiennym miary dwóch kątów są równe. Ponieważ nie wiemy, czy szukane kąty są równe, czy różne - rozpatrzmy dwa przypadki. Skorzystamy z tego, że suma kątów w trójkącie jest równa 180° .

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Słownik

trójkąt

to figura płaska, w której suma kątów wewnętrznych jest równa 180° , zaś suma długości dwóch boków jest większa od długości trzeciego.

kąt zewnętrzny trójkąta

jest to każdy kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta

trójkąt równoboczny

jest trójkątem, którego wszystkie boki są samej długości

trójkąt równoramienny

jest trójkątem, w którym dwa boki są tej samej długości

trójkąt różnoboczny

jest trójkątem, w którym wszystkie boki są różnej długości

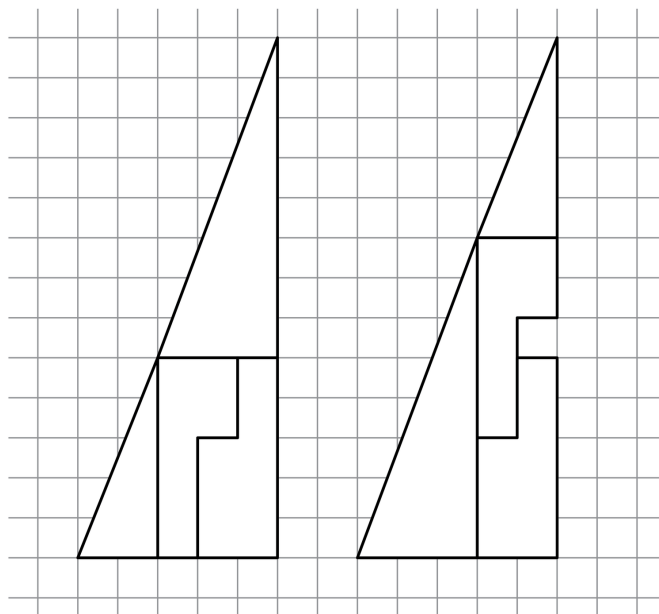
Mapa myśli

Polecenie 1

Stwórz mapę myśli, na której przedstawisz klasyfikację trójkątów. Kliknij przycisk Edytuj, wypełnij pola tekstowe. Następnie wybierz przycisk Generuj.

Polecenie 2

Trójkąt podzielono na cztery części tak jak na ilustracji. Następnie części połączono w sposób zaprezentowany na kolejnym rysunku. Przyjrzyj się uważnie i spróbuj powtórzyć to samodzielnie na kartce. Co zauważysz?






Zagadka brakującego kwadratu. Figury na rysunkach nie są trójkątami.

Źródło: <http://commons.wikimedia.org>, licencja: CC BY-SA 3.0.

Polecenie 3

Jak myślisz, czy z każdego trzech odcinków można zbudować trójkąt? Jaka musi być zależność między długościami takich odcinków?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 2



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 3



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 4



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Elżbieta Miterka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Czy można wyglądać jak trójkąt, a nie być trójkątem?

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok.

Kształowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje i klasyfikuje poszczególne rodzaje trójkątów.
- wykonuje doświadczenie ilustrujące paradoks matematyczny.
- weryfikuje prawdziwość stwierdzeń dotyczących własności trójkąta.
- poszukuje analogii w zakresie wykorzystania własności trójkąta do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- elementy wykładu,
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych,
- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg zajęć:

Faza wstępna

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na pięć grup. Uczniowie w grupach rozwiązują zagadkę (Polecenie 1 z e-materiału). Przedstawiają swoje propozycje rozwiązania zagadki na forum klasy. Następnie sprawdzają rozwiązanie i wspólnie omawiają problem.

Faza realizacyjna

1. Nauczyciel zaznacza, że omawiany matematyczny paradoks będzie punktem wyjścia do rozważań o trójkątach i ich właściwościach. Uczniowie zapoznają się z fragmentem e-materiału opisującym trójkąt i kąt zewnętrzny trójkąta.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby dobrali się w pary. Zadaniem każdej pary jest przeprowadzenie konstrukcji trójkąta z trzech dowolnych odcinków. Uczniowie podejmują się realizacji zadania. Nauczyciel zadaje pytania: Czy udało Wam się przeprowadzić konstrukcję? Czy z każdego trzech odcinków można zbudować trójkąt? Jaka musi być zależność między długościami takich odcinków? Uczniowie sprawdzają swoje przypuszczenia i formułują wnioski.
3. W kolejnym kroku nauczyciel dzieli uczniów na cztery grupy. Dwie z nich opracowują podział trójkątów ze względu na miary ich kątów, natomiast pozostałe dwie - ze względu na długości ich boków. Po zakończonej pracy, członkowie grup, które zajmowały się tym samym zagadnieniem, wspólnie opracowują wyniki. Następnie przedstawiciele dwóch połączonych grup przedstawiają wyniki na forum klasy, a wybrany uczeń zapisuje je na tablicy.

4. Nauczyciel wprowadza temat sumy kątów w trójkącie. Następnie uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wybrane przez prowadzącego.

Faza podsumowująca

1. Jako podsumowanie nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z mapą myśli w e-materiale. Każdy z nich ma narysować przykłady trójkątów odpowiednich do wskazanej klasyfikacji.

2. Na zakończenie nauczyciel wraca do pytania, które stanowiło temat lekcji: Czy można wyglądać jak trójkąt i nie być trójkątem? Uczniowie wraz z nauczycielem podejmują dyskusję, uzasadniają swoje odpowiedzi doprecyzowując definicję trójkąta.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie wykonali na lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Cechy podobieństwa trójkątów](#)

[Przystawanie trójkątów](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Nauczyciel może wykorzystać stworzoną przez uczniów mapę myśli w zadaniu domowym, np. uczniowie na jej podstawie mają opracować lap book o klasyfikacji trójkątów.