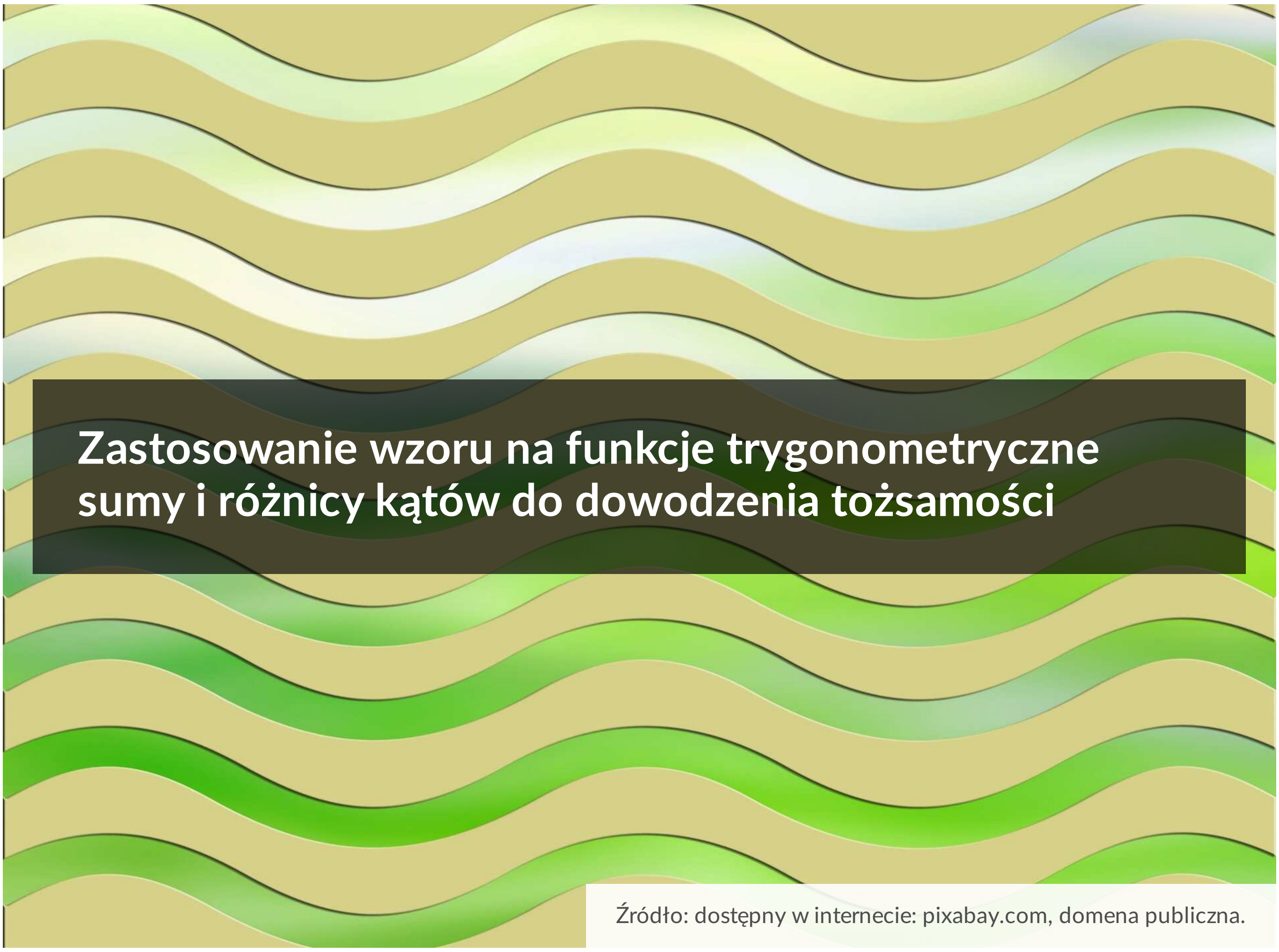
Zastosowanie wzoru na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów do dowodzenia tożsamości

Zastosowanie wzoru na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów do dowodzenia tożsamości



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Znasz już sześć wzorów pozwalających obliczać sinus, cosinus i tangens sumy oraz różnicy argumentów. Są one podstawą do wyznaczania kolejnych wzorów ważnych w trygonometrii. Teraz pokażemy, jak je stosować do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych.

Twoje cele

- Nauczysz się stosować wzory na sinus, cosinus i tangens sumy oraz różnicy argumentów do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych.

Przeczytaj

Na początek przypomnimy wszystkie wzory, z których będziemy korzystać.

Twierdzenie: funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów

Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory:

1. $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$,
2. $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$,
3. $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$,
4. $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunki $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, zachodzi wzór:

5. $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunki $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x - y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, zachodzi wzór:

6. $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$.

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich argumentów, dla których ma sens.

Na tej lekcji pokażemy przykłady tożsamości, które możemy udowodnić korzystając ze wzorów na sinus, cosinus, tangens sumy i różnicy argumentów.

Zacznijmy od zadania:

Przykład 1

Udowodnimy tożsamość $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$.

Dowód każdej tożsamości rozpoczynamy od zapisania założeń, czyli wskazania elementów, dla których równość ma sens. W przypadku tego przykładu mamy: $\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha) \neq 0$ i $\cos \alpha \neq 0$.

W trakcie dowodu okaże się, że oba warunki oznaczają to samo.

Dowód tożsamości zwykle rozpoczynamy od tej strony, która jest bardziej skomplikowana. Jest zgodne z zasadą, że łatwiej upraszczać coś skomplikowanego, niż komplikować coś prostego.

Zatem rozpoczniemy dowód od przekształcenia lewej strony. Wykorzystamy wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy argumentów:

$$L = \frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} =$$

$$= \frac{\sin 45^\circ \cos\alpha + \cos 45^\circ \sin\alpha - \cos 45^\circ \cos\alpha + \sin 45^\circ \sin\alpha}{\sin 45^\circ \cos\alpha + \cos 45^\circ \sin\alpha + \cos 45^\circ \cos\alpha - \sin 45^\circ \sin\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = P.$$

Zatem $L = P$, co kończy dowód.

Przykład 2

Udowodnimy, że $\frac{\sin 44^\circ + \cos 74^\circ}{2\cos 14^\circ + 2\sin 104^\circ} = \frac{1}{4}$.

To szczególny typ tożsamości. Jest to związek między dwoma wielkościami liczbowymi.

Jak udowodnić tę tożsamość korzystając ze wzorów na funkcje trygonometryczne sumy argumentów? Zauważmy, że możemy zapisać kąty z zadania jako:

$44^\circ = 30^\circ + 14^\circ$ i $74^\circ = 60^\circ + 14^\circ$, czyli sumy charakterystycznego kąta 14° i dobrze znanych kątów 30° i 60°.

Teraz dokonajmy przekształceń:

$$L = \frac{\sin 44^\circ + \cos 74^\circ}{2\cos 14^\circ + 2\sin 104^\circ} = \frac{\sin(30^\circ + 14^\circ) + \cos(60^\circ + 14^\circ)}{2\cos 14^\circ + 2\cos 14^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 30^\circ \cos 14^\circ + \cos 30^\circ \sin 14^\circ + \cos 60^\circ \cos 14^\circ - \sin 60^\circ \sin 14^\circ}{4\cos 14^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos 14^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 14^\circ + \frac{1}{2}\cos 14^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 14^\circ}{4\cos 14^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 14^\circ}{4\cos 14^\circ} = \frac{1}{4} = P,$$

co kończy dowód tożsamości.

Przykład 3

Udowodnimy tożsamość: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Zauważmy, że to tożsamość z dwoma zmiennymi.

Zacznijmy od założeń: $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Dowód tożsamości rozpoczniemy od przekształcania lewej strony równości:

$L = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} =$

$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = P,$

co kończy dowód tożsamości.

Przykład 4

Udowodnimy tożsamość:

$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{2}.$

Zapiszmy założenie:

$2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha \neq 0.$

Rozpoczniemy przekształcanie od lewej strony rozpisując $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ i $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$ z wykorzystaniem wzoru na sinus sumy oraz różnicy argumentów:

$L = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha} =$

$= \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha + 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha}{2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\cos\alpha} =$

$= \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{2} = P.$

A to kończy dowód tożsamości.

Przykład 5

Udowodnimy tożsamość: $\frac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}2\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right).$

Zapiszmy założenia: $1-$ $\operatorname{tg} 2\alpha \neq 0$ i $\cos 2\alpha \neq 0.$

Skorzystajmy z definicji funkcji tangens:

$L = \frac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}2\alpha} =$

$= \frac{\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{1-\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}} =$

$= \frac{(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} = (*)$

Zapiszmy inaczej wyrażenie:

$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos 2\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$

Analogicznie przekształcamy:

$\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\right) =.$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos 2\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right).$

Po wykorzystaniu powyższych przekształceń otrzymujemy:

$(*) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)} =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = P.$

Zatem $L = \mathrm{P}$, co kończy dowód.

Słownik

tożsamość trygonometryczna

równość, która jest prawdziwa dla wszystkich argumentów, dla których ma sens.

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj polecenia.

Polecenie 2

Udowodnij, że dla kątów trójkąta ostrokątnego α, β, γ zachodzi tożsamość:
$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} + \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha} = 1.$

Polecenie 3

Udowodnij, że dla kątów trójkąta 2α, 2β, 2γ prawdziwa jest tożsamość:
$\operatorname{tg}\,\alpha\cdot \operatorname{tg}\,\beta + \operatorname{tg}\,\beta\cdot \operatorname{tg}\,\gamma + \operatorname{tg}\,\gamma\cdot \operatorname{tg}\,\alpha = 1$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Udowodnij, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to równość

$$\sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$$

jest tożsamością.

Ćwiczenie 8

Udowodnij, że równość

$$\frac{\sin\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\alpha}$$

jest tożsamością.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wzoru na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów do dowodzenia tożsamości

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń:

4. stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;
5. korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozróznia tożsamości trygonometryczne;
- dowodzi tożsamości trygonometryczne stosując wzory na sinus, cosinus i tangens sumy oraz różnicy argumentów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- dyskusja;
- opis ustny.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji w temacie: „Zastosowanie wzoru na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów do dowodzenia tożsamości”.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami opisanymi w sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie indywidualnie analizują treść polecenia numer 1 „Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj polecenia” oraz materiał z sekcji „Infografika”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Zastosowanie wzoru na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów do dowodzenia tożsamości”).

Materiały pomocnicze

- Tożsamości trygonometryczne
- Przykłady tożsamości trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Zastosowanie wzoru na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów do dowodzenia tożsamości”.