


## Objętość graniastostupa prawidłowego trójkątnego

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja 3D
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

Źródło: Christian Fregnan, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Objętość obiektów trójwymiarowych jest bardzo ważnym pojęciem w matematyce, które ma szerokie zastosowanie w życiu codziennym. Informuje ona, jaka jest pojemność danego obiektu trójwymiarowego. Obiekty o różnych kształtach wymagają innego obliczenia objętości. Podczas pracy z sześcianami i prostopadłościanami, zanim będziesz mógł obliczyć objętość, najpierw musisz zmierzyć długość krawędzi. Mając do czynienia z innymi graniastosłupami prostymi, będziesz potrzebował innych informacji. Po zapoznaniu się z materiałem będziesz znał odpowiedź na pytanie, jak obliczyć objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego?

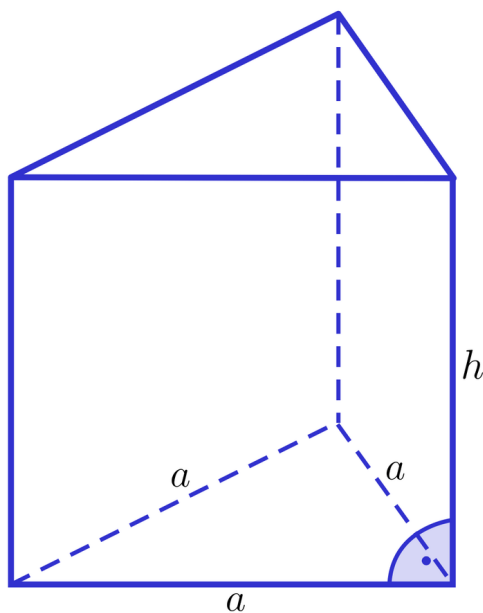
### Twoje cele

- Nauczysz się jak obliczać objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.
- Poznasz praktyczne zastosowanie zdobytej wiedzy.

# Przeczytaj

## Definicja: Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa iloczynowi pola podstawy przez wysokość.



$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

## Przykład 1

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym o objętości równej 1, pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól podstaw. Wyznamy długość krawędzi podstawy i długość wysokości tego graniastosłupa.

### Rozwiązanie:

Niech  $a > 0$  oznacza długość krawędzi podstawy oraz  $h > 0$  długość wysokości rozważanego graniastosłupa. Z warunków zadania wynika, że

$$3ah = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ oraz } \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = 1.$$

Przekształcając równoważnie pierwsze równanie, uzyskujemy kolejno

$$3ah = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$3h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Następnie, podstawiając powyższą zależność do drugiego równania, otrzymujemy kolejno

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = 1$$

$$\frac{a^3}{8} = 1$$

$$a = 2.$$

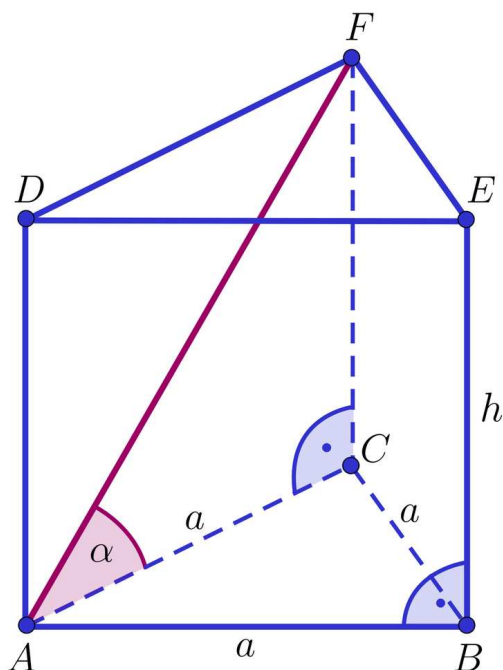
Możemy wyliczyć długość wysokości

$$h = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zatem krawędź podstawy graniastosłupa ma długość 2, a wysokość  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

## Przykład 2

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy trójkątny. Przyjmując że  $h = 10$  oraz  $\cos \alpha = \frac{9}{10}$ , obliczymy jego objętość.



### Rozwiązanie:

Niech  $a > 0$  oznacza długość krawędzi podstawy,  $h > 0$  długość wysokości oraz  $d > 0$  długość przekątnej ściany bocznej rozważanego graniastosłupa. Korzystając z [twierdzenia Pitagorasa](#) dla trójkąta  $ACF$  mamy

$$d^2 = a^2 + h^2 = a^2 + 100.$$

Stosujemy **twierdzenie kosinusów** do trójkąta  $ABF$ , otrzymujemy kolejno

$$a^2 = d^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot d \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = 2(a^2 + 100) - 2(a^2 + 100) \cdot \frac{9}{10}$$

$$a^2 = \frac{1}{5}a^2 + 20$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5.$$

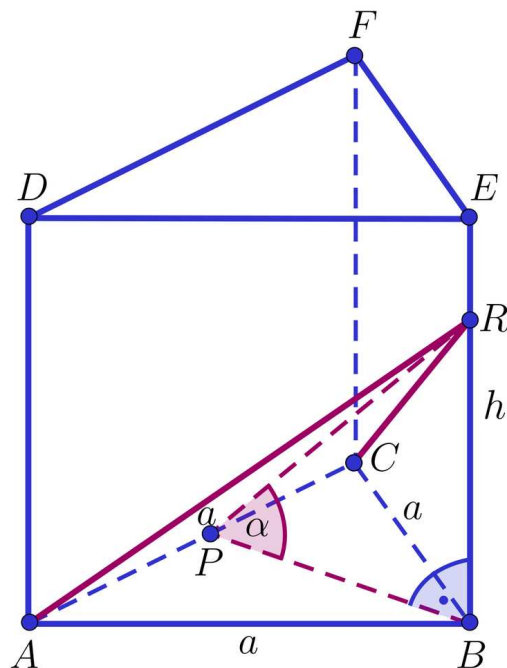
Możemy obliczyć objętość

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 10 = \frac{125}{2}\sqrt{3}.$$

### Przykład 3

Gnaniastosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym, którego  $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$ . Pole otrzymanego przekroju wynosi  $\sqrt{39}$ . Stosunek długości wysokości do długości krawędzi podstawy tego gnaniastosłupa wynosi 2. Obliczymy objętość tego gnaniastosłupa.

**Rozwiązanie:**



Niech  $a > 0$  oznacza długość krawędzi podstawy oraz  $h > 0$  długość wysokości rozważanego gnaniastosłupa. Zauważmy, że przekrój jest trójkątem równoramiennym,

a nie trapezem wtedy i tylko wtedy gdy punkt  $R$  znajduje się na krawędzi  $EB$ . Dzieje się tak, gdy

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{h}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2h}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}h}{3a} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że stosunek długości wysokości do długości krawędzi podstawy tego graniastosłupa wynosi 2. Zatem pole trójkąta równoramiennego wynosi  $P_{ACR} = \sqrt{39}$  i wysokości  $h_{ACR} > 0$ . Z warunków zadania mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3} \text{ oraz } P_{ACR} = \frac{1}{2}ah_{ACR} = \sqrt{39} \text{ i } h = 2a.$$

Z trójkąta  $RPB$  otrzymujemy

$$\frac{|BR|}{|PB|} = 2\sqrt{3},$$

gdzie odcinek  $|PB| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  jest wysokością podstawy. Otrzymujemy kolejno

$$\frac{|BR|}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$|BR| = 3a.$$

Możemy teraz wyznaczyć zależność wysokości trójkąta  $ACR$  od długości krawędzi podstawy. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $RPB$  otrzymujemy

$$h_{ACR} = \sqrt{9a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{2}a.$$

Podstawiając tę zależność do wzoru na pole przekroju graniastosłupa otrzymujemy

$$P_{ACR} = \frac{1}{2}ah_{ACR} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{39}}{2}a = \frac{\sqrt{39}}{4}a^2 = \sqrt{39}.$$

Stąd  $a = 2$  oraz  $h = 4$ . Możemy obliczyć objętość

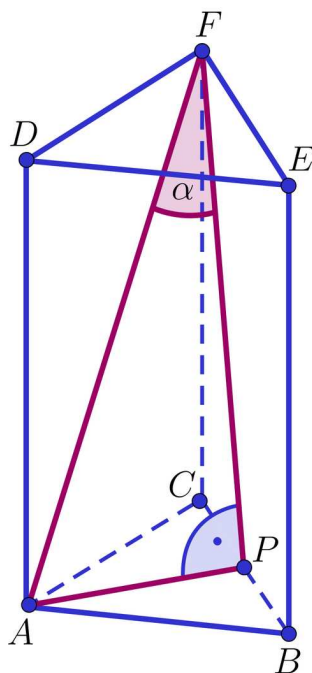
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{4\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 4\sqrt{3}.$$

#### Przykład 4

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy jest równa 4, a tangens kąta jaki przekątna ściany bocznej tworzy z sąsiednią ścianą boczną wynosi  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ . Obliczymy objętość tego graniastosłupa.

#### Rozwiązanie:

Rozważmy graniastosłup prawidłowy trójkątny przedstawiony na rysunku.



Niech  $a > 0$  oznacza długość krawędzi podstawy oraz  $h > 0$  długość wysokości rozważanego graniastoslupa. Z treści zadania wynika, że  $a = |AB| = |BC| = |AC| = 4$ . Odcinek  $|AP| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$  jest wysokością podstawy. Z warunków zadania otrzymujemy kolejno

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AP|}{|PF|}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{|PF|} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$|PF| = 2\sqrt{5}.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $FCP$  otrzymujemy

$$|PF|^2 = h^2 + \frac{1}{4}a^2, \text{ stąd mamy } h = 4.$$

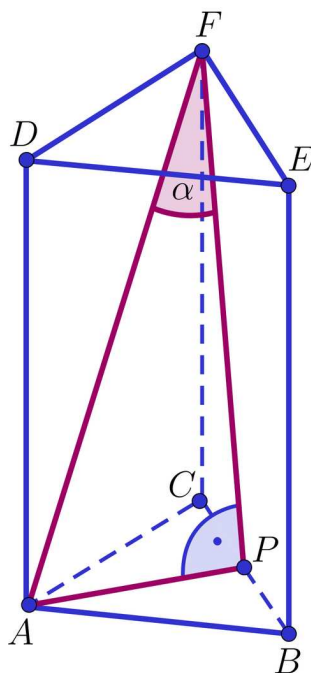
Możemy obliczyć objętość

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 16\sqrt{3}.$$

### Przykład 5

W graniastoslupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni całkowitej jest równe  $3\sqrt{3}$ . Kosinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej wynosi  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ . Obliczmy objętość tego graniastoslupa.

**Rozwiązanie:**



Niech  $a > 0$  oznacza długość krawędzi podstawy oraz  $h > 0$  długość wysokości rozważanego graniastoslupa. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa kolejno dla trójkątów  $ACF$  i  $PCF$  otrzymujemy, że

$$|AF| = \sqrt{h^2 + a^2} \text{ oraz } |FP| = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}.$$

Z warunków zadania mamy kolejno

$$\cos \alpha = \frac{|FP|}{|AF|}$$

$$\frac{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}}{\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$13(h^2 + \frac{1}{4}a^2) = 4(h^2 + a^2)$$

$$9h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Podstawiamy tę zależność do wzoru na pole powierzchni całkowitej graniastoslupa. Otrzymujemy kolejno

$$3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$3a \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$a^2 = 3$$

$$a = \sqrt{3} \text{ zatem } h = \frac{1}{2}.$$

Możemy obliczyć objętość

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

## Słownik

**graniastosłup prawidłowy trójkątny**

graniastosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt równoboczny

**twierdzenie Pitagorasa**

w dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta

**twierdzenie cosinusów**

w dowolnym trójkącie, kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi

# Animacja 3D

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w animacji 3D, a następnie wykonaj polecenia.

# Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DAwO9Ssr6>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej objętości graniastopuła.

---

## Polecenie 2

Oblicz pole powierzchni graniastopuła prawidłowego trójkątnego, którego objętość jest równa  $9\sqrt{3}$ , a suma długości wszystkich krawędzi wynosi 30. Długości krawędzi graniastopuła są wyrażone liczbami wymiernymi.

## Polecenie 3

Krawędź podstawy szklanego wazonu w kształcie graniastopuła prawidłowego trójkątnego wynosi 10 cm. Do wazonu wiano 3 szklanki wody o pojemności 250 ml, co stanowiło 0,6 całkowitej pojemności wazonu. Jaka jest wysokość wazonu? W obliczeniach przyjmij, że  $\sqrt{3} = 1,7$ . Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych centymetrów.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



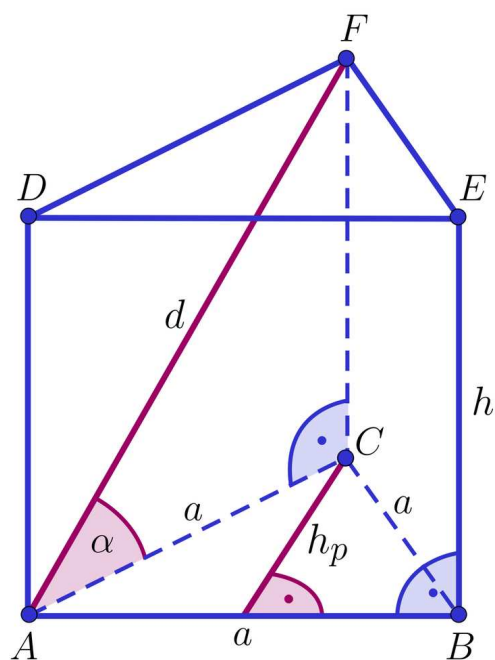
Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



W graniastopie prawidłowym trójkątnym wprowadzono oznaczenia tak jak na rysunku. Przeciagnij i upuść właściwe wzory.



## Ćwiczenie 5



Wybierz prawidłową odpowiedź.

## Ćwiczenie 6



Suma długości wszystkich krawędzi graniastopła prawidłowego trójkątnego wynosi 21. Wysokość stanowi 150% długości krawędzi podstawy. Oblicz objętość tego graniastopła.

## Ćwiczenie 7



Przekątna ściany bocznej graniastopła prawidłowego trójkątnego jest nachylona pod kątem  $60^\circ$  do krawędzi podstawy. Do budowy szkieletu tego graniastopła zużyto drut długości 30 dm. Czy zmieści się w nim 15 litrów wody?

## Ćwiczenie 8



Do naczynia z sokiem w kształcie graniastopła prawidłowego trójkątnego o wysokości  $4\sqrt{3}$ , wrzucono trzy sześciennie kostki lodu o krawędzi  $\sqrt{3}$  razy mniejszej niż krawędź podstawy naczynia. Objętość mieszaniny soku i lodu wynosiła wówczas 12. Ile wynosiła objętość soku przed wrzuceniem kostek lodu?

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Agnieszka Niemczynowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

zakres rozszerzony

VII. Trygonometria

Zakres podstawowy

Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych

5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta.

Zakres rozszerzony

Uczeń dla kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ :

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

X. Stereometria

Zakres podstawowy

Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zakres rozszerzony

Uczeń:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

### **Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

### **Cele operacyjne:**

Uczeń:

- opisuje podstawowe własności graniastosłupa prawidłowego trójkątnego;
- wykorzystuje podstawowe własności graniastosłupów prostych i prawidłowych do nieskomplikowanych obliczeń;
- stosuje funkcję trygonometryczną oraz własności trójkątów prostokątnych do obliczania długości odpowiednich odcinków graniastosłupie prawidłowym trójkątnym;
- oblicza objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego;
- mając daną objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wyznacza wskazane odcinki w graniastosłupie, pole powierzchni bocznej i pole podstaw.

### **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

### **Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- dyskusja panelowa;
- dyskusja.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;

- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu; zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg zajęć:**

#### **Przed lekcją**

- Uczniowie zapoznają się z treściami z poprzednich lekcji dotyczącymi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

#### **Faza wstępna:**

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji o temacie: “Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego”.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z działu „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji “Animacja 3D”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie polecenia nr 1-2 z sekcji „Animacja 3D”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.
4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-7 z działu „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

#### **Faza podsumowująca:**

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

#### **Praca domowa**

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

Jednostki objętości. Objętość graniastosłupa

**Wskazówki metodyczne:**

Animację 3D można wykorzystać do powtórzenia materiału o graniastosłupach.