Równania trygonometryczne prowadzące do rozwiązywania równań kwadratowych

Równania trygonometryczne prowadzące do rozwiązywania równań kwadratowych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Potrafisz już rozwiązywać proste równania typu: $\sin x = a$, $\cos x = a$ i $\operatorname{tg} x = a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. W tym materiale dowiesz się, jak sprowadzić bardziej skomplikowane równania trygonometryczne do postaci równania kwadratowego. W tym celu wykorzystamy tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ oraz $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Twoje cele

- Nauczysz się sprowadzać równania trygonometryczne do postaci równania kwadratowego.
- Dowiesz się, jak wykorzystać podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania bardziej skomplikowanych równań.
- Przypomnisz sobie, jakie własności mają rozwiązania równań kwadratowych.

Przeczytaj

W tym materiale omówimy równania trygonometryczne, które przez odpowiednie podstawienie możemy sprowadzić do równania kwadratowego.

Na początek rozpoczniemy od przykładu, w którym odpowiednie podstawienie jest dobrze widoczne i naturalne.

Przykład 1

Obliczymy wartość $\sin x$, jeżeli wiemy, że $6\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$.

Rozwiązanie

Zróbmy podstawienie: $t = \sin x$.

Wówczas równanie $6\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$ przyjmuje postać równania kwadratowego:

$6t^2 - t - 2 = 0$.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe. Obliczmy:

$\Delta = 1 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49$

$t = \frac{1-7}{12}$ lub $t = \frac{1+7}{12}$

$t = -\frac{1}{2}$ lub $t = \frac{2}{3}$.

Stąd otrzymujemy odpowiedź: $\sin x = -\frac{1}{2}$ lub $\sin x = \frac{2}{3}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3\sin(1,5\pi + x)$.

Rozwiązanie

Najpierw skorzystamy ze wzorów redukcyjnych:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ oraz $\sin(1,5\pi + x) = -\cos x$

i otrzymamy równanie:

$2\sin^2 x = -3\cos x$.

Wykorzystamy jedynkę trygonometryczną:

$2\left(1 - \cos^2 x\right) + 3\cos x = 0$.

W równaniu $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$ podstawiamy $t = \cos x$ i otrzymujemy równanie kwadratowe: $2t^2 - 3t - 2 = 0$.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$\Delta = 25$

$t = 2$ lub $t = -\frac{1}{2}$.

Stąd otrzymujemy alternatywę równań trygonometrycznych:

$\cos x = 2$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Równanie $\cos x = 2$ jest sprzeczne, gdyż zbiorem wartości funkcji cosinus jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$.

Rozwiązaniami równania $\cos x = -\frac{1}{2}$ są liczby:

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3

Obliczymy wartość $\cos x$, jeżeli $\sin x - 2\cos x = 1$.

Rozwiązanie

Stwórzmy układ równań, wykorzystując jedynkę trygonometryczną:

$$\begin{cases} \sin x - 2\cos x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania wyliczmy $\sin x$:

$\sin x = 1 + 2\cos x$

i podstawmy do jedynki trygonometrycznej

$(1 + 2\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$.

Stąd otrzymujemy:

$1 + 4\cos x + 4\cos^2 x + \cos^2 x = 1$

$5\cos^2 x + 4\cos x = 0$

$\cos x(5\cos x + 4) = 0$.

A zatem odpowiedź jest następująca: $\cos x = 0$ lub $\cos = -\frac{4}{5}$.

Przykład 4

Obliczymy wartość $\operatorname{tg} x$, jeżeli $12\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

Rozwiązanie

Zróbmy podstawienie: $t = \operatorname{tg} x$. Wówczas otrzymujemy równanie kwadratowe:

$12t^2 - 5t - 3 = 0$.

Rozwiążmy je:

$\Delta = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 12 = 169$

$t = -\frac{1}{3}$ lub $t = \frac{3}{4}$.

Stąd otrzymujemy odpowiedź: $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$ lub $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$.

W ostatnim przykładzie zaprezentujemy metodę doprowadzenia równania trygonometrycznego do postaci równania kwadratowego. Doprowadzenie do postaci równania kwadratowego jest najtrudniejszym elementem tego zadania.

Przykład 5

Obliczymy wartość $\operatorname{tg} x$, jeżeli wiadomo, że $2\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x = 0$.

Rozwiązanie

Rozważmy przypadek, gdy $\cos x = 0$. Wówczas równanie ma postać: $\sin^2 x = 0$, czyli $\sin x = 0$.

Zauważmy, że funkcje $y = \sin x$ i $y = \cos x$ nie mogą jednocześnie przyjmować wartości 0. Czyli liczby x, dla których $\cos x = 0$, nie spełniają równania.

Zatem równanie $2\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x = 0$ możemy podzielić stronami przez $\cos^2 x$. Otrzymujemy wówczas równanie:

$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$.

Podstawmy: $t = \operatorname{tg} x$.

Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$t^2 - 3t + 2 = 0$.

Obliczamy, że $\Delta = 1$.

Rozwiązaniami równania $t^2 - 3t + 2 = 0$ są

> $t = 2$ lub $t = 1$.
>
> Wracając do podstawienia $t = \operatorname{tg} x$, dostajemy odpowiedź:
>
> $\operatorname{tg} x = 1$ lub $\operatorname{tg} x = 2$.

Opisaną w powyższym przykładzie metodę możemy próbować stosować wtedy, gdy występują dwie funkcje: sinus i cosinus oraz każde wyrażenie przy dzieleniu przez potęgę $\cos x$ jako nową zmienną może dać $\operatorname{tg} x$.

Słownik

> **jedynka trygonometryczna**
>
> tożsamość trygonometryczna: dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę edukacyjną, następnie wykonaj polecenia.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DKerlRXOT

Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ równanie

$$\cos^2 x + 4\cos x + a = 0$$

ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych?

Polecenie 3

Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ równanie

$$\operatorname{tg}^2 x + 2(a+2)\operatorname{tg} x - 3a - 2 = 0$$

ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ równanie $\operatorname{tg}^2 x + a \operatorname{tg} x - a - 1 = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Ćwiczenie 8

Oblicz wartość $\operatorname{tg} x$, jeżeli wiadomo, że $6 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równania trygonometryczne prowadzące do rozwiązywania równań kwadratowych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń:

6. rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \leq 1$.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprowadza równania trygonometryczne do postaci równania kwadratowego,
- wykorzystuje podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania bardziej skomplikowanych równań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;

- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Równania trygonometryczne prowadzące do rozwiązywania równań kwadratowych” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Równania trygonometryczne prowadzące do rozwiązywania równań kwadratowych”.