Środek odcinka

Źródło: Gilberto Olimpio, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji zajmiemy się wyznaczaniem współrzędnych środka odcinka w zależności od współrzędnych jego końców. Umiejętność ta jest bardzo przydatna w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej, ponieważ wiele własności figur dotyczy właśnie punktów będących na przykład środkami boków wielokątów.

Twoje cele

- Wyznaczysz współrzędne środka odcinka o danych końcach.
- Wykorzystasz wzory na współrzędne środka odcinka do rozwiązywania zadań z parametrem.
- Zastosujesz wzory na współrzędne środka odcinka do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

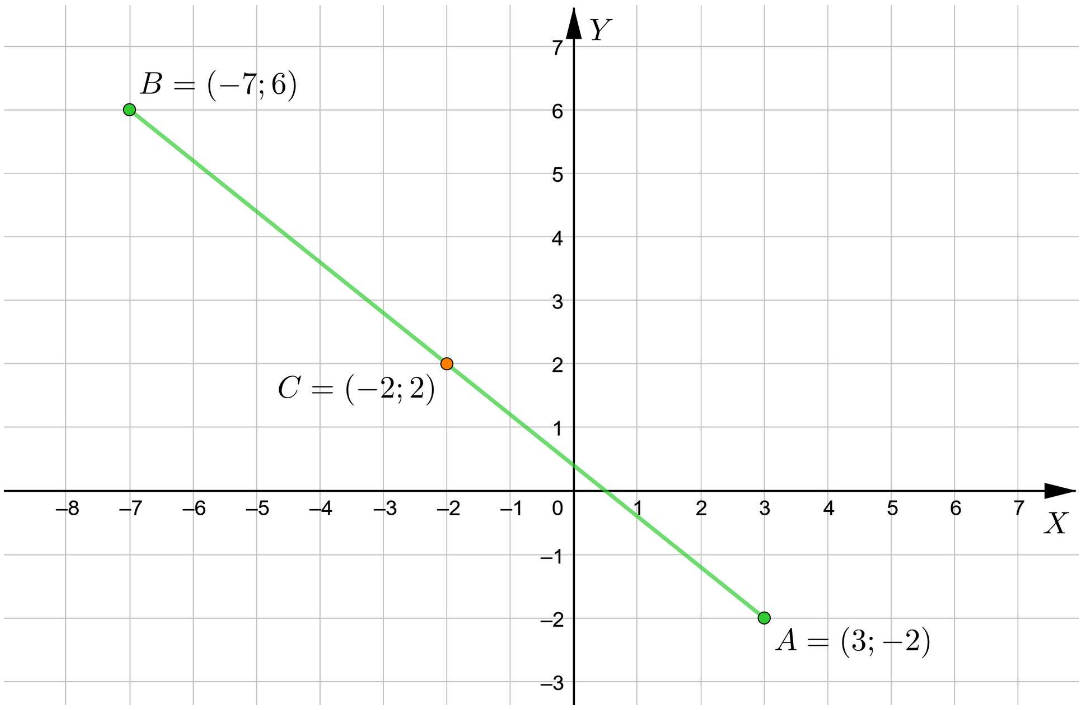
Przeczytaj

Podamy najpierw, w jaki sposób współrzędne środka odcinka zależą od współrzędnych końców tego odcinka, a następnie podamy uzasadnienie tej zależności:

Współrzędne środka odcinka są równe średnim arytmetycznym współrzędnych jego końców, czyli dla odcinka AB o końcach $A = (x_A; y_A)$ i $B = (x_B; y_B)$ współrzędne jego środka S są równe $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Przykład 1

Środek S odcinka o końcach $A = (3; -2)$ i $B = (-7; 6)$ ma współrzędne $S = \left(\frac{3 + (-7)}{2}; \frac{-2 + 6}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}; \frac{4}{2}\right) = (-2; 2)$.



Przykład 2

Dany jest punkt $A = (-4; 5)$ i środek S odcinka AB o współrzędnych $S = (2; 3)$. Wyznaczymy współrzędne punktu B.

Oznaczmy współrzędne punktu B przez $(x_B; y_B)$.

Ponieważ współrzędne środka odcinka są równe średnim arytmetycznym współrzędnych jego końców, otrzymujemy równania

$\frac{-4 + x_B}{2} = 2$ i $\frac{5 + y_B}{2} = 3$.

Stąd odpowiednio $-4 + x_B = 4$ i $5 + y_B = 6$.

Zatem punkt B ma współrzędne $(8; 1)$.

Przykład 3

Wyznaczymy teraz wartości parametrów m i n, dla których środkiem odcinka o końcach $A = (m + 2; 5)$ i $B = (3; 3n)$ jest punkt o współrzędnych $(5; 4)$.

Ponieważ współrzędne środka odcinka są równe średnim arytmetycznym współrzędnych końców, otrzymujemy równania

$\frac{m+2+3}{2} = 5$ i $\frac{5+3n}{2} = 4$.

Zatem $m = 5$ i $n = 1$, czyli $A = (7; 5)$ i $B = (3; 3)$.

Wektorowe uzasadnienie wzorów na współrzędne środka odcinka.

Najłatwiejszy dowód wspomnianej powyżej zależności wykorzystuje pojęcie i własności wektorów.

Rozważmy punkty $A = (x_A; y_A)$ i $B = (x_B; y_B)$. Jeśli $S = (x_S; y_S)$ jest środkiem odcinka AB, to $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$, zatem $[x_S - x_A; y_S - y_A] = [x_B - x_S; y_B - y_S]$.

Korzystając z kryterium równości wektorów otrzymujemy równania $x_S - x_A = x_B - x_S$ oraz $y_S - y_A = y_B - y_S$.

Po prostych przekształceniach okazuje się, że $x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$ i $y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Niewektorowe uzasadnienie wzorów na współrzędne środka odcinka.

Rozważmy punkty $A = (x_A; y_A)$ i $B = (x_B; y_B)$. Pokażemy, że punkt $S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ leży na prostej wyznaczonej przez punkty A i B oraz, że odległość punktu B od punktu A jest równa odległości punktu S od punktu B.

Równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B to
$(x - x_A)(y_A - y_B) = (y - y_A)(x_A - x_B)$.

Aby sprawdzić, czy punkt S leży na prostej AB, podstawimy najpierw za x w równaniu prostej pierwszą współrzędną punktu S.

Lewa strona równania przyjmuje postać:

$\left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_A\right)(y_A - y_B) = \left(\frac{-x_A + x_B}{2}\right)(y_A - y_B) = -\frac{1}{2}(x_A - x_B)(y_A - y_B)$.

Teraz za y podstawimy $\frac{y_A + y_B}{2}$.

Prawa strona równania przyjmuje postać:

$(y - y_A)(x_A - x_B) = \left(\frac{y_A + y_B}{2} - y_A\right)(x_A - x_B) = \left(\frac{-y_A + y_B}{2}\right)(x_A - x_B) =$

$= -\frac{1}{2}(y_A - y_B)(x_A - x_B)$.

Ponieważ obie strony równości są równe, punkt S leży na prostej AB.

Obliczmy długości odcinków $|AS|$ i $|BS|$:

$|AS| = \sqrt{(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_A\right)^2 + \left(\frac{y_A + y_B}{2} - y_A\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{-x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{-y_A + y_B}{2}\right)^2}$,

$|BS| = \sqrt{(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_B\right)^2 + \left(\frac{y_A + y_B}{2} - y_B\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A - y_B}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{-x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(-\frac{-y_A + y_B}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{-x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{-y_A + y_B}{2}\right)^2}$.

Widzimy, że długości odcinków AS i BS są równe i punkt S leży na prostej AB, zatem punkt S jest środkiem odcinka AB.

Przykład 4

Wyznaczymy równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-4; 2)$ i $B = (3; -1)$.

Skorzystamy z faktu, że symetralna odcinka AB jest do niego prostopadła i przechodzi przez jego środek.

Środek S odcinka AB ma współrzędne $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B to $\frac{-1-2}{3-(-4)} = \frac{-3}{7}$, zatem współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka AB jest równy $\frac{7}{3}$.

Szukane równanie symetralnej ma postać $y = \frac{7}{3}x + b$.

Po podstawieniu do niego współrzędnych punktu S otrzymujemy równanie: $\frac{1}{2} = \frac{7}{3} \cdot \frac{-1}{2} + b$, zatem $b = \frac{5}{3}$.

Równanie symetralnej odcinka AB to $y = \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}$.

Słownik

współrzędne środka odcinka

współrzędne środka odcinka są równe średnim arytmetycznym odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka; współrzędne środka odcinka o końcach $A=(x_A;y_A), B=(x_B;y_B)$ są równe $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

symetralna odcinka

prosta prostopadła do odcinka przechodząca przez jego środek

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj, w jaki sposób można wyznaczyć środek odcinka w układzie współrzędnych.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DHXoyiuQ3

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego środka odcinka w układzie współrzędnych.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Środek odcinka

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Wyznaczysz współrzędne środka odcinka o danych końcach.
- Wykorzystasz wzory na współrzędne środka odcinka do rozwiązywania zadań z parametrem.
- Zastosujesz wzory na współrzędne środka odcinka do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja” - „Przeanalizuj, w jaki sposób można wyznaczyć środek odcinka w układzie współrzędnych.” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Środek odcinka” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli). Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Środek odcinka”).

Materiały pomocnicze:

Długość odcinka. Środek odcinka

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Środek odcinka”.