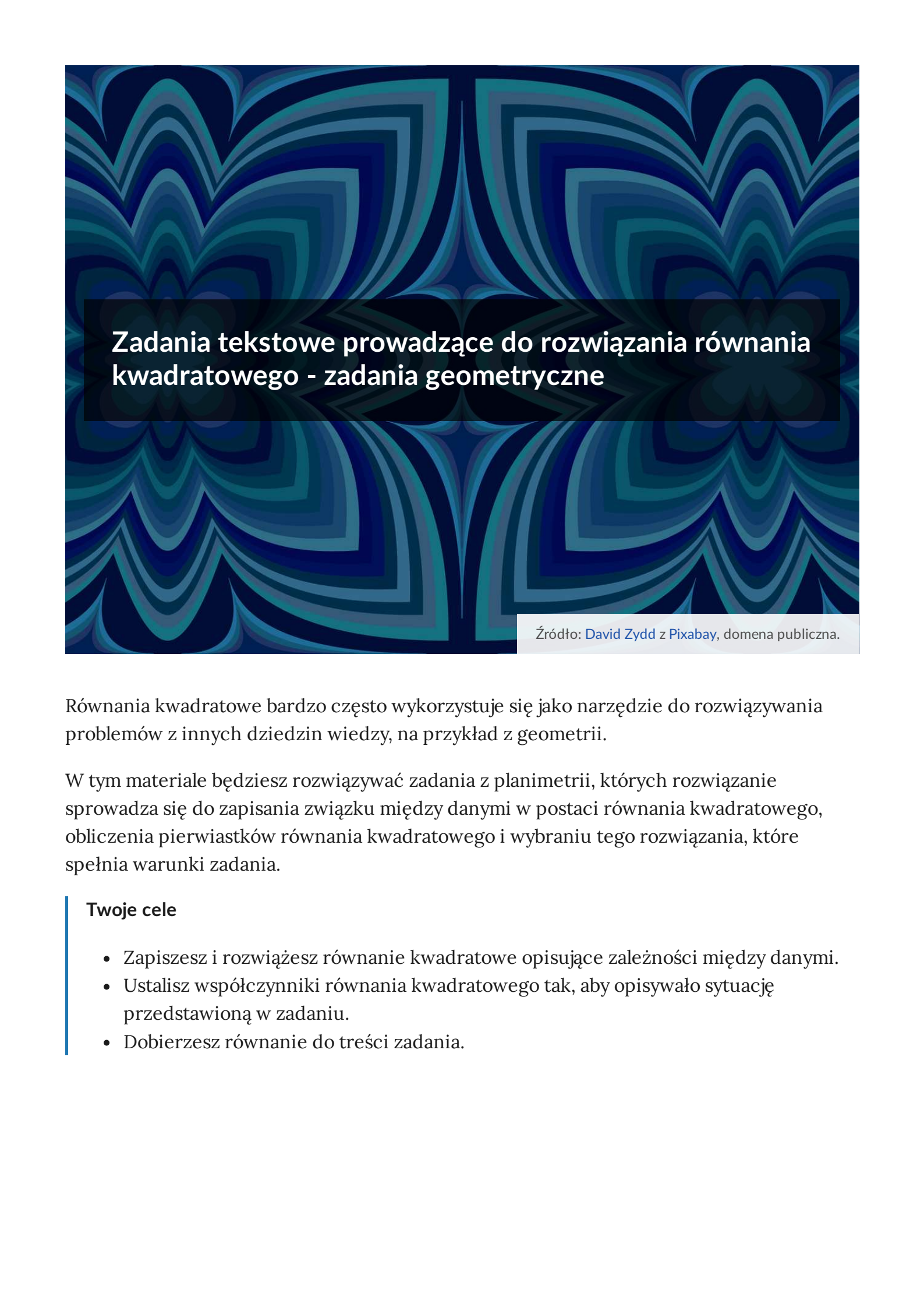




Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania kwadratowego - zadania geometryczne

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania kwadratowego - zadania geometryczne

Źródło: [David Zydd](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Równania kwadratowe bardzo często wykorzystuje się jako narzędzie do rozwiązywania problemów z innych dziedzin wiedzy, na przykład z geometrii.

W tym materiale będziesz rozwiązywać zadania z planimetrii, których rozwiązanie sprowadza się do zapisania związku między danymi w postaci równania kwadratowego, obliczenia pierwiastków równania kwadratowego i wybraniu tego rozwiązania, które spełnia warunki zadania.

Twoje cele

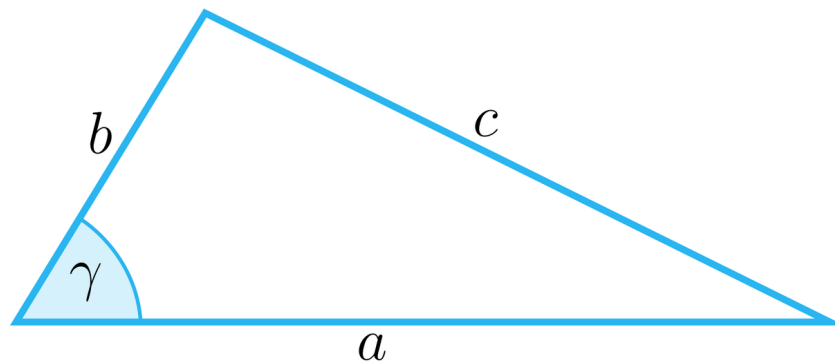
- Zapiszesz i rozwiążesz równanie kwadratowe opisujące zależności między danymi.
- Ustalisz współczynniki równania kwadratowego tak, aby opisywało sytuację przedstawioną w zadaniu.
- Dobierzesz równanie do treści zadania.

Przeczytaj

W rozwiązywaniu zadań geometrycznych będziemy korzystać z kilku twierdzeń i własności, które ułatwią nam rozwiązanie zadań. Oto najważniejsze z nich.

Twierdzenie: Twierdzenie cosinusów

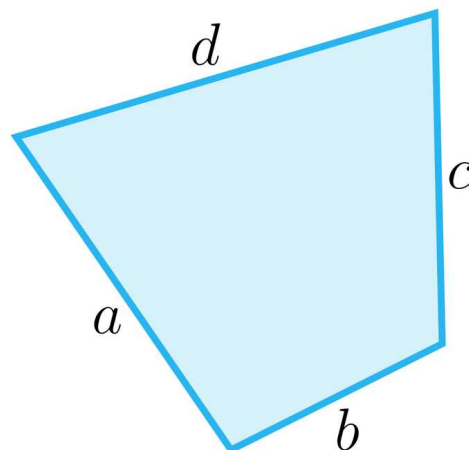
W dowolnym trójkącie, kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Własność: Czworokąt opisany na okręgu

W czworokącie opisanym na okręgu sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.



$$a + c = b + d$$

Przykład 1

W czworokąt $ABCD$ wpisano koło, którego pole jest równe $121\pi \text{ cm}^2$. Obliczmy pole czworokąta $ABCD$, jeżeli wiadomo, że $|AB| + |CD| = 100 \text{ cm}$.

Korzystając ze wzoru na pole koła, obliczmy długość promienia.

$$P_k = \pi r^2$$

$$\pi r^2 = 121\pi \quad | : \pi$$

$$r^2 = 121$$

$$r^2 - 121 = 0$$

$$(r - 11)(r + 11) = 0$$

$r = 11$ lub $r = -11$ – nie spełnia warunków zadania bo $r > 0$

Aby na kole można było opisać czworokąt $ABCD$, musi zachodzić warunek:

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|.$$

Czyli $|AB| + |CD|$ jest połową obwodu czworokąta $ABCD$.

$$\frac{1}{2}L = 100$$

Korzystając ze wzoru na pole czworokąta opisanego na okręgu, możemy obliczyć pole czworokąta $ABCD$.

$$P = \frac{1}{2}L \cdot r$$

$$P = 100 \cdot 11$$

$$P = 1100$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe 1100 cm^2 .

Przykład 2

W trójkącie ABC dane są $|AC| = 3$, $|BC| = 12$, $\sphericalangle CAB = 60^\circ$. Obliczmy długość boku $|AB|$.

Korzystając z [twierdzenia cosinusów](#) wyznaczmy długość boku $x = |AB|$.

$$12^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$$

$$144 = 9 + x^2 - 6x \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 3x - 135 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (-135) = 9 + 540 = 549 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{549} = 3\sqrt{61}$$

$$x_1 = \frac{3-3\sqrt{61}}{2} < 0$$

$$x_2 = \frac{3+3\sqrt{61}}{2}$$

Długość boku $|AB|$ jest równa $\frac{3+3\sqrt{61}}{2}$.

Przykład 3

Odcinek AB o długości 1 podzielono na dwie części tak, że stosunek dłuższej części tego odcinka do krótszej części jest równy stosunkowi długości całego odcinka do dłuższej części odcinka. Obliczmy długość każdej części odcinka.



Z treści zadania możemy zapisać proporcję:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$$

Z własności proporcji otrzymujemy:

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ - nie spełnia warunków zadania, bo } x > 0$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$|AC| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$|CB| = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2-\sqrt{5}+1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Odcinek podzielono na części o długości $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Przykład 4

Pole prostokąta jest równe 63 cm^2 . Obliczymy obwód tego prostokąta jeżeli wiadomo, że długości boków tego prostokąta różnią się o 2 cm .

Niech:

x – pierwszy bok prostokąta,

$x + 2$ – drugi bok prostokąta.

Zapiszemy równanie opisujące pole prostokąta:

$$x(x + 2) = 63$$

$$x^2 + 2x - 63 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-63) = 4 + 252 = 256 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 16$$

$$x_1 = \frac{-2-16}{2}$$

$$x_2 = -9 < 0 \text{ – nie spełnia warunków zadania, bo } x > 0$$

$$x_2 = \frac{-2+16}{2}$$

$$x_2 = 7$$

Boki prostokąta mają długość 7 cm i 9 cm .

Przykład 5

Różnica długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnych jest równa 7 , a przeciwprostokątna jest o 8 dłuższa od krótszej przyprostokątnej. Obliczymy długości boków tego trójkąta.

Niech:

x – długość krótszej przyprostokątnej,

$x + 7$ – długość dłuższej przyprostokątnej,

$x + 8$ – długość przeciwprostokątnej.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{2-8}{2} = -3 < 0$$

$$x_2 = \frac{2+8}{2} = 5$$

$$x_2 + 7 = 12$$

$$x_2 + 8 = 13$$

Trójkąt ma boki długości 5, 12, 13.

Słownik

twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie, kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją i przeanalizuj sposoby rozwiązywania zadań geometrycznych prowadzących do rozwiązania równania kwadratowego.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DSTmXu4s3>

MAT267 - Równania kwadratowe w zadaniach z geometrii.mp4

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący równań kwadratowych w zadaniach z geometrii.

Polecenie 2

Zaznacz poprawną odpowiedź. Odcinek $|AB| = 2$ podzielona na dwie części tak, że stosunek dłuższej części x tego odcinka do krótszej części jest równy stosunkowi długości odcinka $|AB|$ do dłuższej części tego odcinka. Oblicz długość krótszej części odcinka AB .

☐ $-1 - \sqrt{5}$

☐ $\sqrt{5} - 1$

☐ $\sqrt{5} - 3$

☐ $3 - \sqrt{5}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz pole czworokąta $ABCD$, w który wpisano koło o polu $100\pi \text{ cm}^2$, jeżeli wiadomo, że $|AD| + |BC| = 48 \text{ cm}$. Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

$$P_{ABCD} = \boxed{} \text{ cm}^2.$$

Ćwiczenie 2



Wybierz poprawne równania. W trójkącie ABC dane są $|AC| = 5$, $|BC| = 10$, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Jeżeli x oznacza długość boku AB to:

☐ $10^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$

☐ $x^2 - 10x + 75 = 0$

☐ $x^2 - 10x - 75 = 0$

☐ $x^2 - 5x - 75 = 0$

☐ $5^2 = x^2 + 10^2 - 2 \cdot x \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Prostokątny trawnik ma powierzchnię 285 m^2 . Oblicz wymiary trawnika, jeżeli wiadomo, że różnią się o 4 m.

☐ $14 \text{ m} \times 18 \text{ m}$

☐ $12 \text{ m} \times 16 \text{ m}$

☐ $15 \text{ m} \times 19 \text{ m}$

☐ $13 \text{ m} \times 17 \text{ m}$

Ćwiczenie 4



Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę. Oblicz obwód prostokąta o polu równym 40 centymetrów kwadratowych, jeżeli jego boki różnią się o 3 cm.

$L =$ cm

24

28

26

Ćwiczenie 5



Połącz w pary. Oblicz długości boków i pole trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątna jest dłuższa od jednej z przyprostokątnych o 2, a od drugiej o 16.

dłuższa przyprostokątna

120

pole trójkąta

24

przeciwprostokątna

10

krótsza przyprostokątna

26

Ćwiczenie 6



Zaznacz poprawną odpowiedź. Oblicz obwód i pole trójkąta prostokątnego, jeżeli długości boków tego trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi:

☐ $L = 12, P = 6$

☐ $L = 15, P = 6$

☐ $L = 15, P = 12$

☐ $L = 12, P = 12$

Ćwiczenie 7



Czy istnieje prostokąt, którego obwód jest równy 24, a pole 40?

Ćwiczenie 8



Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątna ma długość 25 cm, a promień r okręgu wpisanego w trójkąt jest równy 3 cm.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania równania kwadratowego – zadania geometryczne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje i rozwiązuje równanie kwadratowe opisujące zależności między danymi
- ustala współczynniki równania kwadratowego tak, aby równanie opisywało sytuację przedstawioną w zadaniu
- dobiera równanie do treści zadania
- analizuje podane warunki i buduje na ich podstawie odpowiednie równanie

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku

- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrany przez nauczyciela uczeń przypomina definicję równania kwadratowego i podaje przykłady opisu równania za pomocą metody słownej, a uczniowie zapisują odpowiednie równanie.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują wyniki. Tworzą wspólny plakat ilustrujący sposoby rozwiązywania zadań.
3. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące metod i analizy zadań geometrycznych, prowadzących do rozwiązywania równań kwadratowych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Omawia ewentualne problemy, które powstały podczas rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.

Praca domowa:

Uczniowie dobierają się w pary i tworzą dla drugiej osoby zadania analogiczne do zadań 6 i 7 z części „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Polecenia pod animacją można wykorzystać jako samodzielną pracę w domu.

Animację można wykorzystać na zajęciach z zakresu podobieństwa figur płaskich.