



Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

An abstract image featuring concentric circles in shades of purple, pink, and blue, resembling a ripple effect or a stylized eye. A small, detailed bubble is visible in the upper right quadrant.

Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt

Źródło: Anni Roenkae, dostępny w internecie: <https://pexels.com/>.

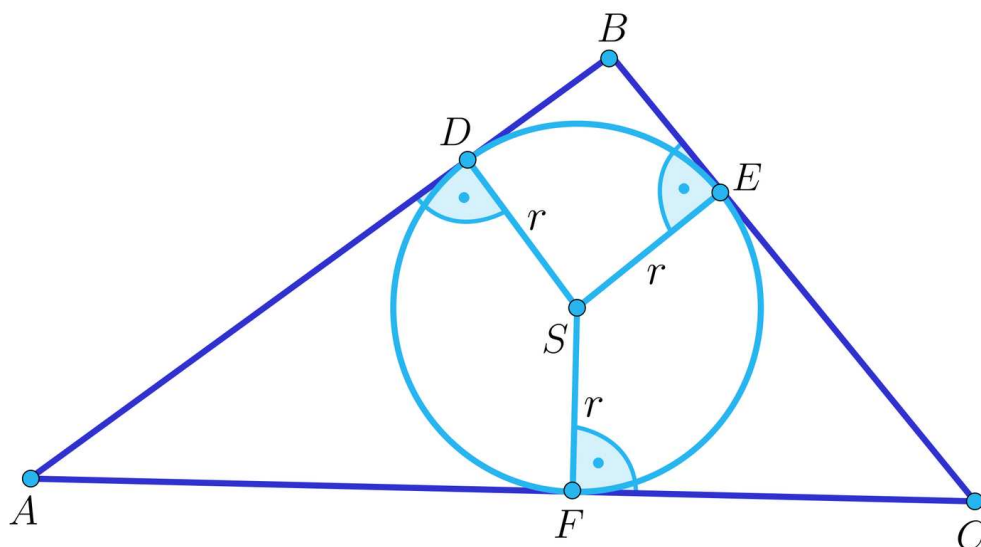
Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest równoodległy od ramion tego trójkąta. Odległość tego środka od ramion trójkąta jest długością promienia okręgu wpisanego w trójkąt. Powstaje pytanie jak wyznaczyć tę odległość i jakie są związki tej odległości z innymi znanymi wielkościami jak: pole i obwód trójkąta, długość promienia okręgu opisanego na trójkącie, długości boków i kąty w trójkącie.

Twoje cele

- Wyznaczysz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt.
- Zastosujesz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Okręgiem wpisanym w trójkąt ABC nazywamy okrąg, który jest styczny do wszystkich boków tego trójkąta.

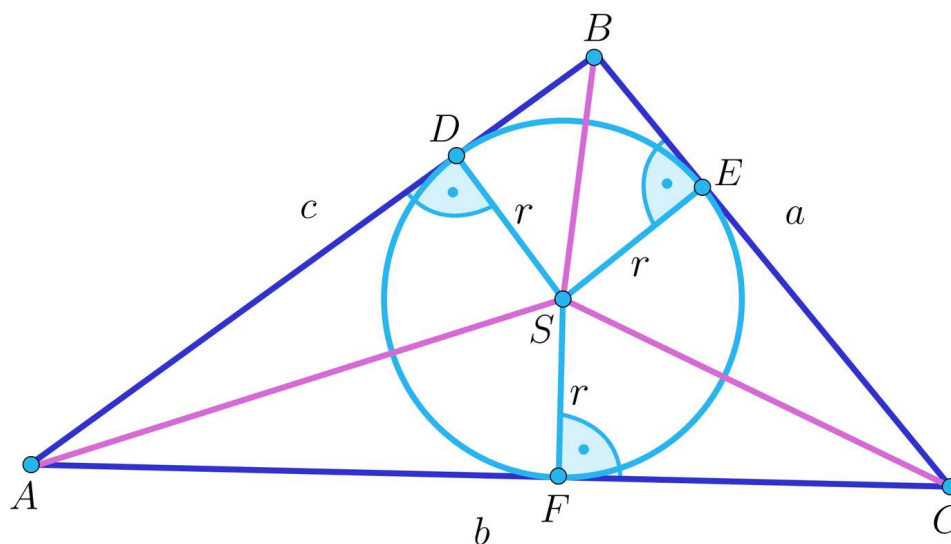


Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności z bokiem trójkąta jest prostopadły do tego boku.

Dla każdego trójkąta istnieje dokładnie jeden okrąg wpisany w ten trójkąt.

Środek **okręgu wpisanego w trójkąt** jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.

Twierdzenie: Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt



Promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a, b, c i polu P wynosi

$$r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{2P}{L}$$

gdzie L oznacza obwód trójkąta.

Dowód

$$P = P_{ASB} + P_{BSC} + P_{ASC}$$

Ponieważ promień jest prostopadły do boku trójkąta, to

$$P = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

$$2P = ar + br + cr = r(a + b + c)$$

$$\text{Stąd } r = \frac{2P}{a+b+c}.$$

Przykład 1

Wyznamy promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4, 5.

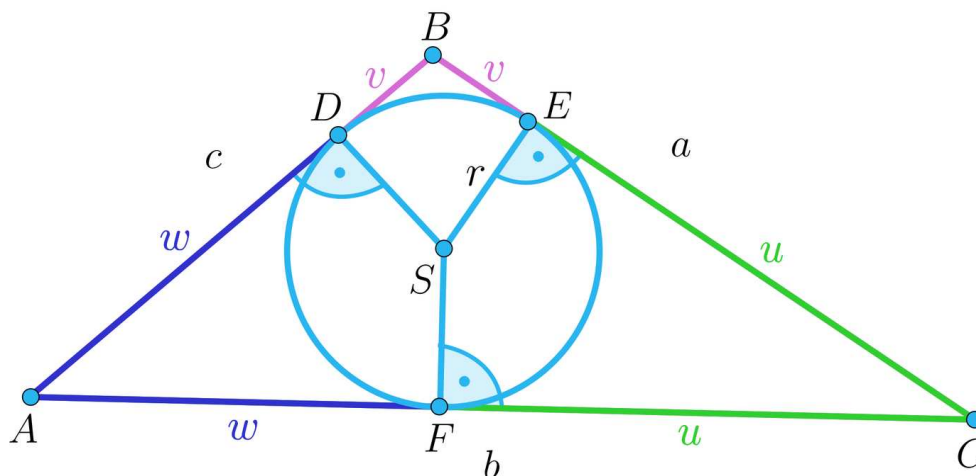
Rozwiązanie

$$\text{Pole trójkąta wynosi } P = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

$$\text{Stąd } r = \frac{2 \cdot 6}{3+4+5} = \frac{12}{12} = 1.$$

Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt można wyznaczyć przy danych niektórych długościach boków lub miarach kątów. Posłużyć mogą do tego twierdzenia, które pozwalają wyznaczyć pole lub obwód trójkąta.

Własność punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt



Niech D, E, F będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt z bokami tego trójkąta. Wtedy przy oznaczeniach z rysunku zachodzą równości:

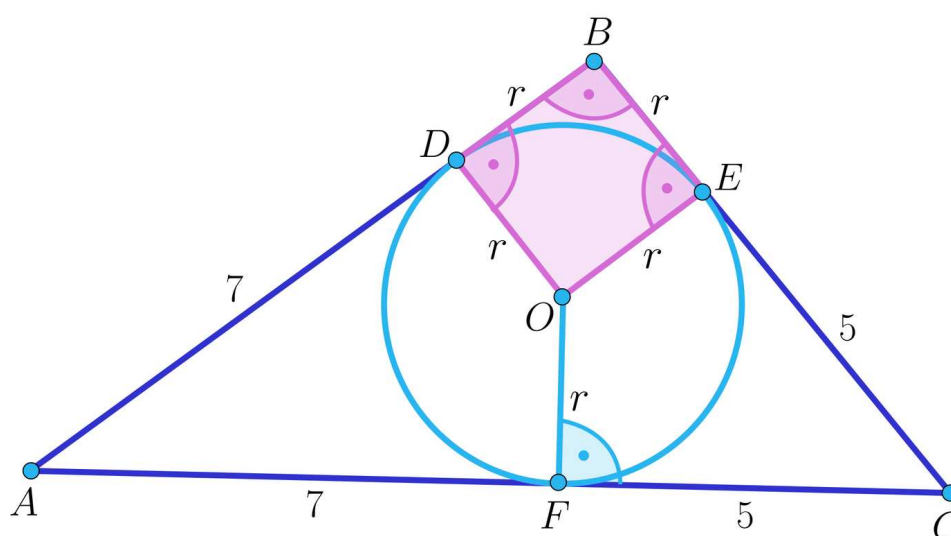
$$|AD| = |AF| = w, |BD| = |BE| = v, |CE| = |CF| = u$$

Przykład 2

Wyznamy promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny ACB , w którym punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną jest odległy od C o 5 i od A o 7.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ trójkąt jest prostokątny, to czworokąt $DOEB$ jest kwadratem o boku r . Z własności punktów styczności wynika, że $|AC| = 7 + 5 = 12$, $|BC| = 5 + r$, $|AB| = 7 + r$.

Długość promienia r możemy wyznaczyć na dwa sposoby.

Sposób 1

Z twierdzenia Pitagorasa $(5 + r)^2 + (7 + r)^2 = 12^2$.

$$25 + 10r + r^2 + 49 + 14r + r^2 = 144$$

$$2r^2 + 24r - 70 = 0$$

$$r^2 + 12r - 35 = 0$$

$$\Delta = 144 + 140 = 284$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{71}$$

$$r_1 = \frac{-12-2\sqrt{71}}{2} < 0, r_2 = \frac{-12+2\sqrt{71}}{2} = \sqrt{71} - 6$$

Zatem $r = \sqrt{71} - 6$.

Sposób 2

Korzystamy ze wzoru na długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

$$r = \frac{2P}{L} = \frac{(5+r)(7+r)}{24+2r}$$

$$r(24 + 2r) = (5 + r)(7 + r)$$

$$2r^2 + 24r = r^2 + 12r + 35$$

$$r^2 + 12r - 35 = 0$$

Otrzymaliśmy to samo równanie co wyżej, więc $r = \sqrt{71} - 6$.

Wzory na pole trójkąta

1. $P = \frac{1}{2}ah$, gdzie a jest bokiem trójkąta, a h jest wysokością opuszczoną na ten bok.
2. Wzór Herona: $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie a, b, c są bokami trójkąta, a p jest połową obwodu.
3. $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, gdzie a, b są bokami trójkąta, a γ jest kątem pomiędzy tymi bokami.
4. $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie a, b, c są bokami trójkąta, a R jest promieniem [okręgu opisanego na trójkącie](#).
5. $P = pr$, gdzie p oznacza połowę obwodu trójkąta, a r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Warto zauważyć, że wzór 5. jest prostym przekształceniem wzoru na długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

Przykład 3

Pokażemy, że promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a, b, c , wynosi

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \text{ gdzie } p \text{ jest połową obwodu tego trójkąta.}$$

Rozwiązanie

Ze wzoru Herona mamy $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Stąd

$$r = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b+c} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Przykład 4

Wyznamy promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach długości 5, 6, 7.

Rozwiązanie

$$p = \frac{5+6+7}{2} = \frac{18}{2} = 9, \text{ więc } r = \sqrt{\frac{(9-5)(9-6)(9-7)}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Przykład 5

Wyznamy promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach długości 5, 6 i kącie między nimi 120° .

Rozwiązanie

$$\text{Wyznamy pole trójkąta } P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Wyznamy trzeci bok trójkąta z [twierdzenia cosinusów](#)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos 120^\circ = 25 + 36 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 91$$

$$c = \sqrt{91}.$$

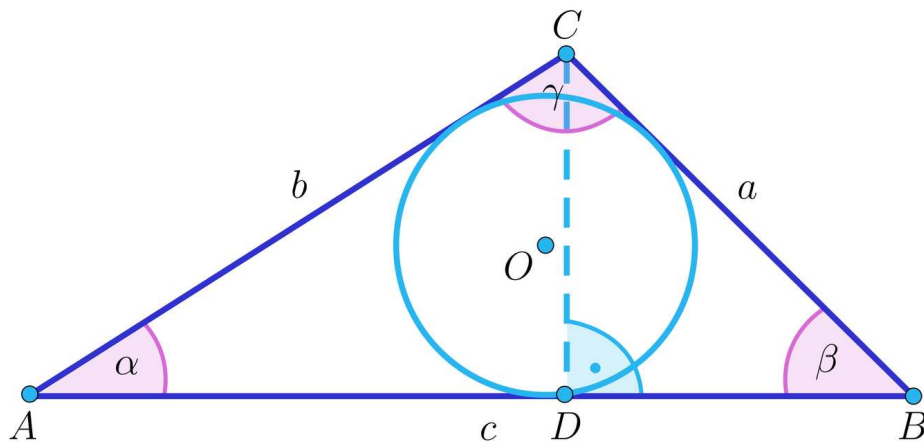
$$\text{Stąd } r = \frac{2 \frac{15\sqrt{3}}{2}}{5+6+\sqrt{91}} = \frac{15\sqrt{3}}{11+\sqrt{91}} = \frac{15\sqrt{3}(11-\sqrt{91})}{121-91} = \frac{11\sqrt{3}-\sqrt{273}}{2}.$$

Przykład 6

Wyznamy promień okręgu wpisanego w trójkąt taki, jak na rysunku, o kątach $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ i boku $b = 6$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Poprowadźmy wysokość $h = |CD|$ w trójkącie ABC . Jeżeli $\alpha = 30^\circ$, to trójkąt ADC jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej $b = 6$ i kątach ostrych 30° i 60° .

Wtedy $h = \frac{b}{2} = 3$ oraz $|AD| = 3\sqrt{3}$.

Jeżeli $\beta = 45^\circ$, to trójkąt BDC jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnej h i kącie ostrym 45° . Stąd $a = 3\sqrt{2}$ oraz $|DB| = 3$.

Zatem obwód trójkąta ABC wynosi $a + b + c = 3\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{3} + 3 = 9 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

a pole tego trójkąta $P = \frac{h \cdot c}{2} = \frac{3(3+3\sqrt{3})}{2} = \frac{9(1+\sqrt{3})}{2}$.

Ostatecznie, promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość

$$r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{9(1+\sqrt{3})}{9+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Przykład 7

Wyznamy długość boku trójkąta równobocznego znając długość r promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Rozwiązanie

Pole trójkąta równobocznego o boku a wynosi $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3ra}{2}$. Z równości wynika, że $a\sqrt{3} = 6r$.

Stąd $a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}$.

Przykład 8

Wyznamy stosunek pola koła wpisanego w trójkąt do pola trójkąta i obliczymy ten stosunek dla trójkąta o bokach 6, 8, 10

Rozwiązanie

$r = \frac{2P}{a+b+c}$, więc pole koła wpisanego w trójkąt wynosi $\pi r^2 = \frac{4P^2\pi}{(a+b+c)^2}$.

Stąd stosunek pola koła wpisanego w trójkąt do pola trójkąta wynosi $\frac{4P^2\pi}{P(a+b+c)^2} = \frac{4P\pi}{(a+b+c)^2}$.

Trójkąt o bokach 6, 8, 10 jest trójkątem prostokątnym. Jego pole jest równe $P = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$, a obwód jest równy $a + b + c = 6 + 8 + 10 = 24$.

Stąd stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola trójkąta wynosi $\frac{4P\pi}{(a+b+c)^2} = \frac{4 \cdot 24\pi}{24^2} = \frac{\pi}{6}$.

Słownik

okrąg wpisany w trójkąt

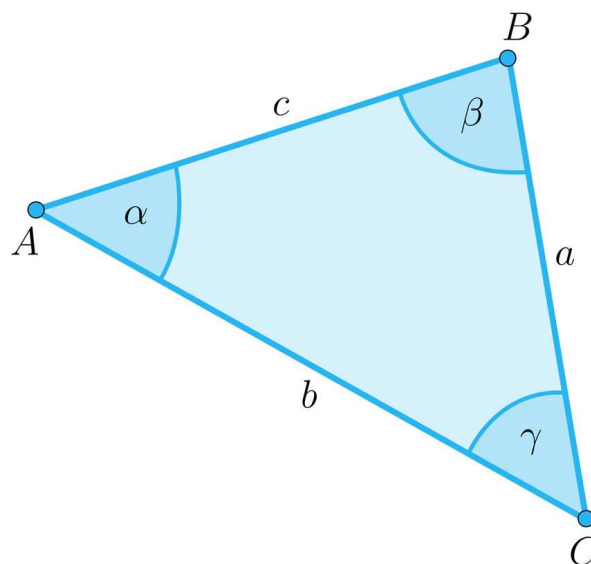
okrąg, który jest styczny do wszystkich boków trójkąta

okrąg opisany na trójkącie

okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki trójkąta

twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie ABC , przy oznaczeniach z rysunku, zachodzi równość:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami pokazującymi obliczanie długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt, a następnie wykonaj polecenia poniżej.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D13JciHLN>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

Polecenie 2

Zaznacz poprawną odpowiedź.

Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 6 wynosi

☐ $6\sqrt{3}$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

☐ 18

☐ $\sqrt{3}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnił pola odpowiednimi liczbami.

W trójkącie równobocznym pole koła wpisanego w ten trójkąt stanowi w przybliżeniu

% pola tego trójkąta.

W trójkącie równoramiennym, w którym podstawa stanowi 1,5 długości ramienia, pole koła wpisanego w ten trójkąt stanowi w przybliżeniu % pola tego trójkąta.

W trójkącie prostokątnym o bokach $3a$, $4a$, $5a$ pole koła wpisanego w ten trójkąt stanowi w przybliżeniu % pola tego trójkąta.

Ćwiczenie 2



Spośród podanych wyrazów i wyrażeń algebraicznych wybierz odpowiednie i wstaw w odpowiednie pola.

Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu tego trójkąta.

Długość promienia takiego okręgu dla dowolnego trójkąta możemy obliczyć ze wzoru

. Jeśli trójkąt jest prostokątny posługujemy się uproszczonym wzorem .

Natomiast jeżeli trójkąt jest równoboczny to promień okręgu możemy opisać uproszczonym wzorem .

$$\frac{a+b-c}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{2P}{a+b+c}$$

dwusiecznych

Ćwiczenie 3



Odpowiedz na pytania: Tak/Nie. Zaznacz poprawną odpowiedź.

Pytanie	Tak	Nie
Czy w każdy trójkąt da się wpisać okrąg?	☐	☐
Czy okrąg o promieniu $r = 1$ można wpisać w trójkąt o polu równym $P = 6$ oraz obwodzie równym 12?	☐	☐
Czy w trójkąt prostokątny o bokach 9, 12, 15 da się wpisać okrąg o promieniu $r = 4$?	☐	☐
Czy w trójkąt równoboczny o wysokości $h = \frac{3}{2}$ da się wpisać okrąg o średnicy $l = 1$?	☐	☐

Ćwiczenie 4



Janusz i Agata mają działkę w kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego o ramionach długości 10 metrów. Chcieliby na tej działce umieścić okrągły basen. Jaką maksymalną długość może mieć promień tego basenu? Odpowiedź podaj w centymetrach.

Ćwiczenie 5



W trójkąt równoramienny o obwodzie równym 28 wpisano okrąg, którego promień stanowi $\frac{2}{7}$ długości wysokości poprowadzonej do podstawy trójkąta. Oblicz długości boków trójkąta.

Ćwiczenie 6



W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB miara kąta ACB jest równa 2α . Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość r . Wyznacz długości boków trójkąta ABC .

Ćwiczenie 7



Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka B ma długość 4. Spodek tej wysokości dzieli bok AC na odcinki długości 3 i 6. Wyznacz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

Ćwiczenie 8



W trójkącie ABC najdłuższy bok AB ma długość 29 cm. Punkty styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt dzielą bok AC w stosunku 5 : 4, a bok BC w stosunku 7 : 6 tak, jak na rysunku. Wyznacz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt o znanych długościach boków, uzasadnia stosowany wzór;
- wykorzystuje różne wzory na pole trójkąta w celu wyznaczenia długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt;

- stosuje twierdzenie cosinusów do wyznaczenia długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt;
- stosuje twierdzenie o odcinkach stycznych;
- wykorzystuje własności okręgu wpisanego w trójkąt w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm;

Metody i techniki nauczania:

- praca z tekstem
- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel przedstawia temat lekcji, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
- Nauczyciel przedstawia okrąg wpisany w trójkąt, jego własności. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają wzory na wyznaczanie pola trójkąta.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się ze sposobem wyprowadzenia i uzasadnienia wzoru na długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt o znanych długościach boków.
2. Praca w małych grupach z tekstem zawartym w sekcji Przeczytaj – wykorzystanie różnych wzorów na pole trójkąta oraz twierdzenia cosinusów w celu wyznaczenia długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt.
3. Uczniowie w grupach układają zadania na wykorzystanie długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt do wyznaczania pola i długości boków w trójkącie. Grupy

wymieniają się zadaniami i rozwiązują je.

4. Uczniowie w parach zapoznają się z animacją, utrwalając wiadomości.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne sprawdzając nabyte umiejętności i wiedzę w ramach ćwiczeń sprawdzających.

Praca domowa:

- Zadaniem uczniów jest zmierzenie w domu promienia największego okrągłego talerza/półmiska i określenie czy ten talerz ustawiony poziomo zmieści się w szafce o podstawie w kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego o długościach przyprostokątnych 40 cm. Odpowiedź należy uzasadnić.

Materiały pomocnicze:

- [Okrąg wpisany w trójkąt](#)
- [Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może zostać wykorzystana przez uczniów

- podczas przygotowywania się do zajęć;
- do utrwalania wiedzy;
- jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.

Animacja również może być wykorzystana przez nauczyciela na lekcji „Wykorzystanie własności trójkątów w dowodzeniu twierdzeń lub „Okręgi wpisane w wielokąty”.