



Wyrażenia wymierne. Równania wymierne

Przykłady na opisywanie zjawisk, wydarzeń za pomocą wyrażeń wymiernych.

Zapisywanie równania wymiernego. Przykłady rozwiązane równania wymiernego.

Przykłady rozwiązań równań wymiernych. Rozwiązywanie równań wymiernych dwoma metodami.

Rozwiązywanie równań wymiernych. Zasób zawiera zadania interaktywne.

Zadania na rozwiązywanie równań wymiernych. Zadania o zróżnicowanym stopniu trudności. Zasób zawiera zadania otwarte z rozwiązaniami i wyjaśnieniami i zamknięte interaktywne.

Rozwiązywanie równań wymiernych. Zadania o podwyższonym stopniu trudności. Zasób zawiera zadania otwarte z rozwiązaniami i wyjaśnieniami. Zadania na dowodzenie.

Wyrażenia wymierne. Równania wymierne

Wyrażenia wymierne

Rozważając zależności między różnymi wielkościami, mamy do czynienia również z takimi, w których występują wyrażenia wymierne. Na przykład wartość prędkości średniej obliczamy jako iloraz drogi i czasu w ruchu jednostajnym, w którym ta droga została przebyta.

Przykład 1

Miejscowości A i B są odległe o 154 km. W połowie drogi między nimi znajduje się miejscowość C . Rowerzysta przejechał drogę z A do C , przy czym wartość jego średniej prędkości na trasie z A do C była o $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ większa niż wartość średniej prędkości na trasie z C do B .

Przyjmując, że wartość średniej prędkości tego rowerzysty na trasie z C do B była równa $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$, wyrazimy za pomocą v wartość jego średniej prędkości na całej trasie z A do B .

Z warunków zadania wnioskujemy, że czas t_1 (w godzinach) przejazdu rowerzysty z A do C to

$$t_1 = \frac{77}{v+6}.$$

Natomiast czas t_2 (w godzinach) jego przejazdu z C do B to

$$t_2 = \frac{77}{v}.$$

Zatem średnia prędkość V tego rowerzysty na trasie z A do B jest równa

$$V = \frac{154}{\frac{77}{v+6} + \frac{77}{v}}.$$

Wyrażenie to przekształcamy następująco

$$\frac{154}{\frac{77}{v+6} + \frac{77}{v}} = \frac{154}{\frac{77v+77(v+6)}{(v+6)v}} = \frac{154(v+6)v}{77(v+v+6)} = \frac{154(v+6)v}{77 \cdot 2(v+3)} = \frac{(v+6)v}{v+3}.$$

Wobec tego

$$V = \frac{(v+6)v}{v+3}.$$

W powyższym przykładzie, przy zapisie czasów t_1 i t_2 oraz prędkości średniej V , wystąpiły wyrażenia wymierne $t_1 = \frac{77}{v+6}$, $t_2 = \frac{77}{v}$, $V = \frac{(v+6)v}{v+3}$. Każde z nich jest zapisane w postaci ilorazu, a w mianowniku każdego z tych wyrażeń występuje zmienna v .

Zauważmy, że dla każdej wartości v (która jako wartość prędkości jest dodatnia), wyrażenia te są określone. Gdyby na przykład ten rowerzysta jechał z C do B ze średnią prędkością $v = 22 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, to jego średnia prędkość na trasie z A do C byłaby równa $28 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość na całej trasie z A do B – $V = \frac{28 \cdot 22}{25} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 24,64 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Nie jest to, jak widać, średnia arytmetyczna wartości prędkości na trasach z A do B i z B do C .

Przykład 2

Rowerzysta przejechał drogę z A do B . W połowie drogi między miejscowościami A i B znajduje się miejscowość C . Przyjmując, że na trasie z A do C rowerzysta jechał ze średnią prędkością $v_1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a na trasie z C do B – ze średnią prędkością $v_2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, zapiszemy wartość jego średniej prędkości na całej trasie z A do B .

Oznaczmy przez s drogę z A do B .

Z warunków zadania wnioskujemy, że czas t_1 (w godzinach) przejazdu rowerzysty z A do C to

$$t_1 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1} = \frac{s}{2v_1}.$$

Natomiast czas t_2 (w godzinach) jego przejazdu z C do B to

$$t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2v_2}.$$

Zatem średnia prędkość V tego rowerzysty na trasie z A do B jest równa

$$V = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{s}{\frac{sv_2 + sv_1}{2v_1v_2}} = \frac{s \cdot 2v_1v_2}{s(v_1 + v_2)},$$

czyli wyraża się wzorem

$$V = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Liczba $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ to tzw. średnia harmoniczna liczb dodatnich v_1, v_2 .

Przykład 3

Wielkość dodatnia a jest wyrażona w zależności od wielkości dodatnich b i c następującym wzorem

$$a = \frac{3bc}{b + 2c}.$$

Przyjmując, że to jest możliwe, wyrazimy

1. b w zależności od a i c ,
2. c w zależności od a i b .

Przekształcamy dany wzór do postaci $a(b + 2c) = 3bc$, stąd $ab + 2ac = 3bc$. Zatem

1. $2ac = 3bc - ab$, a więc $b \cdot (3c - a) = 2ac$, co oznacza, że $b = \frac{2ac}{3c-a}$, gdy $3c - a \neq 0$,
2. $ab = 3bc - 2ac$, a więc $c \cdot (3b - 2a) = ab$, co oznacza, że $c = \frac{ab}{3b-2a}$, gdy $3b - 2a \neq 0$.

Równanie wymierne

Równaniem wymiernym z niewiadomą x nazywamy równanie, które można sprowadzić do postaci

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} = 0,$$

gdzie W_1, W_2 są wielomianami, przy czym W_2 jest wielomianem co najmniej pierwszego stopnia

$$W_2(x) \neq 0.$$

Rozwiążemy kilka takich równań.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie

$$\frac{2}{3x+1} = \frac{1}{8}.$$

Wyrażenie $\frac{2}{3x+1}$, zapisane po lewej stronie równania, jest określone, gdy $x \neq -\frac{1}{3}$.

Mnożymy obie strony danego równania przez $8 \cdot (3x + 1)$ bo $8 \cdot (3x + 1) \neq 0$, stąd

$$3x + 1 = 2 \cdot 8.$$

Oznacza to, że $3x = 15$, czyli $x = 5$. Dla tej wartości x obie strony równania są określone, więc liczba 5 jest szukanym rozwiązaniem danego równania.

Uwaga. Po zapisaniu warunku $x \neq -\frac{1}{3}$ można skorzystać z własności proporcji i w ten sposób przekształcić równoważnie dane równanie do postaci

$$3x + 1 = 2 \cdot 8.$$

Przykład 5

Rozwiążemy równanie

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}.$$

Wyrażenia zapisane w równaniu: $\frac{2}{x+1}$ i $\frac{3}{x-2}$ są określone, gdy $x \neq -1$ i $x \neq 2$.

Ponieważ $(x + 1)(x - 2) \neq 0$, to mnożymy obie strony danego równania przez $(x + 1) \cdot (x - 2)$, stąd

$$2(x - 2) = 3(x + 1).$$

Otrzymujemy $2x - 3x = 3 + 4$, czyli $x = -7$. Dla tej wartości x obie strony równania są określone, więc liczba $x = -7$ jest szukanim rozwiązaniem danego równania.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie

$$\frac{x + 1}{x - 5} = \frac{3x - 8}{2x + 8}.$$

Wyrażenia zapisane w równaniu: $\frac{x+1}{x-5}$ i $\frac{3x-8}{2x+8}$ są określone, gdy $x \neq 5$ i $x \neq -4$.

Mnożymy obie strony danego równania przez $(x - 5) \cdot (2x + 8)$, stąd

$$(2x + 8)(x + 1) = (x - 5)(3x - 8).$$

Wobec tego

$$2x^2 + 10x + 8 = 3x^2 - 23x + 40$$

$$x^2 - 33x + 32 = 0.$$

Ponieważ wyróżnik tego równania jest dodatni: $\Delta = 33^2 - 4 \cdot 32 = 961 = 31^2$, więc równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{33-31}{2} = 1 \text{ oraz } x_2 = \frac{33+31}{2} = 32.$$

Dla tych wartości x obie strony równania są określone, więc równanie $\frac{x+1}{x-5} = \frac{3x-8}{2x+8}$ ma dwa rozwiązania: 1 oraz 32.

Przykład 7

Uzasadnimy, że żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $\frac{x}{x-1} = 2x - 3$.

Wyrażenie $\frac{x}{x-1}$ jest określone, gdy $x \neq 1$.

Mnożymy obie strony danego równania przez liczbę $x - 1$ różną od zera, stąd

$$x = (2x - 3)(x - 1).$$

Wobec tego

$$x = 2x^2 - 3x - 2x + 3$$

$$2x^2 - 6x + 3 = 0.$$

Wyróżnik tego równania jest dodatni: $\Delta = 36 - 24 = 12$, więc równanie ma dwa rozwiązania.

Ponieważ $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną, to każde z tych rozwiązań

$$x_1 = \frac{6-2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{6+2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

jest liczbą niewymierną. Zatem równanie $\frac{x}{x-1} = 2x - 3$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

Przykład 8

Rozwiążemy równanie $\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{3x-2}{x(x-1)}$.

Wyrażenia $\frac{2}{(x-1)(x+1)}$, $\frac{4}{x(x+1)}$ i $\frac{3x-2}{x(x-1)}$ zapisane w równaniu są określone, gdy $x \neq 0$, $x \neq 1$ i $x \neq -1$.

Mnożymy obie strony danego równania przez $x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$ wyrażenie różne od zera, stąd

$$2x = 4(x-1) + (3x-2)(x+1).$$

Wobec tego

$$2x = 4x - 4 + 3x^2 - 2x + 3x - 2$$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Ponieważ wyróżnik tego równania jest dodatni: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 9 = 3^2$, więc równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Tylko dla wartości $x = -2$ obie strony równania $\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{3x-2}{x(x-1)}$ są określone, więc to równanie ma jedno rozwiązanie: $x_1 = -2$.

Przykład 9

Rozwiążemy równanie $\frac{1}{(x-4)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$.

Na początku odnotujmy, że wyrażenia zapisane po obu stronach danego równania są określone, gdy $x \neq 4$, $x \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq -5$.

Przedstawimy dwa sposoby rozwiązania tego równania.

- sposób I

Przekształcamy lewą stronę równania. Dodajemy najpierw pierwszy składnik do drugiego, a następnie otrzymaną sumę dodajemy do składnika trzeciego:

$$\left(\frac{x+2}{(x-4)(x-1)(x+2)} + \frac{x-4}{(x-4)(x-1)(x+2)} \right) + \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{2(x-1)}{(x-4)(x-1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}.$$

Pierwszy ułamek możemy skrócić, bo $x-1 \neq 0$

$$\frac{2}{(x-4)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{2(x+5)}{(x-4)(x+2)(x+5)} + \frac{x-4}{(x-4)(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3(x+2)}{(x-4)(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{(x-4)(x+5)} = \frac{1}{12}.$$

Stąd

$$(x-4)(x+5) = 36,$$

czyli

$$x^2 + x - 56 = 0.$$

Otrzymane równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = 7$ oraz $x_2 = -8$. Dla tych wartości x obie strony danego równania są określone, zatem są to jedyne rozwiązania danego równania.

- sposób II

Zauważmy, że różnice wyrażeń zapisanych w mianownikach każdego z trzech ułamków stojących po lewej stronie równania są stałe i równe 3. Wykorzystamy ten fakt do przekształcenia równania.

Pomnożymy najpierw obie strony równania przez 3:

$$\frac{3}{(x-4)(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+2)} + \frac{3}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{4}.$$

Następnie zapiszemy w liczniku różnice wyrażeń z mianownika

$$\frac{(x-1)-(x-4)}{(x-4)(x-1)} + \frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} + \frac{(x+5)-(x+2)}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{4}.$$

Każde z trzech wyrażeń zapiszemy jako różnicę dwóch ułamków

$$\frac{(x-1)}{(x-4)(x-1)} - \frac{(x-4)}{(x-4)(x-1)} + \frac{(x+2)}{(x-1)(x+2)} - \frac{(x-1)}{(x-1)(x+2)} + \frac{(x+5)}{(x+2)(x+5)} - \frac{(x+2)}{(x+2)(x+5)},$$

a po skróceniu otrzymanych ułamków uporządkujemy lewą stronę równania

$$\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{4}.$$

Po pomnożeniu obu stron otrzymanego równania przez $4(x-4)(x+5)$ otrzymujemy:

$$4(x+5) - 4(x-4) = (x+5)(x-4)$$

$$4x + 20 - 4x + 16 = x^2 + 5x - 4x - 20$$

$$x^2 + x - 56 = 0.$$

Jak wiemy z rozwiązania poprzednim sposobem, to równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = 7$ oraz $x_2 = -8$. Są to jedyne rozwiązania równania $\frac{1}{(x-4)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$.

Przykład 10

Rozwiążemy równanie

$$\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+4} + \frac{1}{2x+5} + \frac{1}{2x+6} = 0.$$

Wyrażenia zapisane po obu stronach danego równania są określone, gdy $x \neq -\frac{3}{2}$, $x \neq -2$, $x \neq -\frac{5}{2}$, $x \neq -3$.

Przekształcamy lewą stronę równania. Dodajemy wyrażenia parami: pierwsze do ostatniego, a drugie do trzeciego:

$$\frac{2x+6+2x+3}{(2x+3)(2x+6)} + \frac{2x+5+2x+4}{(2x+4)(2x+5)} = 0.$$

Stąd

$$\frac{4x+9}{(2x+3)(2x+6)} + \frac{4x+9}{(2x+4)(2x+5)} = 0$$

$$(4x+9) \left(\frac{1}{(2x+3)(2x+6)} + \frac{1}{(2x+4)(2x+5)} \right) = 0,$$

a więc $4x+9=0$ lub $\frac{1}{(2x+3)(2x+6)} + \frac{1}{(2x+4)(2x+5)} = 0$.

Rozwiązując równanie $\frac{1}{(2x+3)(2x+6)} + \frac{1}{(2x+4)(2x+5)} = 0$, otrzymujemy

$$\frac{1}{(2x+3)(2x+6)} = \frac{-1}{(2x+4)(2x+5)}$$

$$(2x+4)(2x+5) = -(2x+3)(2x+6)$$

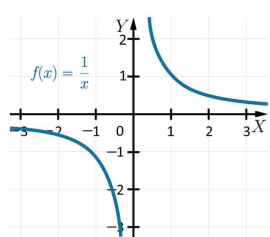
$$4x^2 + 18x + 19 = 0.$$

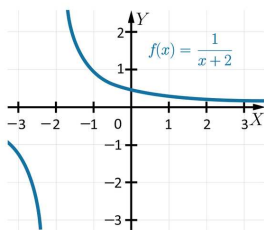
Stąd $x_1 = -\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$, $x_2 = -\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$. Zatem równanie ma dwa rozwiązania: $-\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$ oraz $-\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$.

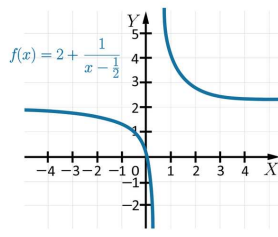
Ćwiczenie 1

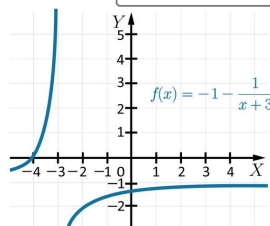


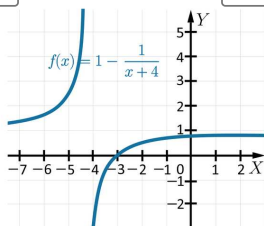
Dopasuj dziedzinę funkcji wymiernej do jej wykresu, przeciągając w kółka prawidłowe odpowiedzi..

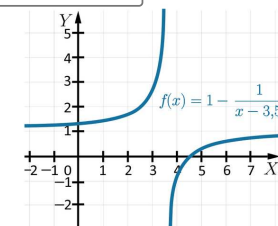












☐ $x \neq -3$

☐ $x \neq -4$

☐ $x \neq 3\frac{1}{2}$

☐ $x \neq -2$

☐ $x \neq \frac{1}{2}$

☐ $x \neq 0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Ile jest równe wyrażenie $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{3x}{(x+1)(x+2)}$

☐ $\frac{1}{2x+3}$

☐ $\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$

☐ $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Jaka liczba jest rozwiązaniem równania $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{3}{2}$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ -4

☐ 11

☐ -11

☐ 4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Zaznacz, czy lub ile rozwiązań ma równanie $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$.

☐ ma dokładnie dwa rozwiązania

☐ nie ma rozwiązań

☐ ma dokładnie trzy rozwiązania

☐ ma dokładnie jedno rozwiązanie

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Która liczba jest wspólnym pierwiastkiem równań $\frac{2x-6}{x+1} = 0$ oraz $\frac{(x-3)(x+1)}{x-5} = 0$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 5

☐ -1

☐ 1

☐ 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Ile wynosi x , jeśli $z = \frac{2x}{x+3y}$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $x = \frac{z-2}{3yz}$

☐ $x = \frac{3yz}{z-2}$

☐ $x = \frac{2-z}{3yz}$

☐ $x = \frac{3yz}{2-z}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Która liczba jest rozwiązaniem równania $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-4}{x}$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 4

☐ 1

☐ 2

☐ 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Która liczba jest wspólnym pierwiastkiem równań $\frac{x^2-16}{x^2+1} = 0$ oraz $\frac{x^2+4x}{x+2} = 0$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 0

☐ -4

☐ 1

☐ 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Zaznacz, czy lub ile rozwiązań ma równanie $\frac{x^2+9}{x+9} = 0$.

☐ ma dokładnie dwa rozwiązania

☐ ma dokładnie trzy rozwiązania

☐ ma dokładnie jedno rozwiązanie

☐ nie ma rozwiązań

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Rozwiąż równania, a następnie uzupełnij je, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

1. $\frac{7}{x-2} = \frac{6}{x+3}$, rozwiązanie to $x =$

2. $\frac{3}{x-5} = \frac{1}{x+4}$, rozwiązanie to $x =$

3. $\frac{12}{7x+10} = \frac{5}{3x+4}$, rozwiązanie to $x =$

4. $\frac{7}{4-3x} = \frac{5}{1-2x}$, rozwiązanie to $x =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Rozwiąż równania, a następnie uzupełnij je, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

1. $\frac{x}{x+1} = \frac{x-1}{x+3}$, rozwiązanie to $x =$

2. $\frac{8x+9}{11-4x} = \frac{7-2x}{x+3}$, rozwiązanie to $x =$

3. $\frac{3x-4}{2-x} = \frac{7-6x}{2x+5}$, rozwiązanie to $x =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Wielkości x, y łączy zależność $xy + 2x - 3y + 5 = 0$. Wyraż:

a. x w zależności od y i ustal, dla jakich y otrzymane wyrażenie jest określone,

b. y w zależności od x i ustal, dla jakich x otrzymane wyrażenie jest określone.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Wielkości dodatnie a, b, c łączy zależność $a = \frac{b+2c}{b-c}$. Wyraż

1. b w zależności od a i c ,

2. c w zależności od a i b .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Rozwiąż równania. Przeciągnij w luki odpowiednie wyrażenia lub wybierz wyrażenia z listy rozwijalnej.

1. $\frac{x}{x+1} = x + 4$, rozwiązanie to .

2. $\frac{3x-1}{x-5} = 4x - 7$, rozwiązanie to .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Rozwiąż równania. Przeciągnij w luki odpowiednie wyrażenia lub wybierz te wyrażenia z listy rozwijalnej.

1. $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{3x-3}{x+5}$, rozwiązanie to
2. $\frac{2x+5}{x-4} = \frac{5x+12}{3x-6}$, rozwiązanie to
3. $\frac{3x+1}{x+4} = \frac{9x-29}{4x-11}$, rozwiązanie to

$x = 6$ lub $x = 2$

$x = 4$ lub $x = 7$

$x = 7$ lub $x = 9$

$x = -9$ lub $x = -2$

$x = 5$ lub $x = 7$

$x = 2$ lub $x = 5$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Rozwiąż każde z równań i połącz je z odpowiednim rozwiązaniem.

$$\frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{3x-4}{x^2-1}$$

Równanie nie ma rozwiązań

$$\frac{4}{x+3} + \frac{6}{x-3} = \frac{5x+11}{x^2-9}$$

$$x = 1$$

$$\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-2} = \frac{7x+2}{x^2-4}$$

Równanie jest spełnione przez każdą liczbę różną od 2 i różną od -2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Rozwiąż równanie i połącz je z odpowiednimi rozwiązaniami.

$$\frac{x+1}{x+3} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{2x-12}{x^2-9}$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{x+2} - \frac{7}{2-x} = \frac{11x+6}{x^2-4}$$

Równanie nie ma rozwiązań

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x-4}{2-x} = \frac{2-5x}{x^2-4}$$

Równanie jest spełnione przez każdą liczbę różną od -2 i różną od 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Uzasadnij, że żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania

$$\frac{2x}{3x-2} = 4x + 3.$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Uzasadnij, że żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $\frac{x}{x+1} = 3x - 2$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Rozwiąż równania. Przeciągnij w luki odpowiednie liczby lub wybierz te liczby z listy rozwijalnej.

1. $\frac{2}{(x-3)(x+3)} - \frac{5}{x(x-3)} = \frac{x+4}{x(x+3)}$, rozwiązanie to $x =$
2. $\frac{7}{(x-2)(x+5)} + \frac{x-4}{x(x-2)} = \frac{4}{x(x+5)}$, rozwiązanie to $x =$

- 2

- 5

- 6

- 3

- 7

- 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Rozwiąż równanie i połącz je z odpowiednimi rozwiązaniami.

$$\frac{1}{2x+4} + \frac{1}{2x+5} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+6} = 0$$

$$x = -\frac{7}{2}, x = \frac{-7+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-7-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$$

$$x = -\frac{5}{2}, x = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{-1+2\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-1-2\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{2x-5} + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+7} = 0$$

$$x = -\frac{9}{4}, x = \frac{-9+\sqrt{5}}{4}, x = \frac{-9-\sqrt{5}}{4}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Rozwiąż równanie $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{3}{10}$. Przeciągnij w lukę odpowiednie wyrażenie lub wybierz je z listy rozwijalnej.

Wynik równania to .

$x = -9$ lub $x = 1$

$x = -6$ lub $x = 1$

$x = -6$ lub $x = 3$

$x = -3$ lub $x = 2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23



Rozwiąż równanie, a następnie uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie wyrażenia lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

1. $\frac{1}{(x-5)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+3)} = -\frac{1}{3}$, to równanie .

2. $\frac{1}{(x-5)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{5}$, to równanie .

jest sprzeczne

jest sprzeczne

ma rozwiązanie dla wszystkich liczb rzeczywistych

ma rozwiązanie dla wszystkich liczb rzeczywistych

nie ma rozwiązań

ma dwa rozwiązania

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.