Prosta równoległa do płaszczyzny

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja 3D
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Prosta równoległa do płaszczyzny

Źródło: dostępny w internecie: PxHere, domena publiczna.

Punkt, prosta i płaszczyzna to tzw. pojęcia pierwotne (tzw. fundamentalne), bez których nie istniałaby geometria. Czasami przyjmuje się też, że wymienione elementy są podzbiorami pewnych przestrzeni. W zależności od wzajemnego położenia prostej i płaszczyzny, istnieje możliwość wyznaczenia odległości między tymi obiektami. W materiale omówimy przypadek prostej równoległej do płaszczyzny. Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

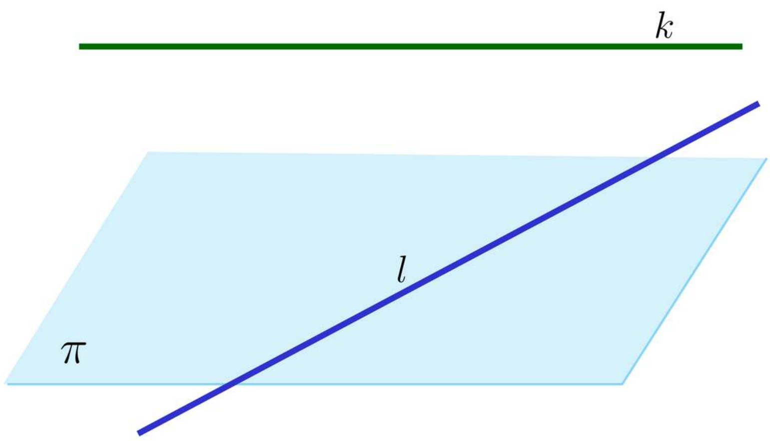
- Zdefiniujesz, kiedy prosta jest równoległa do płaszczyzny.
- Wskażesz proste, które są równoległe do podanych płaszczyzn.
- Obliczysz odległości prostych od podanych płaszczyzn.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Zdefiniujmy najpierw, kiedy prosta jest równoległa do płaszczyzny.

Definicja: Prosta równoległa do płaszczyzny

Dana jest płaszczyzna π oraz proste k i l. Mówimy, że prosta i płaszczyzna są równoległe, gdy nie mają punktów wspólnych (płaszczyzna π i prosta k), lub prosta zawarta jest w tej płaszczyźnie (płaszczyzna π i prosta l).

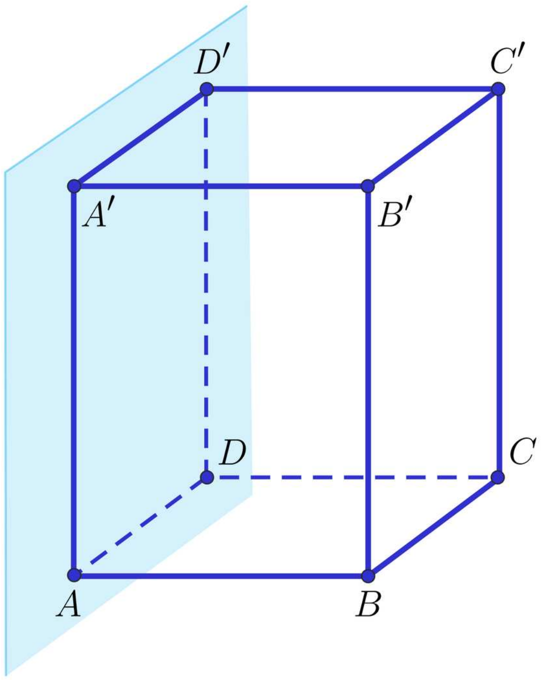


Ważne!

Jeżeli prosta jest równoległa do płaszczyzny, wówczas możemy wyznaczyć odległość między tą prostą a płaszczyzną. Gdy prosta jest zawarta w danej płaszczyźnie, to odległość tej prostej od płaszczyzny wynosi 0.

Przykład 1

Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Wskażemy wszystkie proste, które zawierają krawędzie prostopadłościanu i są równoległe do płaszczyzny $ADD'A'$.



Rozwiązanie:

Jeżeli wykorzystamy definicję prostej równoległej do płaszczyzny, prostymi równoległymi do płaszczyzny ADD'A', zawierającymi krawędzie prostopadłościanu są proste:

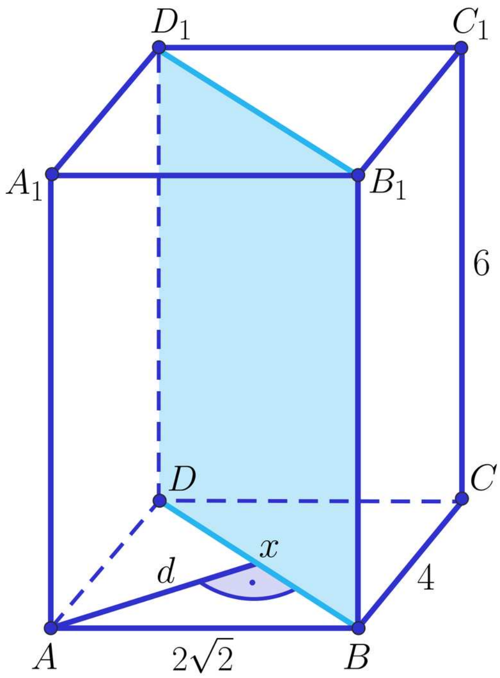
- zawarte w tej płaszczyźnie: AD, AA', A'D', DD',
- nie należące do tej płaszczyzny: BC, BB', B'C', CC'.

Przykład 2

Dany jest prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Obliczymy odległości prostych zawierających krawędzie tego prostopadłościanu, równoległych do płaszczyzny BB_1D_1D, nienależących do tej płaszczyzny, jeżeli krawędzie prostopadłościanu mają długości: $|AB| = 2\sqrt{2}$, $|BC| = 4$, $|CC_1| = 6$.

Rozwiązanie

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Zauważmy, że tylko proste AA_1 oraz CC_1 zawierają krawędzie tego prostopadłościanu, które są równoległe do płaszczyzny BB_1D_1D i nie należą do tej płaszczyzny.

Odległości tych prostych od płaszczyzny BB_1D_1D są takie same. Niech d będzie szukaną odległością.

Wówczas:

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

$|AC|^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 4^2 = 8 + 16 = 24$

$|AC| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$

Zatem $x = 2\sqrt{6}$.

Pole trójkąta ABD jest równe:

$P = \frac{2\sqrt{2}\cdot 4}{2}$ oraz

$P = \frac{2\sqrt{6}\cdot d}{2}.$

Wobec tego:

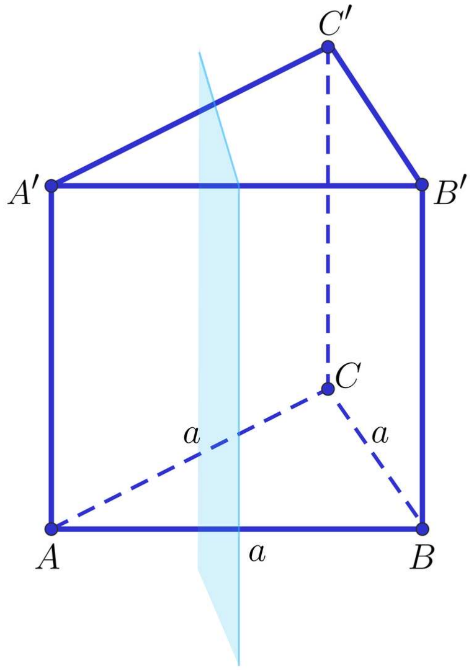
$\frac{2\sqrt{6}\cdot d}{2} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 4}{2}$

$2\sqrt{6}\cdot d = 8\sqrt{2}$

$d = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 3

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCA$'B'C', jak na poniższym rysunku oraz płaszczyzna, przechodząca przez środki krawędzi AB, AC, A'B', A'C' graniastosłupa.



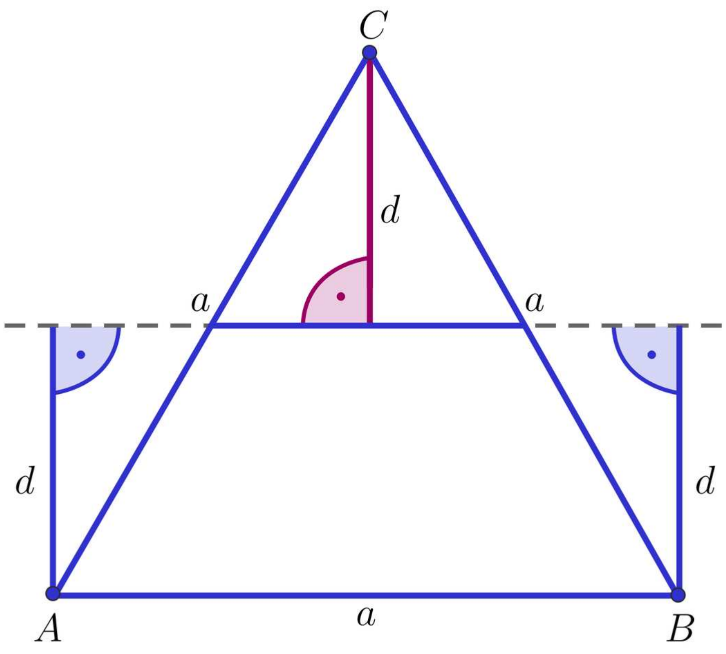
Wskażemy proste zawierające krawędzie graniastosłupa, które są równoległe do danej płaszczyzny, a następnie obliczymy odległości tych prostych od płaszczyzny, jeżeli długość krawędzi podstawy graniastosłupa jest równa a.

Rozwiązanie

Proste równoległe do podanej płaszczyzny, zawierające krawędzie graniastosłupa, to: AA', BB' oraz CC'.

Zauważmy, że odległości tych prostych od podanej płaszczyzny są równe. Niech d będzie szukaną odległością.

Rozpatrzmy trójkąt równoboczny, jak na poniższym rysunku:



Szukana odległość jest równa połowie długości wysokości omawianego trójkąta.

Zatem $d = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Dla zainteresowanych

Narzędzia użyte w poniższych przykładach wykraczają poza wymagania podstawy programowej, jednak są ich ciekawym uzupełnieniem.

Istnieje również definicja prostej równoległej do płaszczyzny, w której wymienione figury przedstawia się za pomocą wektorów.

Definicja: Warunek równoległości prostej do płaszczyzny

Niech prosta k będzie określona przez wektor do niej równoległy $[a, b, c]$ (wektor kierunkowy), a płaszczyzna π przez wektor do niej prostopadły $[A, B, C]$ (wektor normalny).

Mówimy, że prosta k jest równoległa do płaszczyzny π wtedy, gdy wektory normalny i kierunkowy są do siebie prostopadłe, czyli ich iloczyn skalarny jest równy 0.

Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u} = [a, b, c]$ i $\overrightarrow{v} = [A, B, C]$ obliczamy ze wzoru:

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C$$

Przykład 4

Sprawdzimy, czy prosta k określona przez wektor kierunkowy $\overrightarrow{u} = [3, 4, -2]$ oraz płaszczyzna π o wektorze normalnym $\overrightarrow{v} = [-2, 3, 1]$ są do siebie równoległe.

Rozwiązanie

Obliczamy iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.

Zatem

$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = [3, 4, -2] \circ [-2, 3, 1] = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 =$

$= -6 + 12 - 2 = 4.$

Ponieważ $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} \neq 0$, zatem prosta k i płaszczyzna π nie są równoległe.

Przykład 5

Wyznaczymy dla jakich wartości parametru m prosta k określona przez wektor kierunkowy $\overrightarrow{u} = [m, -1, 2]$ oraz płaszczyzna π określona przez wektor normalny $\overrightarrow{v} = [m, -m, -6]$ są równoległe.

Rozwiązanie

Do wyznaczenia wartości parametru m sprawdzimy, kiedy zachodzi warunek $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$.

Wobec tego:

$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = [m, -1, 2] \circ [m, m, -6] = m^2 - m - 12.$

Rozwiązujemy równanie $m^2 - m - 12 = 0$.

Zatem $m \in \{-3, 4\}$.

Słownik

odległość między punktami

długość najkrótszej krzywej łączącej dane punkty

iloczyn skalarny wektorów

funkcja przyporządkowująca dwóm wektorom przestrzeni liniowej pewną wartość liczbową

Animacja 3D

Polecenie 1

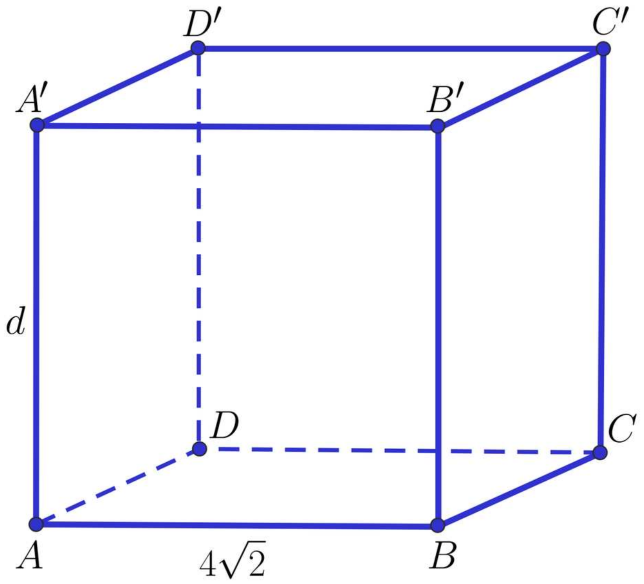
Zapoznaj się animację 3D, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D6THobqvE

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego prostej równoległej do płaszczyzny.

Polecenie 2

Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$, którego krawędź ma długość $4\sqrt{2}$.



Oblicz odległość:

a. prostej $A'D'$ od płaszczyzny $ABCD$,

b. prostej $B'C'$ od płaszczyzny $BCD'A'$,

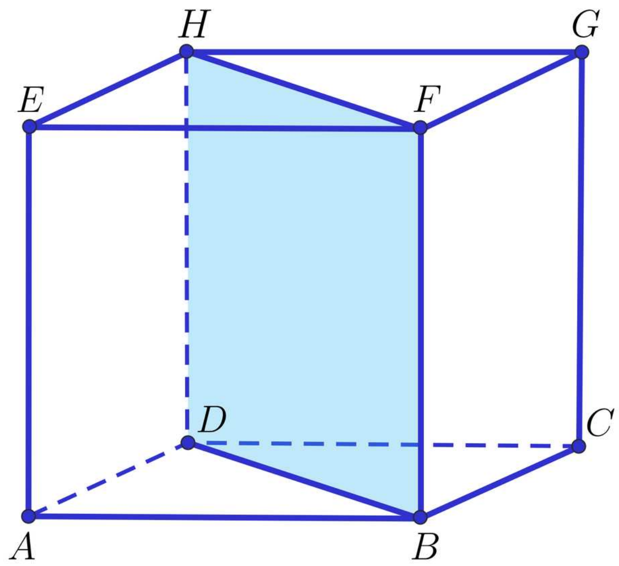
c. prostej AO' (gdzie O' jest punktem przecięcia przekątnych górnej podstawy sześcianu) od płaszczyzny DBC'.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

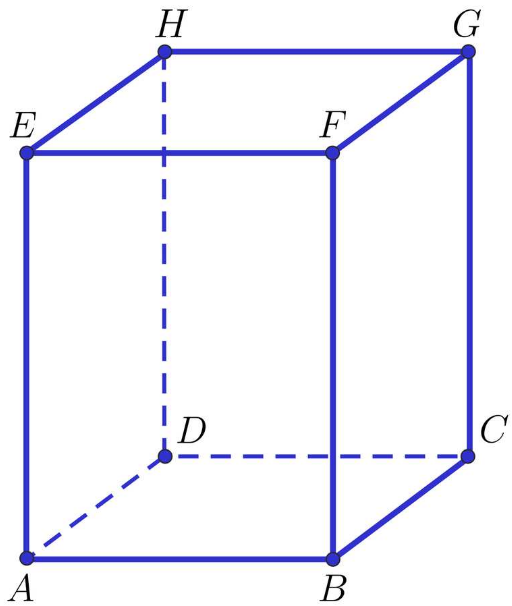
Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono sześcian $ABCDEFGH$.



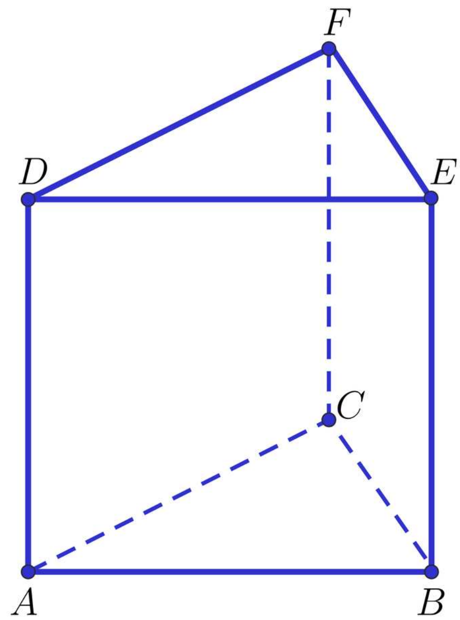
Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono prostopadłościan $ABCDEFGH$.



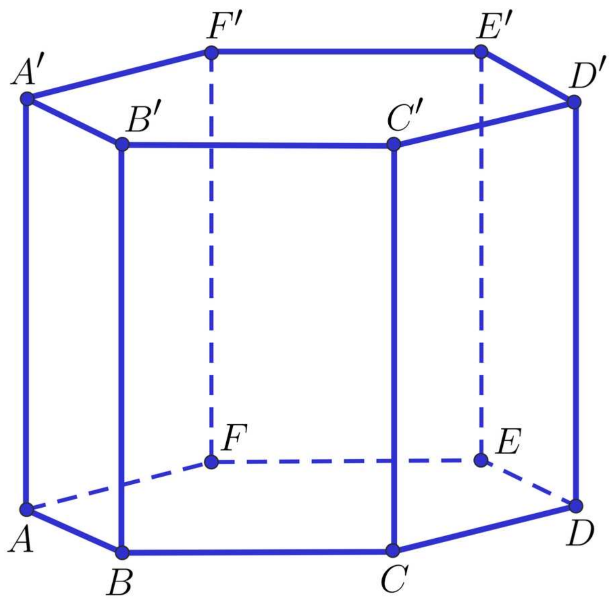
Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy trójkątny.



Ćwiczenie 4

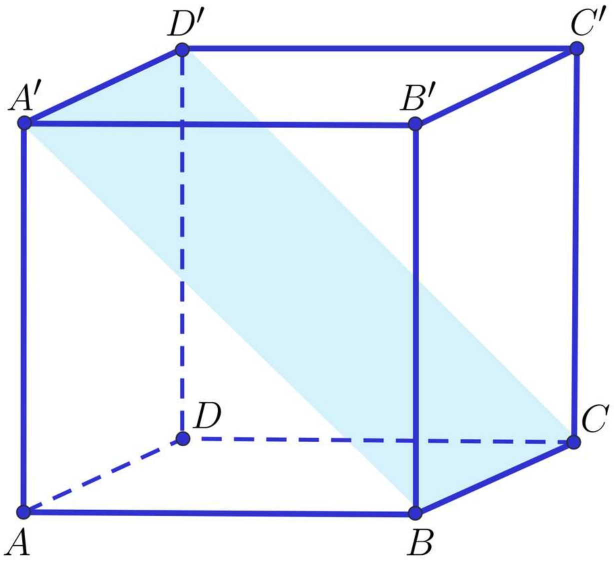
Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość 6.



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Na rysunku przedstawiono sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości $3\sqrt{2}$.



Ćwiczenie 7

Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$, którego krawędź ma długość a. Wykaż, że odległość d prostej AO', gdzie O' jest punktem przecięcia przekątnych podstawy $A'B'C'D'$, od płaszczyzny DBC' wynosi $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ćwiczenie 8

Wyznacz dla jakich wartości parametru m prosta k określona przez wektor kierunkowy $\overrightarrow{u} = [m^2, 2, 3]$ jest równoległa do płaszczyzny π określonej przez wektor normalny $\overrightarrow{v} = [m, -m^2, -3]$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prosta równoległa do płaszczyzny

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje prostą równoległą do płaszczyzny;
- wskazuje proste, które są równoległe do podanych płaszczyzn;
- oblicza odległości prostych od podanych płaszczyzn;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;
- burza mózgów;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja 3D”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się…

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni.

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Animacja 3D” można wykorzystać do powtórzenia wiadomości dotyczących prostej równoległej do płaszczyzny.