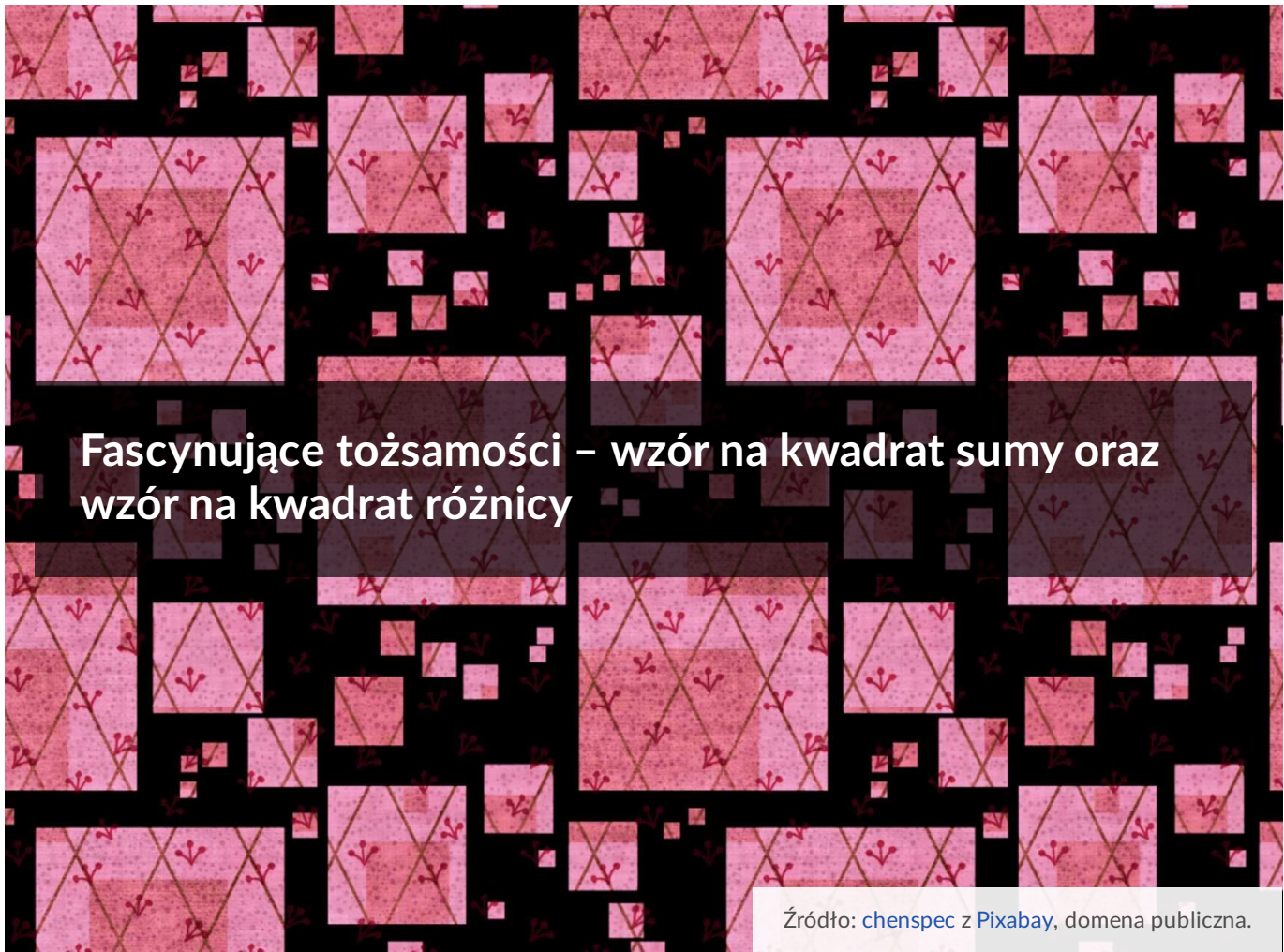




Fascynujące tożsamości – wzór na kwadrat sumy oraz wzór na kwadrat różnicy

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Fascynujące tożsamości – wzór na kwadrat sumy oraz wzór na kwadrat różnicy

Źródło: [chenspec](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

W tym materiale pokażemy, jak korzystając ze współczesnej symboliki algebraicznej, można udowodnić i zastosować zależności między liczbami rzeczywistymi, wywodzące się z rozważań czysto arytmetycznych.

Podamy również przykłady zastosowania wzorów skróconego mnożenia na kwadrat różnicy oraz na kwadrat sumy w zadaniach algebraicznych. Wszystkie podane przekształcenia można będzie oczywiście wykonywać bez znajomości tych wzorów, jednak „zwijanie w kwadrat” wyrażeń algebraicznych nie zawsze jest wtedy proste.

Na zawarte w tym materiale rozważania, możesz popatrzeć zgodnie, z myślą angielskiego filozofa i matematyka hrabiego Bertranda Russella:

“ Matematyka zawiera w sobie nie tylko prawdę, ale i najwyższe piękno – piękno chłodne i surowe, podobne do piękna rzeźby.



Bertrand Russell, 1907 r.

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,
domena publiczna.

Twoje cele

- Zastosujesz wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy oraz wzór na kwadrat sumy w obliczeniach arytmetycznych i algebraicznych.
- Sprowadzisz do najprostszej postaci wyrażenia algebraiczne.
- Przedstawisz liczby naturalne w postaci sumy kwadratów.

Przeczytaj

W tym materiale pokażemy kilka ciekawych zastosowań wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy oraz [wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń](#). Na początek więc przypomnienie tych wzorów.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DrAeSvDHN>

Film nawiązujący do treści treści lekcji dotyczący kwadratu sumy.

Wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń i podwojonego iloczynu tych wyrażeń.

Wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy różnicy sumy kwadratów tych wyrażeń i podwojonego iloczynu tych wyrażeń.

Na przestrzeni wieków wielu matematyków pasjonowało się sposobami przedstawiania liczb naturalnych w postaci sumy kwadratów. W rozważaniach wykorzystywali zależności arytmetyczne – my wykorzystamy wzory skróconego mnożenia.

Przyda nam się jeszcze przypomnienie ważnego pojęcia – liczby kwadratowe.

Liczba kwadratowa, to liczba całkowita, która jest kwadratem liczby całkowitej.

Przykłady liczb kwadratowych:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$$

W pierwszym przykładzie skorzystamy z ważnego twierdzenia, które z reguły wykorzystywane jest w związku z twierdzeniem Pitagorasa.

Twierdzenie: Twierdzenie o liczbie naturalnych rozwiązań równania

Równanie

$$x^2 + (x + 1)^2 = y^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych.

Każde rozwiązanie naturalne równania jest postaci

$$(x_n, y_n),$$

gdzie:

$$x_1 = 3 \text{ i } y_1 = 5$$

$$x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 1 \text{ i } y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 2, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}_+$$

Przykład 1

Znajdziemy taką liczbę kwadratową y , która jest sumą kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych.

Na podstawie powyższego twierdzenia wnioskujemy, że takich liczb jest nieskończenie wiele.

Zatem podamy tylko przykłady czterech z nich.

- $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow y = 25$
- $20^2 + 21^2 = 29^2 \Rightarrow y = 841$
- $119^2 + 120^2 = 169^2 \Rightarrow y = 28561$
- $696^2 + 697^2 = 985^2 \Rightarrow y = 970225$

Przykład 2

Wykażemy, że równanie $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = y^2$ nie ma rozwiązań z zbiorze liczb naturalnych.

Przekształcamy równanie, korzystając ze [wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń](#).

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = y^2$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = y^2$$

$$3x^2 + 6x + 5 = y^2$$

$$3x^2 + 6x + 3 + 2 = y^2$$

$$3(x + 1)^2 + 2 = y^2$$

$$y^2 - 3(x + 1)^2 = 2$$

Liczba $3(x + 1)^2$.

Liczba kwadratowa y^2 w dzieleniu przez 3 nigdy nie daje reszty 2. Zatem lewa strona równania nie równa się prawej – równanie nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych, co należało wykazać.

Przykład 3

Niech a, b, c będą liczbami naturalnymi dodatnimi. Wykażemy, że jeżeli

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2},$$

to $a^4 + b^4 + c^4$ jest liczbą kwadratową.

Z równości $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ wynika, że

$$b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot b^2$$

Przekształcimy teraz wyrażenie $a^4 + b^4 + c^4$, dodając i odejmując to samo wyrażenie.

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^4 + b^4 + c^4 + (2 \cdot a^2 \cdot b^2 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2)$$

Drugie z wyrażen $a^2 \cdot b^2$ zastępujemy przez $b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot c^2$.

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 - 2(b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot c^2)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 - 2 \cdot b^2 \cdot c^2 - 2 \cdot a^2 \cdot c^2$$

Prawą stronę równości „zwijamy” w kwadrat trójmianu, co kończy dowód.

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

Ze wzorów skróconego mnożenia warto skorzystać, uzasadniając, że dane wyrażenie przyjmuje wartości nieujemne.

Przykład 4

Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Wykażemy, że

$$a^4 + 4a^3 + 8a^2 + 16a + 16 \geq 0.$$

Przekształcimy tak lewą stronę nierówności, żeby zapisać ją w postaci sumy wyrażen, które przyjmują tylko wartości nieujemne.

$$L = a^4 + 4a^3 + 8a^2 + 16a + 16$$

$$L = a^4 + 4a^3 + 4a^2 + 4a^2 + 16a + 16$$

$$L = (a^4 + 4a^3 + 4a^2) + (4a^2 + 16a + 16)$$

Wyrażenia w nawiasach zapisujemy jako kwadraty dwóch wyrażeń.

$$L = (a^2 + 2a)^2 + (2a + 4)^2$$

Dla każdej liczby rzeczywistej a :

$$(a^2 + 2a)^2 \geq 0.$$

Zatem dla każdej liczby rzeczywistej a

$$(a^2 + 2a)^2 + (2a + 4)^2 \geq 0,$$

co należało wykazać.

W ostatnim przykładzie pokażemy związek liczb kwadratowych z ciągiem arytmetycznym.

Przykład 5

Wykażemy, że jeżeli liczby $1, a^2, b^2$ tworzą w tej kolejności ciąg arytmetyczny, to liczby $1, (3a + 2b)^2, (4a + 3b)^2$ w tej kolejności, również tworzą ciąg arytmetyczny.

Liczby $1, a^2, b^2$ tworzą ciąg arytmetyczny, zatem różnica między kolejnymi wyrazami jest stała

$$a^2 - 1 = b^2 - a^2$$

$$b^2 = 2a^2 - 1 \quad (*)$$

Zbadamy różnice między kolejnymi wyrazami ciągu.

$$(1, (3a + 2b)^2, (4a + 3b)^2).$$

$$(3a + 2b)^2 - 1 = 9a^2 + 12ab + 4b^2 - 1$$

$$(4a + 3b)^2 - (3a + 2b)^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2 - 9a^2 - 12ab - 4b^2$$

$$(4a + 3b)^2 - (3a + 2b)^2 = 7a^2 + 5b^2 + 12ab$$

Porównujemy otrzymane wyrażenia.

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 - 1 = 7a^2 + 5b^2 + 12ab$$

$$2a^2 - 1 = b^2$$

Prawdziwość ostatniej równości wynika z równości (*). Różnica między kolejnymi wyrazami rozpatrywanego ciągu jest stała, zatem jest to ciąg arytmetyczny, co należało

wykazać.

Słownik

wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń i podwojonego iloczynu tych wyrażeń

wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy różnicy sumy kwadratów tych wyrażeń i podwojonego iloczynu tych wyrażeń

Animacja

Polecenie 1

Przypomnij sobie wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń, korzystając z poniższej animacji.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dtf8vri6w>

Film nawiązujący do treści treści lekcji dotyczący kwadratu różnicy.

Polecenie 2

Zapisz wyrażenie $2a^2 - 14a + 25$ w postaci sumy kwadratów różnic dwumianów.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Liczba $\frac{12^2+11^2+10^2+9^2+8^2}{5^2+6^2+7^2+8^2+9^2}$ jest równa:

☐ 1

☐ 2

☐ $\frac{12}{5}$

☐ $\frac{33}{18}$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jedno z rozwiązań równania $(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2$ z niewiadomymi x, y to:

☐ $x = 2, y = 3$

☐ $x = 2, y = 1$

☐ $x = 3, y = 2$

☐ $x = 1, y = 2$

Ćwiczenie 3



Uzupełnij rozkład każdego z danych wielomianów na sumę kwadratów dwóch wyrażeń.
Wpisz odpowiednie liczby.

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 - \boxed{}\right)^2 + \left(\sqrt{3}x\right)^2$$

$$x^4 + 9x^2 + 25 = \left(x^2 - \boxed{}\right)^2 + \left(\sqrt{19}x\right)^2$$

$$x^4 + 7x^2 - 4x + 13 = \left(x^2 + \boxed{}\right)^2 + (x - 2)^2$$

Ćwiczenie 4



Jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to liczba $K = 4p^2 + 1$ jest sumą kwadratów trzech liczb naturalnych.

Uzupełnij dowód powyższego twierdzenia, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

Rozważymy dwa przypadki, pamiętając, że liczba p musi być liczbą nieparzystą.

– Liczba p w dzieleniu przez 3 daje resztę 1, czyli można ją zapisać w postaci $p = 3k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną dodatnią.

Wtedy:

$$K = 4p^2 + 1$$

$$K = 4(3k + 1)^2 + 1 = \boxed{}$$

$$K = 16k^2 + 16k^2 + \boxed{} + 8k + 4 + 1$$

$$K = (\boxed{}) + (16k^2 + 8k + 1) + (4k^2)$$

$$K = (4k + 2)^2 + (\boxed{})^2 + (2k)^2$$

Liczba k jest naturalna, zatem każda z liczb $4k + 2$, $4k + 1$, $2k$ jest liczbą naturalną.

– Liczba p w dzieleniu przez 3 daje resztę 2, czyli można ją zapisać w postaci $p =$

$\boxed{}$, gdzie k jest liczbą naturalną dodatnią.

Wtedy:

$$K = 4p^2 + 1$$

$$K = 4(3k + 2)^2 + 1 = \boxed{}$$

$$K = 16k^2 + 16k^2 + 4k^2 + 24k + \boxed{} + 9 + 4$$

$$K = (16k^2 + 24k + 9) + (16k^2 + 16k + 4) + (\boxed{})$$

$$K = (\boxed{})^2 + (4k + 2)^2 + (2k + 2)^2$$

Liczba k jest naturalna, zatem każda z liczb $4k + 3$, $4k + 2$, $2k + 2$ jest liczbą naturalną.

$$16k^2 + 8k + 4$$

$$4k + 3$$

$$36k^2 + 24k + 5$$

$$36k^2 + 48k + 17$$

$$16k^2 + 16k + 4$$

$$4k^2 + 8k + 4$$

$$4k + 1$$

$$4k^2 + 16k$$

$$3k + 2$$

Ćwiczenie 5



Połącz w pary równe wyrażenia.

$$(2a + 1)^2 - 2a$$

$$(2a + 1)^2 + (a^2 - a - 1)^2$$

$$(2a^2)^2 - (2a^2 - 1)^2$$

$$(3a + 7)^2 - (5a + 13)^2$$

$$1 - (11 + 4a)^2$$

$$(2a)^2 - 1$$

$$(a^2 - a + 1)^2 + 8a + 1$$

$$(a + 1)^2 + 3a^2$$

Ćwiczenie 6



Zaznacz, która równość jest prawdziwa, a która fałszywa.

Równość	Prawda	Fałsz
$(x + y)^2 - (x - y)^2 = -4xy$	☐	☐
$x - y)^2 + (x + y)^2 = 2y^2 + 2x^2$	☐	☐
$(x + y)^2 - (y - x)^2 = 4xy$	☐	☐
$x - y)^2 - (x + y)^2 = -2x^2 - 2y^2$	☐	☐

Ćwiczenie 7



Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $x^2 + y^2 = z^2$, gdzie x, y, z (w tej kolejności), to kolejne liczby naturalne.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że równanie $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 + (x + 4)^2 = y^2$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Fascynujące tożsamości – wzór na kwadrat sumy oraz wzór na kwadrat różnicy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$;

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy oraz wzór na kwadrat sumy w obliczeniach arytmetycznych i algebraicznych
- sprowadza do najprostszej postaci wyrażenia algebraiczne
- przedstawia liczby w postaci sumy kwadratów
- stosuje i wykorzystuje strategię podczas rozwiązywania zadań, nawet w sytuacjach nietypowych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- małe kroki

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie, na podstawie wcześniejszych wiadomości oraz zawartych w materiale animacji, w małych grupach sporządzają mapy myśli pokazujące zastosowania wzorów skróconego mnożenia na kwadrat różnicy i na kwadrat sumy.
2. Przedstawiciele grup prezentują wykonane mapy – wspólna wymiana informacji na temat wykorzystania wzorów skróconego mnożenia na kwadrat różnicy i kwadrat sumy.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach pracują metodą małych kroków – analizują kolejne przykłady zapisane w sekcji „Przeczytaj” i starają się wymyśleć podobny przykład, który zapisują na mapie myśli.
2. Na tym etapie pracy nauczyciel jest doradcą i krytycznym obserwatorem – akceptującym zapisane przez grupy zadania lub wskazującym elementy do poprawy.
3. Grupy wymieniają się sporządzonymi mapami i starają się rozwiązać jak najwięcej zapisanych tam zadań.
4. Po upływie wyznaczonego czasu, grupy prezentują wybrane zadania i ich rozwiązania.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
Liderzy grup dzielą się ciekawymi pomysłami lub trudnościami, które pojawiły się w czasie pracy.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń 1 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy](#)
- [Wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać w czasie zajęć wprowadzających wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego.