



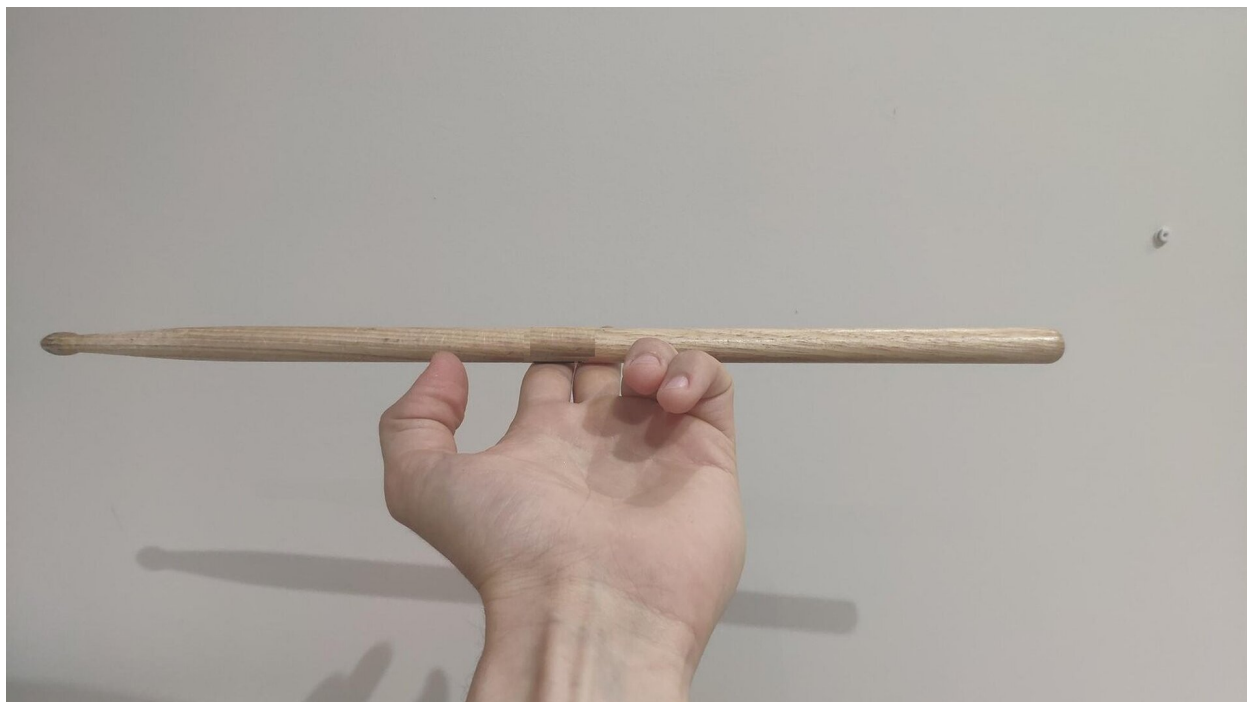
Co to jest środek masy?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

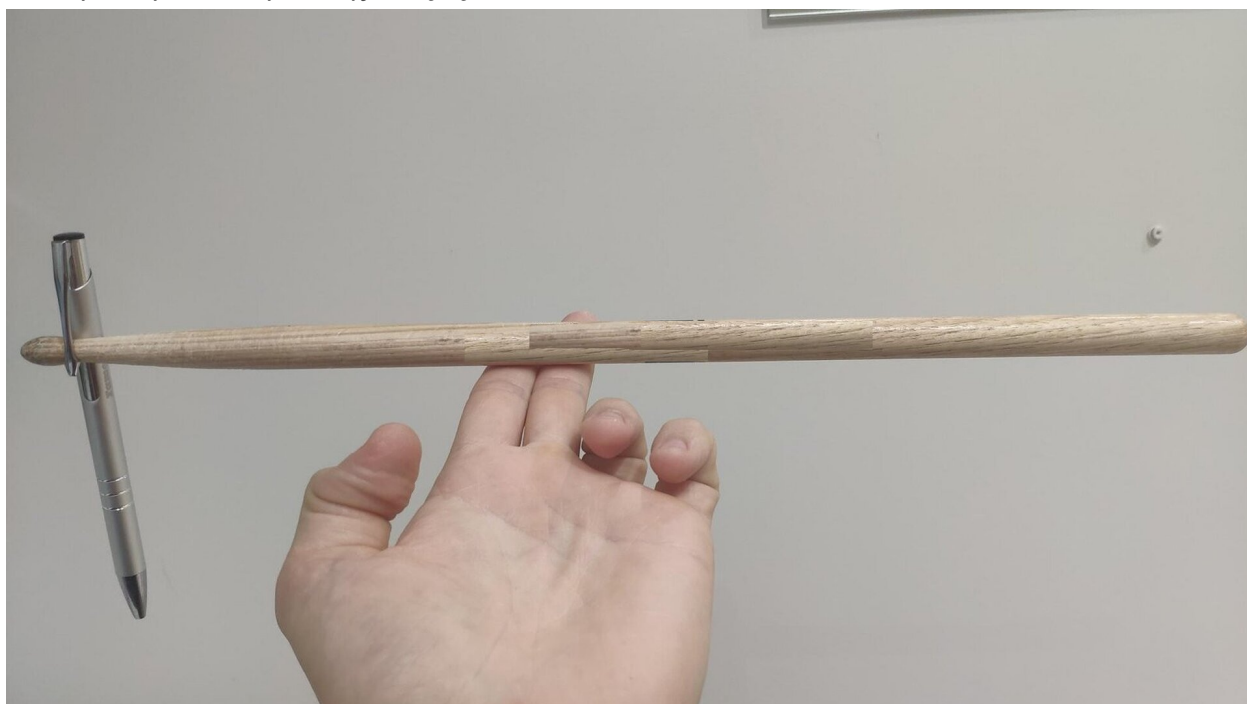


Czy to nie ciekawe?

Wyobraź sobie, że wracasz ze spaceru z lasu i trzymasz w ręku długi patyk. Jeśli spróbujesz utrzymać go poziomo, uda ci się to bez wysiłku, jeśli chwycisz go w środku; za to utrzymanie go poziomo, gdy trzymamy jeden z końców wymaga dużej siły. Co więcej – na samym środku w ogóle nie musimy tego patyka trzymać – wystarczy, że go podeprzemy od spodu, choćby jednym placem. Dlaczego tak się dzieje?



Fot. 1. Podparta pałeczka perkusyjna będąca w równowadze.



Fot. 2. Podparta pałeczka perkusyjna obciążona na jednym z końców długopisem, układ będący w równowadze.

Twoje cele

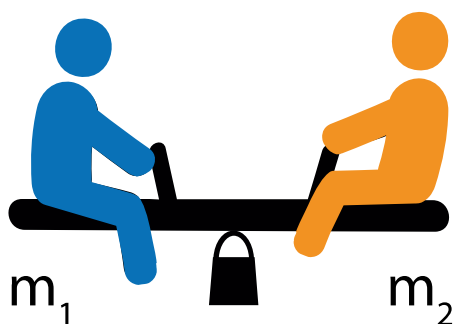
W tym e-materiale:

- dowiesz się, jaka jest intuicyjna oraz matematyczna definicja **środka masy i środka ciężkości**,
- zrozumiesz, dlaczego podparcie ciała w środku masy nie powoduje jego obrotu,
- zrozumiesz, do czego wykorzystujemy pojęcie środka masy w statyce i dynamice,
- ocenisz wpływ masy i sposobu jej rozłożenia na położenie środka masy.

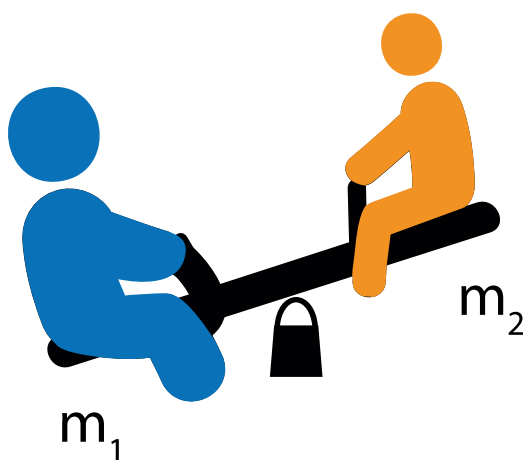
Przeczytaj

Warto przeczytać

Pojęcie środka masy można zrozumieć, obserwując dzieci bawiące się na huśtawce. Na środku huśtawki mamy punkt podparcia, a po obu jej stronach w tej samej odległości l od środka mamy krzeselka. Jeśli usiądą na nich dzieci o tych samych masach ($m_1 = m_2$), jak na Rys. 1., to dość łatwo zachować im równowagę i oboje użyją takiej samej siły, żeby odepchnąć się od podłoża. Jeśli jednak jedno z dzieci będzie cięższe ($m_1 > m_2$), to huśtawka przechyli się na jego stronę, jak na Rys. 2. Dlaczego tak się dzieje?

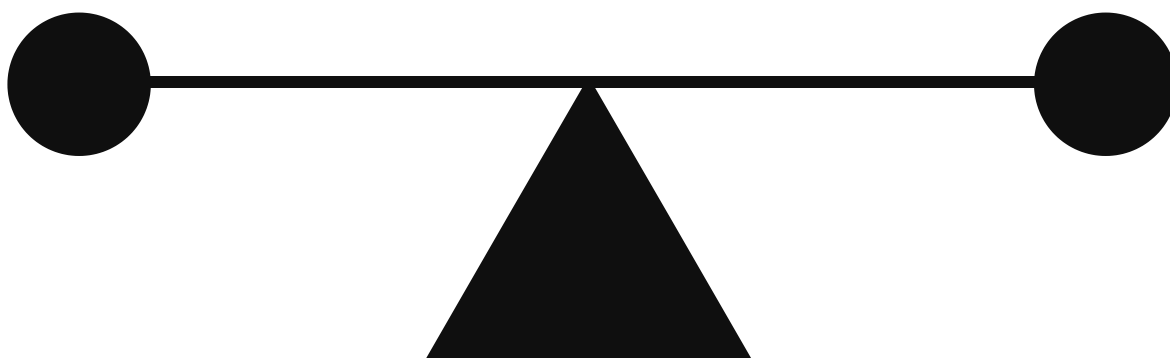


Rys. 1. Dzieci na huśtawce – każde z nich o tej samej masie. Środek masy tego układu znajduje się pośrodku

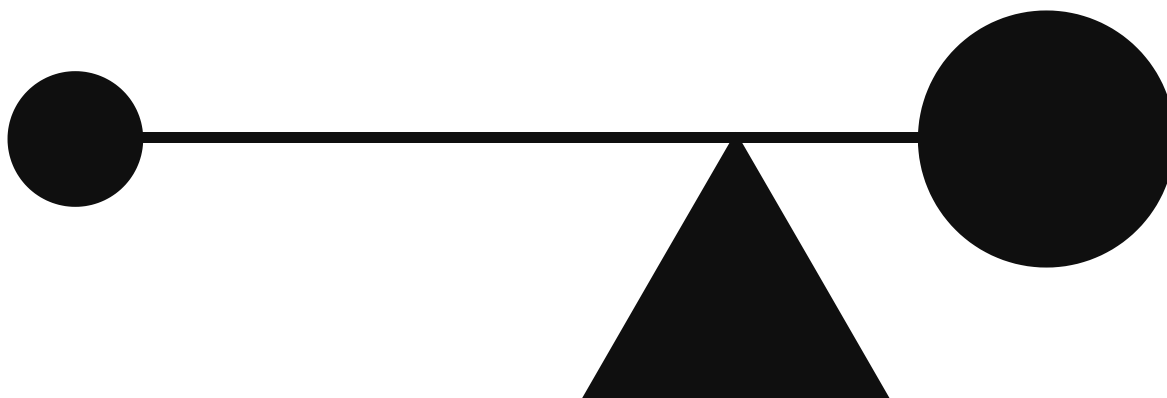


Rys. 2. Dzieci na huśtawce – każde z nich ma inną masę. Środek masy jest przesunięty w stronę dziecka o większej masie

Możemy wykonać analogiczne proste doświadczenie – jeśli weźmiemy do ręki podłużny przedmiot (np. kij, patyk, długopis) łatwo zobaczymy, że aby utrzymać go poziomo, wystarczy podeprzeć go palcem w środku. Zwiększmy teraz masę jednego z końców przedmiotu, np. doklejając do niego plastelinę. Okazuje się, że aby zachować poziome ułożenie, nasz palec musi podparć ten obiekt już nie w jego geometrycznym środku (Rys. 3.), ale bliżej tej dodatkowej masy (Rys. 4.). Im większa będzie ta masa, tym dalej od środka będziemy musieli umieścić punkt podparcia.

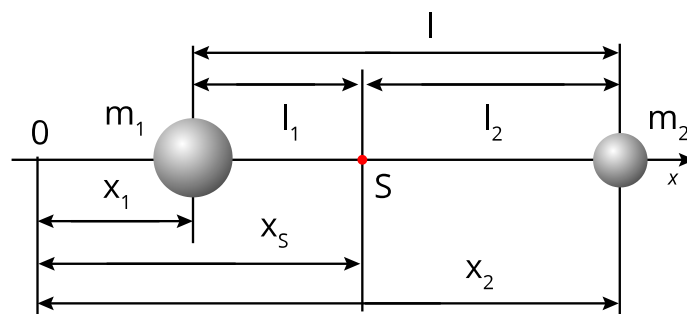


Rys. 3. Obciążony pręt podparty w środku masy, układ w równowadze. Masy kul są równe



Rys. 4. Obciążony pręt podparty w środku masy, układ w równowadze. Masy kul są różne

Analizując powyższe przykłady, widzimy, że położenie środka masy zależy od tego, jak rozłożona jest masa względem wybranego punktu. Było to odwołanie się do codziennych doświadczeń i wyrabianie intuicji. Przejdźmy teraz do matematycznej definicji środka masy.



Rys. 5. Ilustracja środka masy [źródło: http://ilf.fizyka.pw.edu.pl/podrecznik/images/2_4_5_slide0044_image035.svg]

Zacznijmy od przypadku jednowymiarowego, gdy masy ułożone są wzdłuż jednej prostej, osi OX o początku w punkcie O (Rys. 5.). Środek masy znajduje się w punkcie S , którego odległość od O jest **średnią ważoną** położen względem początku przyjętego **układu odniesienia** wszystkich składowych elementów ciała. Za wagi przyjmujemy właśnie masy tych elementów. Dla dwóch ciał o masach m_1 i m_2 znajdujących się w odległości l możemy wyrazić odległość x_s od środka układu O , gdzie znajduje się środek masy S :

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} . \quad (1)$$

Sprawdźmy, gdzie znajduje się środek masy, jeśli masy obu kulek są jednakowe. Wtedy

$$x_s = \frac{m x_1 + m x_2}{m + m} = \frac{x_1 + x_2}{2} .$$

Zauważmy teraz, że $l = x_2 - x_1$, więc $x_2 = l + x_1$, zatem

$$x_s = \frac{x_1 + x_1 + l}{2} = x_1 + \frac{l}{2} .$$

Jeśli przyjmijemy $x_1 = 0$, czyli umiejscowimy początek **układu odniesienia** w środku lewej kuli, to dochodzimy do wniosku, że $x_s = \frac{l}{2}$. Czyli mamy wcześniejszy intuicyjny wniosek, że środek masy znajduje się w połowie odcinka łączącego środki kul.

Jeśli masy kul będą różne, to środek masy będzie przesuwiał się w stronę kuli o większej masie – jak w przykładzie z huśtawką i cięższym dzieckiem po jednej stronie, a lżejszym po drugiej. Jeśli chcemy, aby huśtawka była w równowadze, należy podeprzeć ją bliżej cięższego dziecka.

Powyższy przykład dotyczy układu dwóch kul lub dwójki dzieci. Jeśli liczba ciał wynosi n i leżą na jednej prostej, to wtedy położenie środka masy wyrażamy wzorem

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} . \quad (2)$$

Jeśli ciała nie leżą na jednej prostej, to wzór powyższy uogólnia się poprzez zastosowanie wektorów położenia, oznaczanych przez $\vec{r}_i$. Wektor położenia środka masy to

$$\vec{r}_s = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} . \quad (3)$$

Wzór (2) jest szczególnym przypadkiem (3), gdy wszystkie wektory są do siebie równoległe i wybraliśmy równoległą do nich oś x

Po co nam pojęcie środka masy? Środek masy to taki punkt ciała, który często z dobrym przybliżeniem zachowuje się tak, jak gdyby była w nim skupiona masa całego ciała. Pojęcie to jest bardzo użyteczne w mechanice, ponieważ pozwala opisać ruch i zachowanie się ciała nawet o skomplikowanej geometrii w bardzo prosty sposób. Jeśli opisujemy ruch postępowy obiektu, to nie musimy opisywać ruchu każdej jego części – wystarczy, że opiszemy ruch postępowy jego środka masy. Z kolei swobodny ruch obrotowy obiektu będzie odbywał się dookoła osi przechodzącej przez jego środek masy. Wtedy coś, co na pierwszy rzut oka wygląda skomplikowanie (jak ruch rzuconego młotka, czy wykonującego salta skoczka przed kontaktem z wodą) staje się prostym złożeniem dwóch ruchów: ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego ciała wokół pewnej osi przechodzącej przez środek masy.

Siła ciężenia (grawitacji) jest w jednorodnym polu grawitacyjnym przyłożona właśnie do środka masy – dlatego mówimy o **środku ciężkości**. Jedynie w niejednorodnym polu grawitacyjnym środek masy i środek ciężkości nie pokrywają się ze sobą. W polu grawitacyjnym, które z dobrym przybliżeniem jest jednorodne, jak pole grawitacyjne przy powierzchni Ziemi, przyjmujemy, że środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy. W przykładach z kijem, aby osiągnąć równowagę ciała (choćby niestabilną równowagę na kilka chwil), musieliśmy podeprzeć go właśnie w jego środku ciężkości. Jeśli podpieramy go poza jego środkiem ciężkości, zaczyna on się obracać i wypada nam z ręki.

Słowniczek

Średnia (arytmetyczna) ważona

(ang.: *weighted arithmetic average*) średnia z wartości z uwzględnieniem różnego „wkładu” poszczególnych wartości do obliczanej średniej:

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n} ,$$

gdzie nieujemne wielkości $w_1, w_2, \dots, w_n$ to wagi, a $x_1, x_2, \dots, x_n$ – uśredniane wartości. Dla jednakowych wag otrzymujemy zwykłą średnią arytmetyczną.

Niekiedy (i -tą) wagą nazywa się iloraz $\frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j}$. Wtedy suma wag z definicji wynosi 1, a każda z nich spełnia warunek $0 \leq w_i \leq 1$. Przypadek zwykłej średniej arytmetycznej to $w_i = \frac{1}{n}$ dla wszystkich i .

Układ odniesienia

(*ang.: frame of reference*) – ciało, względem którego opisujemy ruch innych ciał.

Animacja

Co to jest środek masy?

Obejrzyj animację, która pozwoli na wyrobienie nieco intuicji odnośnie pojęcia środka masy układu.

Polecenie 1

Dane są trzy punkty na płaszczyźnie: $A(-2; 1)$, $B(3; 2)$, $C(0; -1)$. W tych punktach umieszczono ciała o masach $m_A = 2 \text{ kg}$, $m_B = 1 \text{ kg}$, $m_C = 6 \text{ kg}$.

- (i) Zapisz wektory położenia ciał w punktach.
- (ii) Bez wykonywania obliczeń spróbuj przewidzieć położenie środka masy tego układu.
- (iii) Wyznacz to położenie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



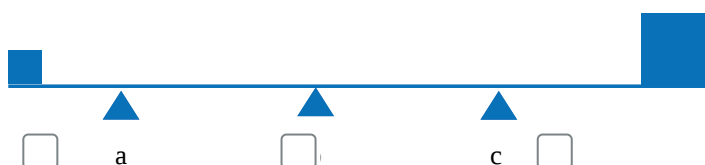
Jak zdefiniowany jest środek masy?

- ☐ Średnia arytmetyczna ważona położen obiektów w układzie, wagami są masy obiektów
- ☐ Średnia harmoniczna położen obiektów w układzie
- ☐ Średnia arytmetyczna położen obiektów w układzie

Ćwiczenie 2



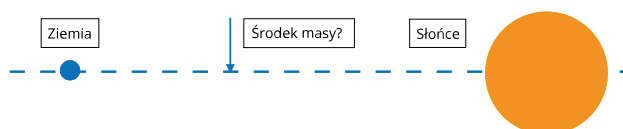
Określ punkt, w którym należy podeprzeć huśtawkę, aby była w równowadze. Zakładamy, że klocki są jednorodne i wykonane z identycznego materiału.



Ćwiczenie 3



Rysunek (nie w skali!) ilustruje Ziemię o masie M_Z i Słońce o masie około 333 tysięcy M_Z . Gdzie, orientacyjnie, znajduje się środek masy tego układu?



- ☐ W połowie odległości od Ziemi do Słońca
- ☐ Za połową, trochę bliżej Ziemi
- ☐ Za połową, trochę bliżej Słońca
- ☐ Za połową, bardzo blisko środka Słońca
- ☐ Nie wyznacza się środka mas tak wielkich układów, szczególnie gdy są w ruchu
- ☐ Należy wziąć pod uwagę obecność innych planet i księżyców, aby odpowiedzieć na to pytanie

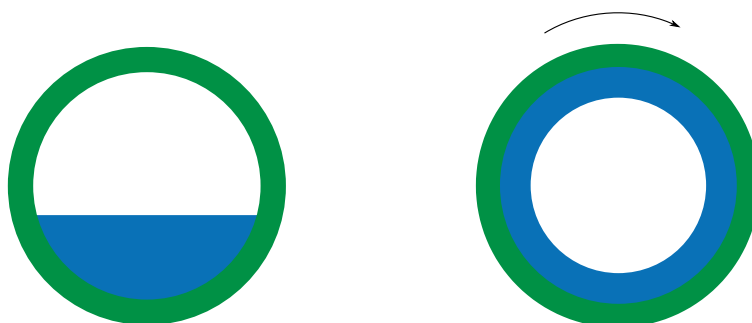
Ćwiczenie 4



W układzie obracającym się na jego elementy oddziałuje siła odśrodkowa, co można poczuć np. siedząc na rozkręconej karuzeli. Jeśli obraca się układ z cieczą, to siła odśrodkowa sprawia, że ciecz przemieszcza się na zewnątrz, oddalając się od środka osi obrotu.

Wyobraźmy sobie na przykład bęben w pralce. Zanim bęben zacznie się obracać, woda znajduje się na jego dnie. Gdy bęben obraca się odpowiednio szybko, woda odrzucana jest w stronę ścianek, tworząc „pierścień”, jak na rysunku poniżej.

Jak zmieni się położenie środka masy tego układu po włączeniu pralki?



☐ Położenie środka masy podniesie się

☐ Położenie środka masy obniży się

☐ Położenie środka masy nie zmieni się

Ćwiczenie 5



Astronauta w trakcie misji wykonywał spacer, czyli opuścił stację kosmiczną (np. prowadził naprawy w zewnętrznej części stacji) i wskutek błędu stracił z nią kontakt, a zaniedbał procedurę wymuszającą przypięcie się podczas spaceru liną do stacji. Jak w tej sytuacji może zmienić ułożenie swojego ciała, żeby z powrotem dostać się do stacji?



Żadna zmiana ułożenia ciała nie wpłynie na ruch postępowy środka masy, czyli nic nie może zrobić, żeby wrócić do stacji



Może próbować wykonać obroty (salta) w kierunku stacji, biorąc zza głowy zamach rękami, zginając ciało w stronę nóg



Może poruszać się ruchem „robaczkowym”, na przemian powoli zginając nogi i ramiona, a następnie gwałtownie je prostując

Ćwiczenie 6



Stojak parasola ogrodowego jest często wyposażony w plastikowy zbiornik na wodę. Po co napełniamy go wodą?



- ☐ Chcemy obniżyć środek masy całego układu, co poprawia stabilność.
- ☐ Stosujemy wodę, bo przy wlewaniu rozptywa się na boki, przez co środek masy przesuwa się z daleka od osi parasola, poprawiając stabilność.
- ☐ Woda zapewnia lepsze przyleganie podstawy do podłoża, co poprawia stabilność.
- ☐ Chcemy zwiększyć masę całego układu, co poprawia stabilność.

Ćwiczenie 7



W cysternach przewożone są substancje ciekłe (woda, mleko, olej napędowy, benzyna, skroplony gaz). Gdy ciecz zmienia swoje położenie (w trakcie hamowania, przyspieszania lub skręcania), to zmienia się położenie jej środka ciężkości. Kiedy zmiany środka ciężkości będą większe – przy cysternie zatankowanej do pełna czy do połowy?

☐ Poziom napełnienia nie ma znaczenia

☐ Do pełna

☐ Do połowy

☐ To zależy od rodzaju cieczy

Ćwiczenie 8



Środek masy układu dwóch ciał znajduje się na odcinku łączącym te ciała.

Środek masy układu trzech ciał - zakładając, że nie znajdują się na jednej prostej - w trójkącie wyznaczonym przez te ciała.

Środek masy układu czterech ciał - zakładając, że nie znajdują się na jednej płaszczyźnie - we wnętrzu czworościanu wyznaczonego przez te ciała.

Czy możemy sformułować jakieś ogólne, jakościowe stwierdzenie na temat położenia środka masy? Oczywiście poprzestajemy na przestrzeni trójwymiarowej, ale możemy zwiększać liczbę obiektów w układzie.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Co to jest środek masy?
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa	Cele kształcenia - wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji lub doświadczeń oraz wnioskowanie na podstawie ich wyników. Zakres rozszerzony Treści nauczania - wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach; 10) przeprowadza wybrane obserwacje, pomiary i doświadczenia korzystając z ich opisów; planuje i modyfikuje ich przebieg; formułuje hipotezę i prezentuje kroki niezbędne do jej weryfikacji; III. Mechanika bryły sztywnej. Uczeń: 1) wyznacza położenie środka masy układu ciał.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r. • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się, • kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. podaje intuicyjną oraz matematyczną definicję środka masy i środka ciężkości. 2. wyjaśnia, dlaczego podparcie ciała w środku masy nie powoduje jego obrotu. 3. doświadczalnie znajduje położenie środka masy układu ciał. 4. wskazuje, do czego wykorzystujemy pojęcie środka masy w statyce i dynamice.
Strategie i metody nauczania:	Strategia eksperymentalno-obserwacyjna.
Formy zajęć:	- pokaz, - praca indywidualna, - dyskusja, - projekcja animacji.
Środki dydaktyczne:	- podłużny przedmiot (np. patyk, kij od szczotki, długa linijka, długopis), - obciążniki (np. plastelina).
Materiały pomocnicze	-
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel razem z uczniem-ochotnikiem przeprowadzają prosty pokaz - próbują podeprzeć podłużny przedmiot (np. kij) jednym palcem tak, aby pozostał w pozycji poziomej. Udaje się to dość prosto, następnie nauczyciel do jednego z końców doczepia obciążnik - uczeń znajduje nowe położenie równowagi. Doświadczenie można powtórzyć dla kilku obciążników.	
Faza realizacyjna:	

- Nauczyciel prowadzi grupową dyskusję nad wnioskami z eksperymentu. Można go sformułować: - istotne dla położenia punktu podparcia są dwa czynniki: wielkość masy i jej odległość od drugiej masy. Nauczyciel tłumaczy czym jest środek masy, podając definicję, która podsumowuje powyższe intuicyjne obserwacje.
- Nauczyciel zwraca uwagę, że układy mogą być bardziej skomplikowane i mieć więcej wymiarów - dla zobrazowania przeprowadzonego doświadczenia nauczyciel prezentuje uczniom animacji z niniejszego e-materiału. Po projekcji następuje dyskusja i odpowiedzi na pytania. Dla upewnienia się, że pojęcia są zrozumiałe, uczniowie indywidualnie rozwiązują zadania 1-3 z niniejszego e-materiału.
- Na koniec w grupach uczniowie dyskutują nad rozwiązaniem zadań 4 i 5.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel podsumowuje odpowiedzi grup na temat zadań 4 i 5, wyjaśniając ewentualne nieporozumienia.

Nauczyciel podsumowuje zaprezentowane treści (definicję środka masy i środka ciężkości) i odpowiada na pytania uczniów.

Praca domowa:

Zasugerować rozwiązanie zadań, będących częścią tego e-materiału, których nie rozwiązano w trakcie lekcji.

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:

Nauczyciel może polecić uczniom obejrzenie e-materiału w domu, przed lekcją.