



Długości odcinków w prostopadłości

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Długości odcinków w prostopadłościanie

Źródło: dostępny w internecie: pikrepo.com, domena publiczna.

Mamy już podstawową wiedzę na temat prostopadłościanu. Znamy elementy jego budowy oraz potrafimy obliczyć sumę długości wszystkich jego krawędzi. Ta wiedza pozwoli nam na obliczanie długości odcinków w prostopadłościanach.

Twoje cele

- Wyprowadzisz wzór na długość przekątnej prostopadłościanu o zadanych długościach krawędzi.
- Zauważysz zależności występujące pomiędzy odcinkami w prostopadłościanie.
- Obliczysz długości odcinków w prostopadłościanie.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

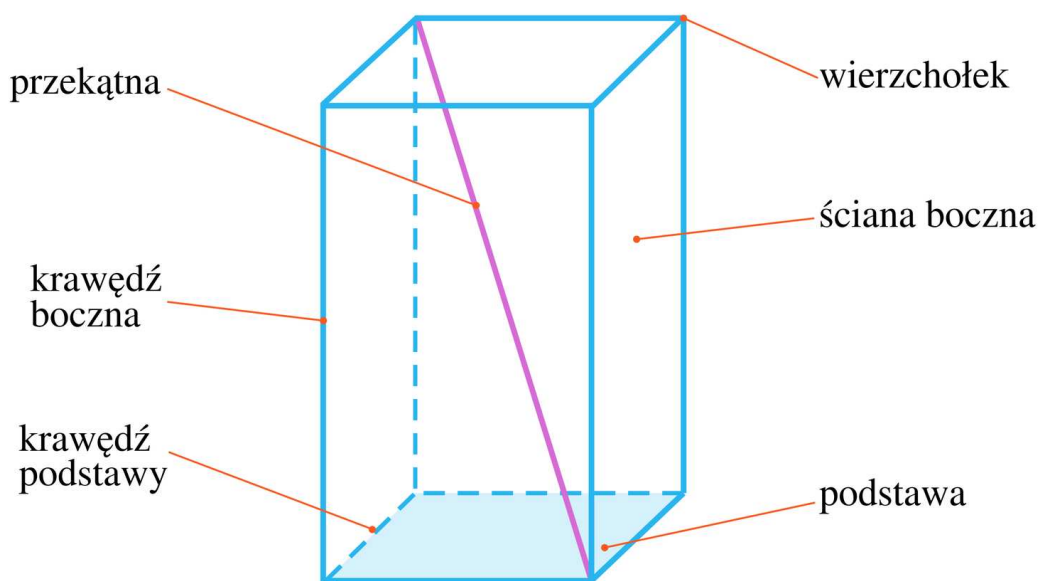
Wiemy już, że **prostopadłościan** to bryła przestrzenna posiadająca cztery prostokątne ściany boczne oraz prostokąty w podstawach.

Prostopadłościan składa się z:

- 12 krawędzi,
- 8 wierzchołków,
- 6 ścian.

Możemy powiedzieć, że prostopadłościan to równoległościan, w którym każde dwie ściany mające wspólną krawędź są prostopadłe.

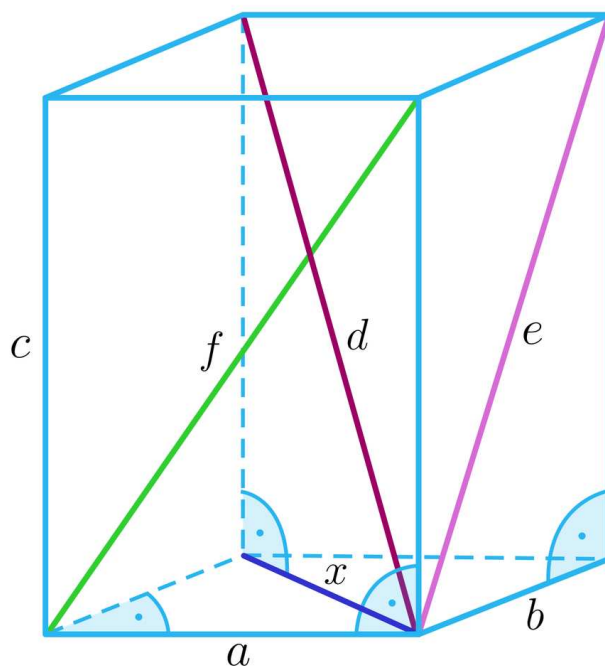
Dla ułatwienia, przypomnijmy elementy budowy prostopadłościanu, analizując poniższą ilustrację.



Długości odcinków w prostopadłościanie

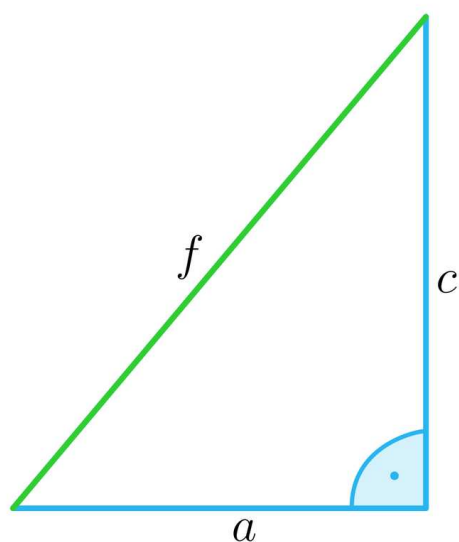
Analizując budowę prostopadłościanu możemy zauważyć, że krawędzie boczne oraz krawędzie podstawy to nie jedyne odcinki, jakie znajdziemy w prostopadłościanie. Często niewiadomymi pozostają długości przekątnych ścian bocznych, przekątne podstawy, czy nawet przekątne prostopadłościanu.

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



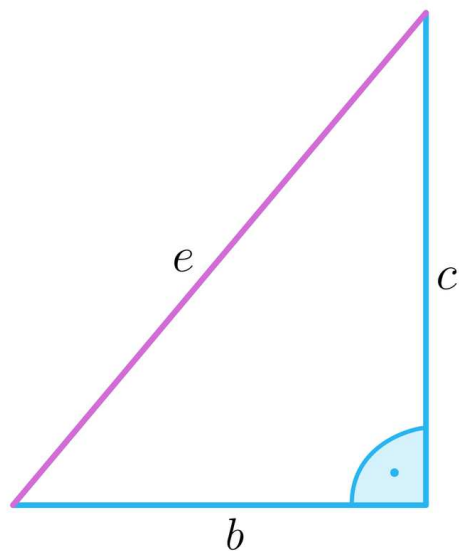
1. Długość przekątnej ściany bocznej prostopadłościanu.

W prostopadłościanie mamy dwie pary ścian bocznych o różnych wymiarach. Zatem długości ich przekątnych obliczymy, korzystając z dwóch trójkątów prostokątnych.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, mamy zależność $f^2 = a^2 + c^2$, wobec tego

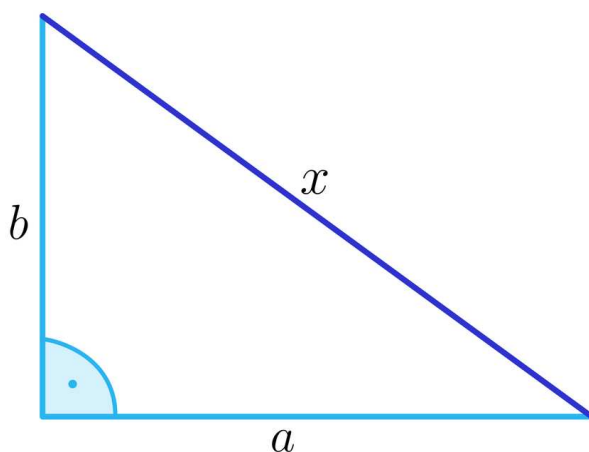
$$f = \sqrt{a^2 + c^2}$$



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, mamy zależność $e^2 = b^2 + c^2$, wobec tego

$$e = \sqrt{b^2 + c^2}$$

2. Długość przekątnej podstawy prostopadłościanu.

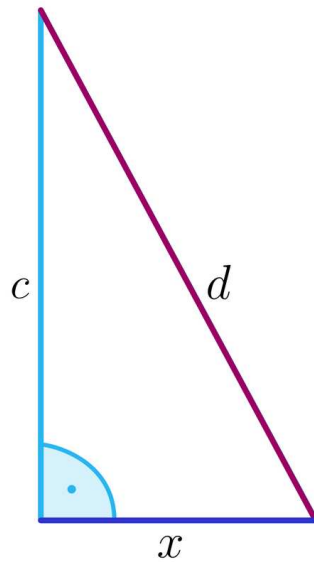


Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy zależność $x^2 = a^2 + b^2$, więc długość przekątnej podstawy prostopadłościanu x obliczamy ze wzoru

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3. Długość przekątnej prostopadłościanu.

Zauważmy, że długość przekątnej d możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa w poniższym trójkącie.



Zatem:

$$x^2 + c^2 = d^2$$

Ponieważ zachodzi zależność

$$a^2 + b^2 = x^2,$$

wobec tego

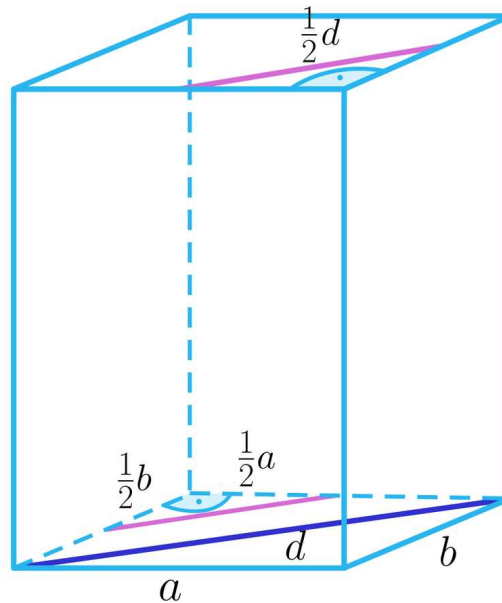
$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

Jeżeli krawędzie prostopadłościanu mają długości a , b , c , to długość przekątnej prostopadłościanu obliczamy ze wzoru:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

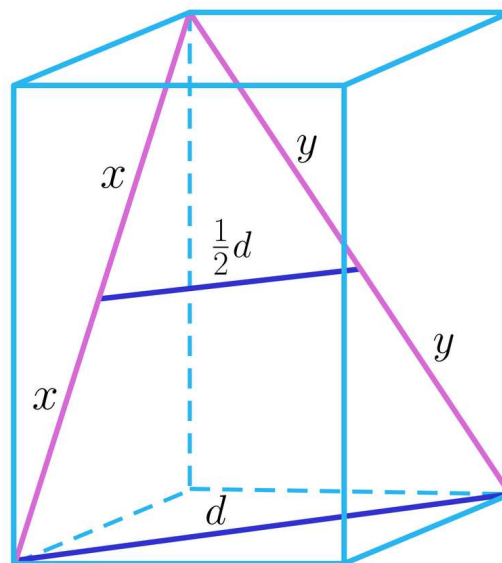
W prostopadłościanie możemy wyznaczyć także długości innych odcinków np.:

- długość odcinka łączącego środki sąsiednich krawędzi w podstawie prostopadłościanu,



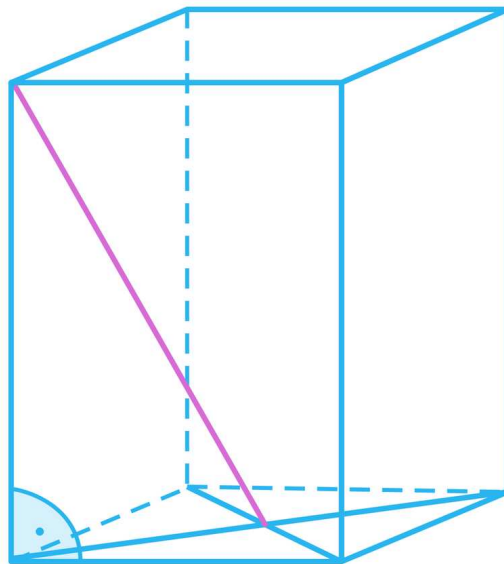
czyli długość odcinka łączącego środki sąsiednich krawędzi w podstawie prostopadłościanu jest równa połowie długości przekątnej tej podstawy;

- długość odcinka łączącego środki przekątnych sąsiednich ścian bocznych w prostopadłościanie,



czyli długość odcinka łączącego środki przekątnych sąsiednich ścian bocznych w prostopadłościanie jest równa połowie długości przekątnej podstawy tego prostopadłościanu;

- długość odcinka łączącego punkt przecięcia przekątnych dolnej podstawy z jednym z wierzchołków górnej podstawy prostopadłościanu,



czyli długość odcinka łączącego punkt przecięcia przekątnych dolnej podstawy z jednym z wierzchołków górnej podstawy prostopadłościanu wyznaczamy korzystając z twierdzenia Pitagorasa dot. trójkąta prostokątnego wyznaczonego przez ten odcinek, krawędź boczną oraz odcinek będący połową długości przekątnej podstawy prostopadłościanu.

Przykład 1

Obliczymy długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach: $a = 2$ cm, $b = 1$ cm, $c = 2\sqrt{2}$ cm.

Rozwiązanie:

Podstawmy odpowiednie długości do wzoru na długość przekątnej prostopadłościanu:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{2^2 + 1^2 + (2\sqrt{2})^2}$$

$$d = \sqrt{4 + 1 + 8} = \sqrt{13}$$

$$d = \sqrt{13}$$

Przekątna omawianego prostopadłościanu ma długość $\sqrt{13}$ cm.

Przykład 2

Wyznamy długości krawędzi prostopadłościanu, jeżeli wiadomo, że jego przekątna ma długość $\sqrt{155}$, a krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka są kolejnymi liczbami

nieparzystymi.

Rozwiązanie:

Niech a, b, c będą długościami krawędzi prostopadłościanu, wychodzącymi z jednego wierzchołka.

Ponieważ ich długości są kolejnymi liczbami nieparzystymi, to

$$a = 2n + 1$$

$$b = 2n + 3$$

$$c = 2n + 5$$

gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

Skoro przekątna prostopadłościanu ma długość $\sqrt{155}$, zatem do wyznaczenia wartości n wykorzystamy wzór na długość przekątnej prostopadłościanu:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\left(\sqrt{155}\right)^2 = \sqrt{(2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2}$$

Po podniesieniu obu stron równania do kwadratu otrzymujemy:

$$155 = (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2$$

$$155 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25$$

$$12n^2 + 36n - 120 = 0$$

$$n^2 + 3n - 10 = 0$$

$$n_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 < 0$$

$$n_2 = \frac{-3+7}{2} = 2 > 0$$

Wobec tego krawędzie prostopadłościanu mają długości:

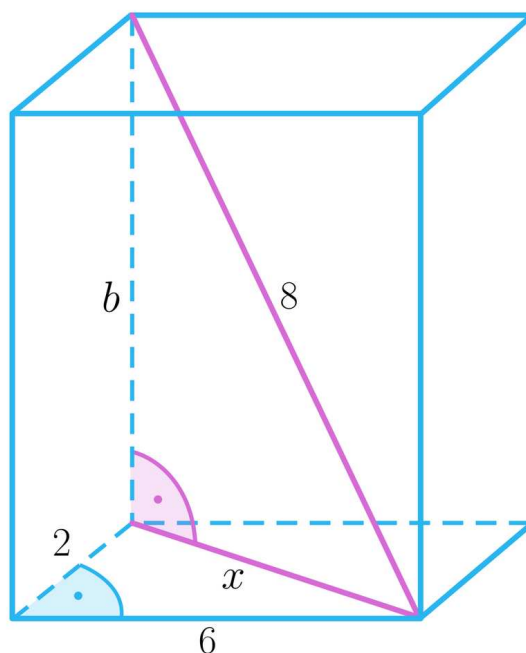
$$a = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$b = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$$c = 2 \cdot 2 + 5 = 9$$

Przykład 3

Obliczymy długość wysokości prostopadłościanu przedstawionego na poniższym rysunku.



Rozwiązanie :

Zanim wykonamy obliczenia, to przypomnijmy, że wysokość prostopadłościanu jest również jego krawędzią boczną.

Obliczymy najpierw długość przekątnej podstawy prostopadłościanu, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 = 6^2 + 2^2, \text{ zatem } x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Obliczamy wysokość prostopadłościanu, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 + b^2 = 8^2$$

$$(\sqrt{40})^2 + b^2 = 8^2$$

$$b^2 = 24$$

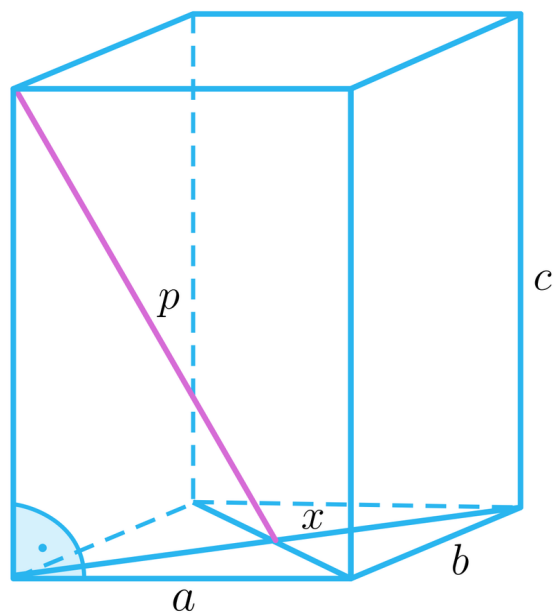
$$\text{Zatem } b = 2\sqrt{6}.$$

Wysokość omawianego prostopadłościanu wynosi $2\sqrt{6}$.

Przykład 4

Wykażemy, że jeśli krawędzie prostopadłościanu mają długości a, b, c , to długość odcinka p zaznaczonego na poniższym rysunku wyraża się wzorem:

$$p = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2}$$



Rozwiązanie:

Jeżeli x jest długością przekątnej podstawy tego prostopadłościanu, to:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, rozwiązujemy równanie:

$$p^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + c^2$$

$$p^2 = \frac{1}{4}x^2 + c^2$$

$$p^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2$$

$$p^2 = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2) + c^2$$

$$p^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2$$

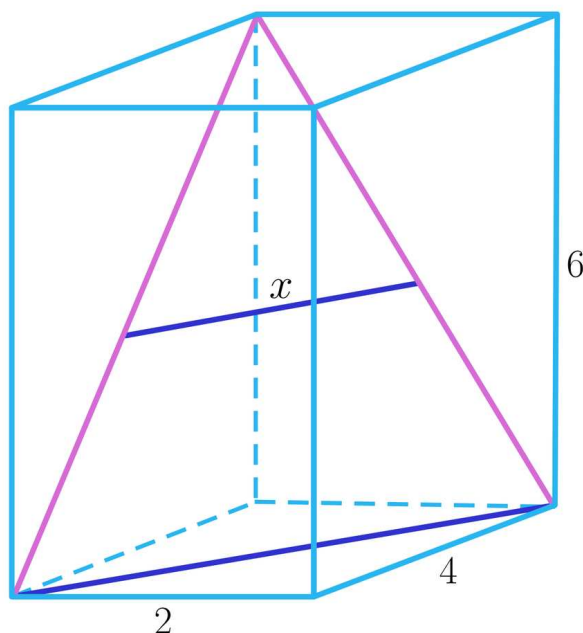
Wobec tego $p = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2}$.

Przykład 5

Obliczymy długość odcinka łączącego środki przekątnych sąsiednich ścian bocznych w prostopadłościanie, którego podstawa ma wymiary 2 na 4, a krawędź boczna ma długość 6.

Rozwiązanie:

Narysujmy prostopadłościan, odpowiednie odcinki oraz wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Ponieważ długość odcinka x jest równa połowie długości przekątnej podstawy prostopadłościanu, zatem

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{20} = \sqrt{5}$$

Słownik

prostopadłościan

graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami

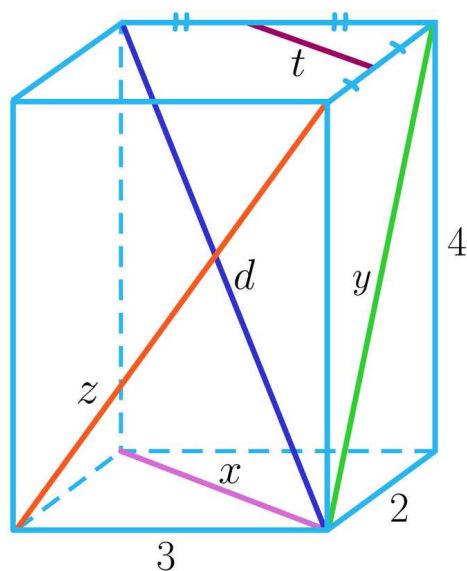
Infografika

Polecenie 1

Przypomnij sobie, jak obliczamy długości niektórych odcinków w prostopadłościanie, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Polecenie 2

Wyznacz długości odcinków zaznaczonych w poniższym prostopadłościanie.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu, jeżeli jego podstawą jest prostokąt o bokach o 2 i 4, a suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 48. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $\sqrt{12}$

☐ $\sqrt{48}$

☐ $2\sqrt{14}$

Ćwiczenie 2



Dany jest prostopadłościan, którego podstawą jest prostokąt o bokach 2 cm i 3 cm, a jego krawędź boczna ma długość 6 cm. Przeciągnij prawidłowe wielkości w odpowiednie miejsca.

Przekątna podstawy prostopadłościanu ma długość

Przekątna omawianego prostopadłościanu ma długość

Przekątna mniejszej ściany bocznej prostopadłościanu ma długość

Przekątna większej ściany bocznej prostopadłościanu ma długość

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Wiadomo, że odcinek łączący środki sąsiednich krawędzi w podstawie prostopadłościanu ma długość 5, a jedna z krawędzi podstawy tego prostopadłościanu jest o 2 dłuższa od drugiej krawędzi. Przekątna prostopadłościanu ma długość 14.

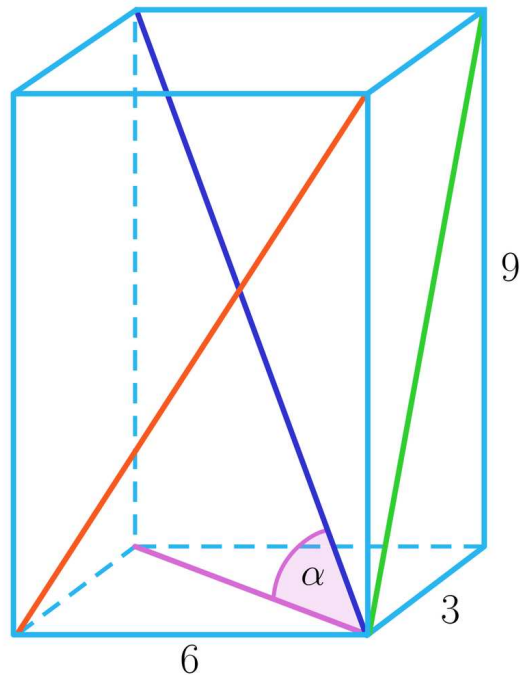
Zatem:

- długość przekątnej podstawy prostopadłościanu wynosi: ,
- obwód podstawy prostopadłościanu jest równy ,
- krawędź boczna ma długość ,
- przekątna mniejszej ściany bocznej ma długość .

Ćwiczenie 5



Zapoznaj się z rysunkiem poniżej i zwróć uwagę na wyróżnione na nim przekątne.



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ Przekątne dwóch ścian bocznych prostopadłościanu mają długości $3\sqrt{10}$.

☐ Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 60.

☐ Przekątna prostopadłościanu ma długość $3\sqrt{14}$.

☐ Przekątna podstawy prostopadłościanu jest dłuższa niż przekątna ściany bocznej o mniejszej powierzchni.

Ćwiczenie 6



Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach 12 i 4, a krawędź boczna ma długość 8. Uporządkuj opisy tak, aby odpowiadające im wartości były ułożone w kolejności rosnącej.

długość dłuższej krawędzi podstawy



długość przekątnej prostopadłościanu



długość przekątnej mniejszej ściany bocznej



długość przekątnej podstawy



długość przekątnej większej ściany bocznej



Ćwiczenie 7



Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu, w którym krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka są kolejnymi liczbami parzystymi, a suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 120.

Ćwiczenie 8



Przekątna podstawy, krawędź boczna oraz przekątna prostopadłościanu są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 5. Wyznacz długości krawędzi podstawy tego prostopadłościanu wiedząc, że jedna z tych krawędzi jest o 3 krótsza od przekątnej podstawy prostopadłościanu.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Długości odcinków w prostopadłościanie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastopach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyprowadza wzór na długość przekątnej prostopadłościanu o zadanych długościach krawędzi,
- oblicza długości odcinków w prostopadłościanie,
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Długości odcinków w prostopadłościanie” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszyte minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Infografika”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

- [Prostopadłościan](#).

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać materiał w sekcji „Infografika” do pracy przed lub po lekcji, w formie zadania domowego. Podczas pracy z materiałem mogą tworzyć pytania, które wykorzystają do pracy na lekcji.