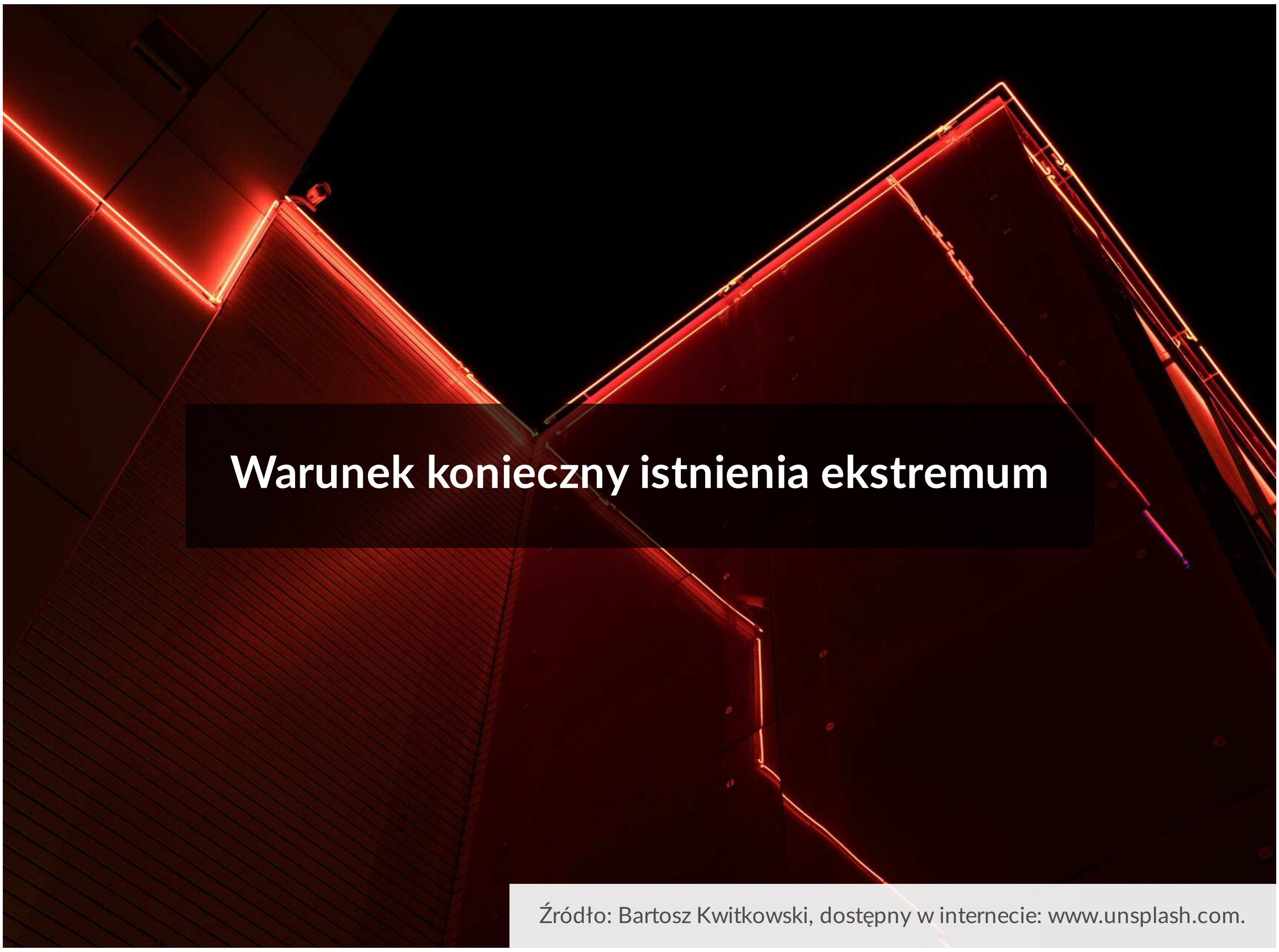
Warunek konieczny istnienia ekstremum

Warunek konieczny istnienia ekstremum



Źródło: Bartosz Kwitkowski, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Znajomość pochodnej $f'(x)$ pewnej funkcji $f(x)$ często pozwala nam na określenie własności tej funkcji takich jak monotoniczność czy ekstrema. Zajmiemy się obecnie zagadnieniem poszukiwania ekstremów funkcji, tzn. eliminowania wszystkich wartości argumentów, w których funkcja nie ma ekstremum. Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia kluczową rolę odgrywać będzie pochodna funkcji.

Twoje cele

- Dowiesz się jaki warunek konieczny powinien być spełniony, aby funkcja miała ekstremum.

Przeczytaj

Twierdzenie: Warunek konieczny istnienia ekstremum

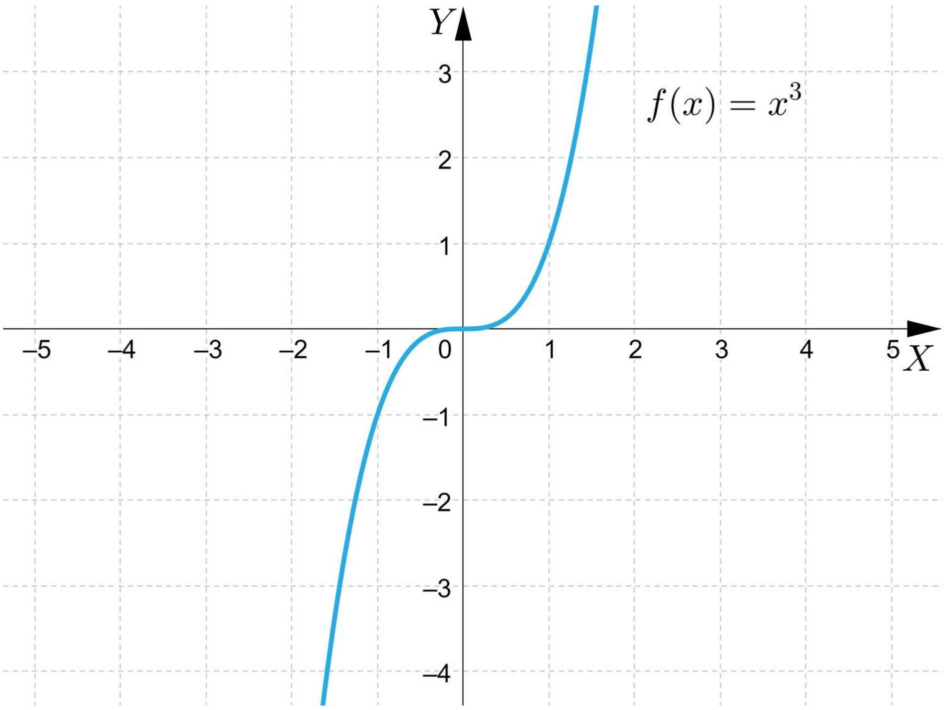
Jeśli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i ma w tym punkcie ekstremum, to

$$f'(x_0) = 0$$

Punkty, w których pochodna funkcji jest równa zeru nazywamy **punktami stacjonarnymi**.

Uwaga!

Twierdzenie odwrotne jest fałszywe.
Na przykład funkcja $f(x) = x^3$, ma pochodną $f'(x) = 3x^2$ w punkcie $x_0 = 0$ równą zeru ($f'(0) = 0$) i nie ma w tym punkcie ekstremum.



Wykres funkcji danej wzorem $f(x) = x^3$.

Zapamiętaj!

Zerowanie się pochodnej jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego dla funkcji różniczkowalnej, ale nie jest warunkiem wystarczającym.

Uwaga!

Jeśli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja ta nie ma w tym punkcie ekstremum. Funkcja może mieć ekstremum lokalne jedynie w punktach, w których jej pochodna **nie istnieje** albo **istnieje i jest równa zeru**.

Przykład 1

Sprawdzimy, w którym z punktów: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$ funkcja $f(x) = x^5 - \frac{5}{4}x^4$ może mieć ekstremum, a w którym na pewno nie ma.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x)$ jako wielomian jest różniczkowalna w zbiorze $\mathbb{R}$. Jej pochodna dana jest wzorem $f'(x) = 5x^4 - 5x^3$.

Na mocy pierwszego twierdzenia o warunku koniecznym istnienia ekstremum, funkcja różniczkowalna $f(x)$ może mieć ekstremum w punkcie, wtedy i tylko, gdy jej pochodna jest w tym punkcie równa zeru.

Sprawdźmy, kiedy pochodna $f'(x) = 0$. Otrzymujemy kolejno:

$f'(x) = 0$, gdy $5x^4 - 5x^3 = 0$, czyli $x = 0$ lub $x = 1$.

Stąd rozważana funkcja $f(x)$ może mieć (ale nie musi) ekstremum tylko w punktach $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, a na pewno nie ma ich w punktach $x_1 = -2$, $x_4 = 3$.

Przykład 2

Sprawdzimy w jakich punktach funkcja $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$ mogłaby mieć ekstremum.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$. Funkcja $f(x)$ jako funkcja wymierna jest różniczkowalna w całej dziedzinie. Jej pochodna dana jest wzorem

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x(x^2-4)}{(1+x^2)^2} = \frac{10x}{(1+x^2)^2}.$$

Sprawdzamy, kiedy spełniony jest warunek konieczny istnienia ekstremum, czyli kiedy pochodna $f'(x) = 0$. Otrzymujemy kolejno:

$f'(x) = 0$, gdy $\frac{10x}{(1+x^2)^2} = 0$, czyli $10x = 0$, stąd $x = 0$.

Punkt $x = 0$ jest punktem stacjonarnym, czyli takim w którym funkcja f może (ale nie musi) mieć ekstremum.

Przykład 3

Uzasadnimy, że funkcja $f(x) = \frac{4}{x^2}$ nie ma ekstremum.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Funkcja $f(x)$ jako funkcja wymierna jest różniczkowalna w całej dziedzinie. Jej pochodna dana jest wzorem $f'(x) = \frac{-8}{x^3} \neq 0$ dla każdego argumentu ze zbioru $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zatem nie jest spełniony warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji, czyli nie ma takiego punktu $x_0 \in D_f$, dla którego pochodna $f'(x_0) = 0$.

Stąd rozważana funkcja f nie ma ekstremum.

Przykład 4

Sprawdzimy, dla jakiego parametru a funkcja $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2ax$ nie ma punktów stacjonarnych.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x)$ jako wielomian jest różniczkowalna w zbiorze $\mathbb{R}$.

Jej pochodna dana jest wzorem $f'(x) = 2\left(3x^2 - 4x + a\right)$.

Na mocy Twierdzenia o warunku koniecznym istnienia ekstremum funkcji wiemy, że funkcja nie ma punktów stacjonarnych, wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \neq 0$. Otrzymujemy kolejno

$f'(x) \neq 0$, gdy $2\left(3x^2 - 4x + a\right) \neq 0$, czyli $\Delta < 0$,

$\Delta = 16 - 12a < 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in \left(\frac{4}{3},\ \infty\right)$.

Zatem rozważana funkcja f nie posiada punktów stacjonarnych dla $a \in \left(\frac{4}{3},\ \infty\right)$.

Przykład 5

Znajdziemy te wartości parametru $m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(m+2)x^2 + \left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 5\right)x - 3m + 2$ ma dwa punkty stacjonarne.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x)$ jako wielomian jest różniczkowalna w zbiorze $\mathbb{R}$.

Jej pochodna dana jest wzorem $f'(x) = x^2 + (m+2)x + \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 5$.

Na mocy Twierdzenia o warunku koniecznym istnienia ekstremum funkcji wiemy, że funkcja ma punkty stacjonarne, wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) = 0$.

Mamy zatem $x^2 + (m+2)x + \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 5 = 0$.

Z warunków zadania wynika, że równanie to ma mieć dwa rozwiązania, czyli $\Delta > 0$. Otrzymujemy kolejno

$\Delta = (m+2)^2 - 4\left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 5\right) = -m^2 + 10m - 16 > 0.$

Stąd $m \in (2,\ 8)$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DardqW9ID

Słownik

funkcja różniczkowalna

funkcję nazywamy różniczkowalną jeśli ma pochodną w każdym punkcie dziedziny

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj ćwiczenia zamieszczone poniżej.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DUtuUFZE6

Polecenie 2

Polecenie 3

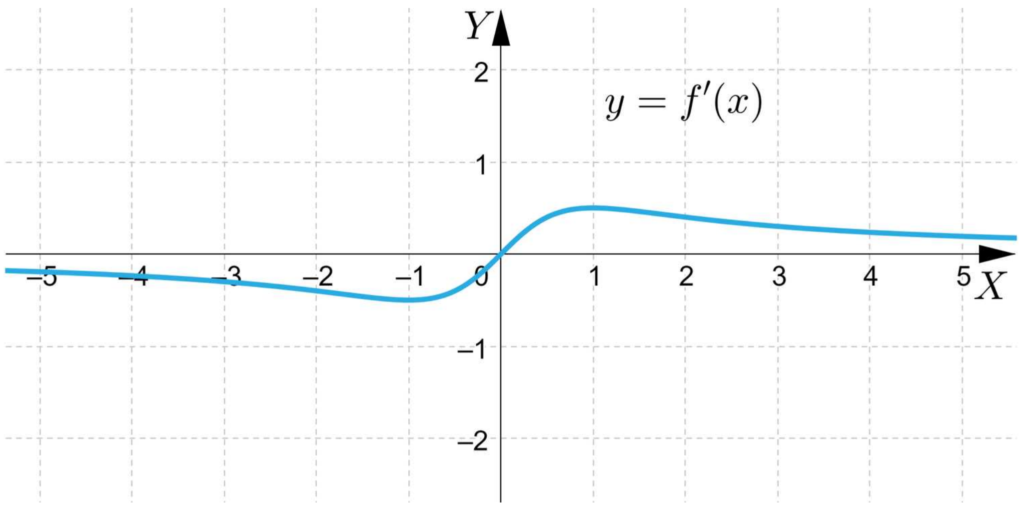
Wyznaczymy punkty, w których funkcja $f(x) = (x-2)^2(x+3)$ może (ale nie musi) mieć ekstrema.

Sprawdź się

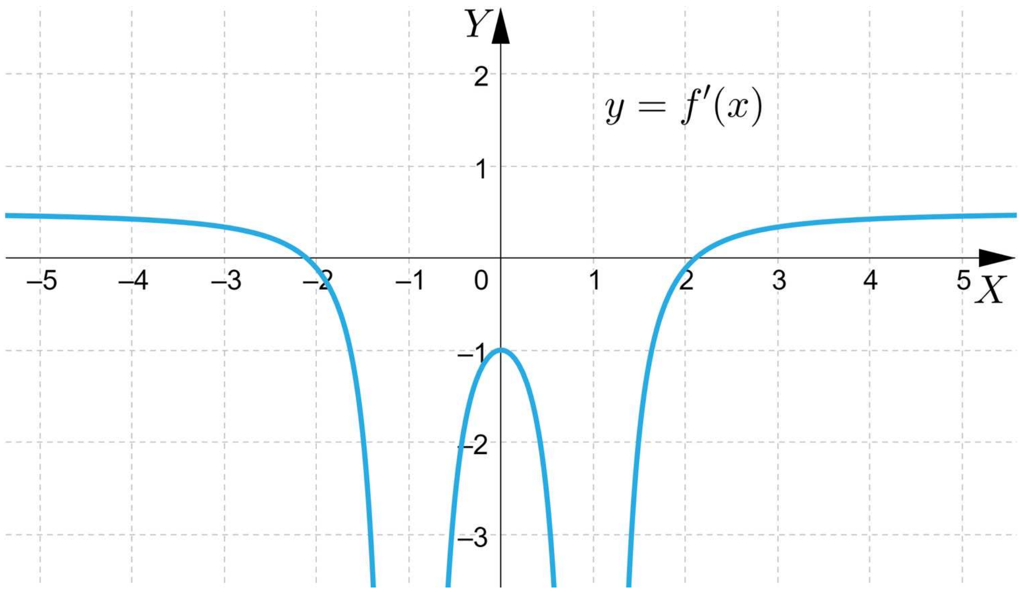
Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

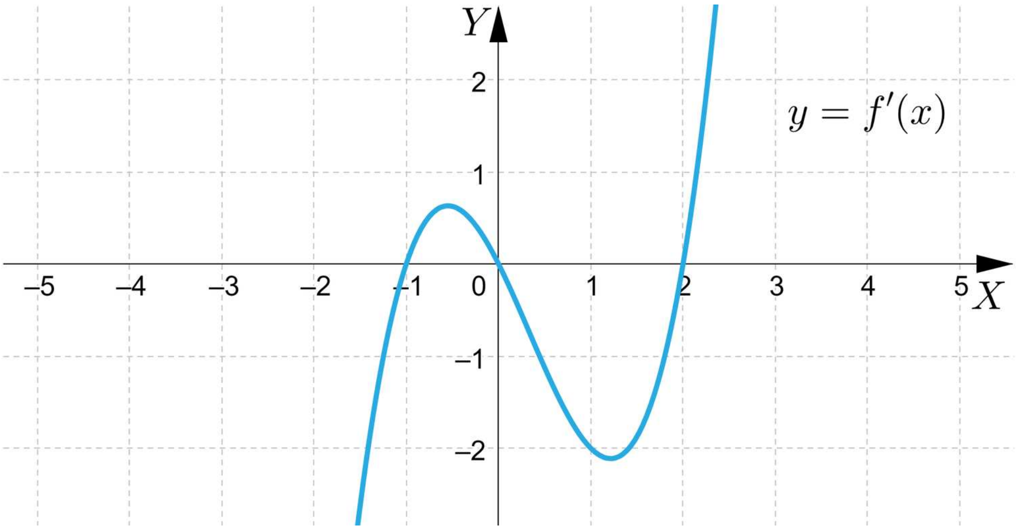
Na rysunkach przedstawiono fragmenty pochodnych pewnych funkcji różniczkowalnych. Na tej podstawie oceń prawdziwość każdego zdania.



b)



c)



Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Uzupełnij podany tekst przeciągając w odpowiednie miejsca właściwy wyraz.

$f\prime(x_0) = f(x)$, wystarczającym, $f\prime(x_0) > 0$, zeru, dodatnia, nie istnieje, maksimum, ekstremum, minimum, punktami stacjonarnymi, $f\prime(x_0) \neq 0$, koniecznym, ujemna, istnieje, $f\prime(x_0) = 0$, stała, punkty skrajne

Jeśli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i ma w tym punkcie ______, to ______. Punkty, w których pochodna funkcji jest równa zeru nazywamy ______. Jeśli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i ______ to funkcja ta nie ma w tym punkcie ekstremum. Funkcja może mieć ekstremum lokalne jedynie w punktach, w których jej pochodna ______ albo ______ i jest równa ______. Zerowanie się pochodnej jest warunkiem ______ istnienia ekstremum lokalnego dla funkcji różniczkowalnej, ale nie jest warunkiem ______.

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy funkcja $f(x) = 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ może mieć w punktach $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{4}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$ ekstremum, a w których na pewno nie ma.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, w jakich punktach funkcja $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}$ mogłaby mieć ekstremum.

Ćwiczenie 6

Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-1}$ nie ma ekstremum.

Ćwiczenie 7

Dla jakich wartości parametru p funkcja $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(p+3)x^3 + 2px^2$ ma dokładnie jeden punkt stacjonarny.

Ćwiczenie 8

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \frac{1}{3}\left(m^2-1\right)x^3 + (m-1)x^2 + 2x$ nie ma punktów stacjonarnych.

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Niemczynowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Warunek konieczny istnienia ekstremum

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje pojęcie maksimum lokalnego (właściwego/niewłaściwego) funkcji;
- definiuje pojęcie minimum lokalnego (właściwego/niewłaściwego) funkcji;
- szkicuje przykłady funkcji posiadających ekstrema lokalne;

- opisuje warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja panelowa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami z poprzednich lekcji dotyczącymi monotoniczności funkcji i jej miejsc zerowych.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie" i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji o temacie: "Warunek konieczny istnienia ekstremum".
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3–4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z sekcji „Przeczytaj". Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.

2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji “Prezentacja multimedialna”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie polecenia nr 2–3 z sekcji “Prezentacja multimedialna”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.
4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3–5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6–7 z działu „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Monotoniczność funkcji
- Monotoniczność funkcji

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną można wykorzystać do powtórzenia materiału o wyznaczaniu przedziałów monotoniczności funkcji.