

Bryły obrotowe - walec

Walec - definicja. Ilustracja interaktywna: walec. Ilustracja interaktywna: odcinki i przekroje w walcu. Wzory na pole powierzchni i objętość walca. Animacja 3D: powstawanie siatki walca. Animacja 3D: tworzenie walca poprzez złożenie siatki walca. Ilustracja interaktywna: tworzenie walca poprzez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta.

Animacja 3D: przekroje walca. Rozwiązane zadania na obliczanie pola powierzchni i objętości walca. 5 prezentacji multimedialnych: przekrój osiowy walca, pole powierzchni całkowitej walca, objętość walca, pole powierzchni bocznej walca.

Zestaw 6 zadań otwartych na obliczanie pola powierzchni i objętości walca. Rozwiązania do zadań.

Zestaw 5 zadań na obliczanie pola powierzchni i objętości walca. Zasób zawiera zadania interaktywne.

Bryły obrotowe - walec

Bryły obrotowe – walec

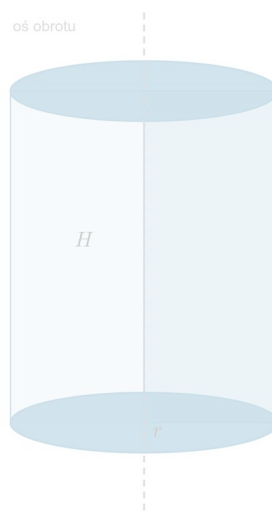
Bryły obrotowe powstają w wyniku obrotu figury płaskiej dookoła prostej będącej osią obrotu.

W tym materiale zajmiemy się jedną z brył obrotowych, zwaną walcem.

Definicja: Walec

Walec to bryła, która powstała w wyniku obrotu prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków tego prostokąta.

Zapoznaj się z poniższymi apletami, które przedstawiają walec i jego elementy.



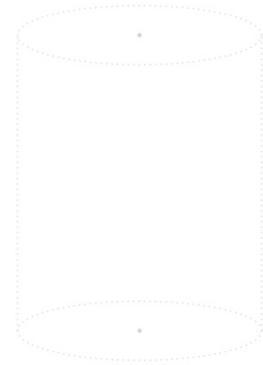
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1CYhyyL5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Walec

☐ oś obrotu	☐ tworząca walca
☐ podstawa walca	☐ wysokość walca
☐ promień podstawy walca	☐ powierzchnia boczna walca
☐ średnica podstawy walca	☐ przekrój osiowy walca





Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1CYhyyL5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapamiętaj!

- Pole powierzchni całkowitej walca jest równe:

$$P_c = 2P_P + P_b = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot H = 2\pi r(r + H).$$

- Objętość walca jest równa:

$$V = \pi r^2 H.$$

Przykład 1

Oblicz objętość walca powstałego w wyniku obrotu prostokąta o bokach długości 12 cm i 16 cm wokół dłuższego boku.

krok 6 z 6

Oblicz objętość walca powstałego w wyniku obrotu prostokąta o bokach 12 cm i 16 cm wokół dłuższego boku.

Dłuższy bok prostokąta zawiera się w osi obrotu.

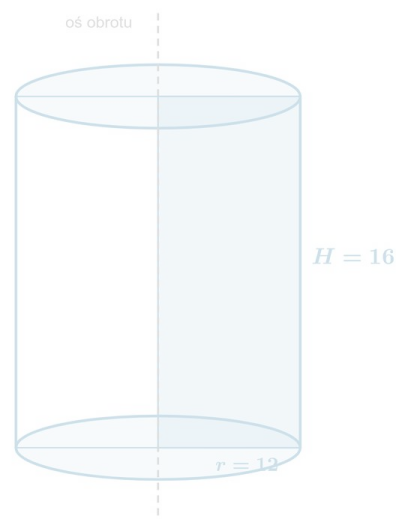
W wyniku opisanego obrotu powstał walec.

Wysokość walca jest równa $H = 16$ cm.

Promień podstawy walca jest równy $r = 12$ cm.

Wynika z tego, że objętość walca jest równa

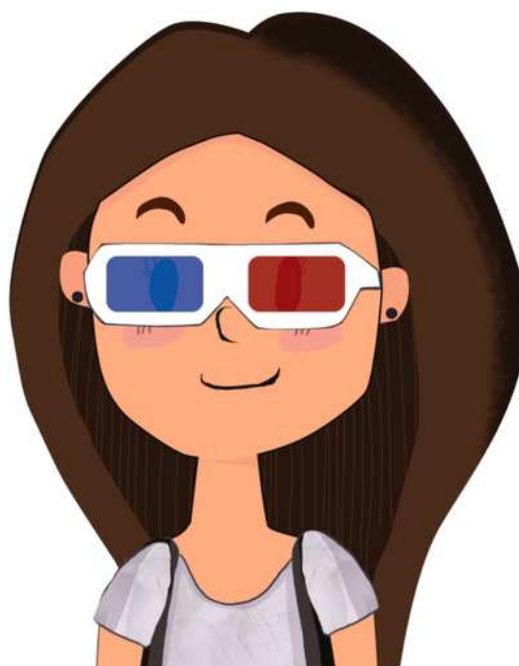
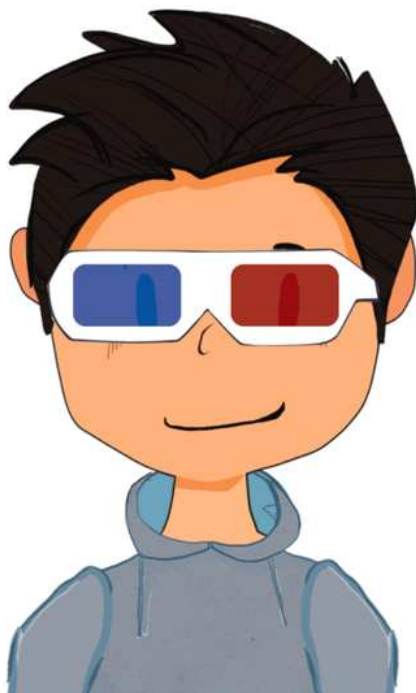
$$V = \pi r^2 \cdot H = 12^2 \cdot 16 \cdot \pi = 2304\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1CYhyL5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapoznaj się z poniższymi animacjami, które przedstawiają różne przekroje walca.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/ReTKpOdbvILTS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje baterię elektryczną. Kreślone są krawędzie – powstaje walec. Następnie przekroje skośne i poprzeczne dzielą walec na dwie bryły.

Przykład 2

Przekrój osiowy walca jest kwadratem, którego przekątna jest równa $24\sqrt{6}$. Oblicz objętość walca.

Przekrój osiowy walca jest kwadratem,
którego przekątna jest równa $24\sqrt{6}$.
Oblicz objętość walca.

krok 5 z 5

Przekrój osiowy walca jest kwadratem.
Jeden z jego boków jest średnicą walca, a drugi - wysokością.
Znając długość przekątnej, możemy obliczyć długość jego boku.

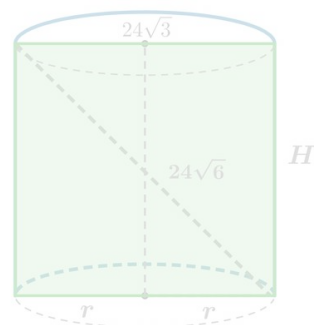
$$24\sqrt{6} = a\sqrt{2}, \quad \text{czyli} \quad a = 24\sqrt{3}.$$

Wynika z tego, że średnica walca jest równa $2r = 24\sqrt{3}$,
czyli $r = 12\sqrt{3}$.

Wysokość walca jest równa $H = 24\sqrt{3}$.

Zatem objętość walca jest równa

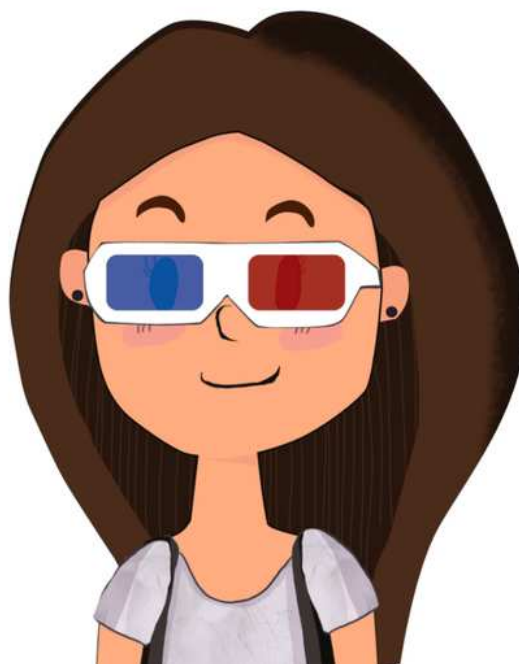
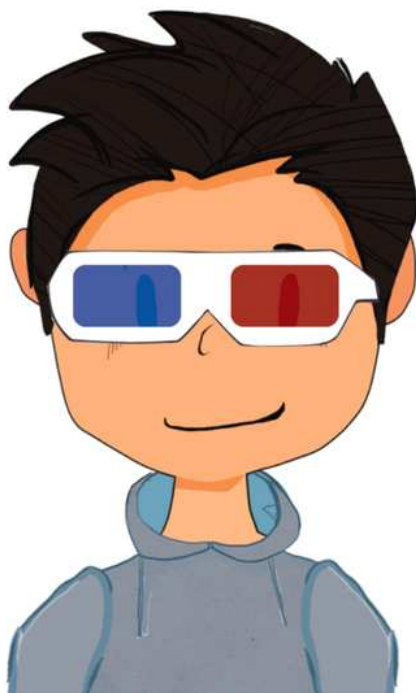
$$V = \pi r^2 \cdot H = (12\sqrt{3})^2 \cdot 24\sqrt{3} \pi = 10368\pi\sqrt{3}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1CYhyL5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapoznaj się z poniższymi animacjami, które przedstawiają siatkę walca.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RsAeA0MYRrPgI>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje stojące na stole kubki w kształcie walca. Kreślone są krawędzie jednego kubka – powstaje walec, który następnie rozkłada się na siatkę walca.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RQZrDj9qZt1Oa>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje siatkę walca, która składa się w walec. Następnie walec zamienia się w kubek. Na stole stoją kubki w kształcie walca.

Przykład 3

Objętość walca jest równa $729\pi \text{ cm}^3$, a średnica podstawy walca jest 2 razy dłuższa od jego wysokości. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

krok 7 z 7

Objętość walca jest równa $729\pi \text{ cm}^3$,
a średnica podstawy walca jest 2 razy dłuższa od jego wysokości.
Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Objętość walca jest równa $V = \pi r^2 \cdot H$.

Z treści zadania wynika że $729\pi = \pi r^2 \cdot H$

czyli $r^2 \cdot H = 729$.

Wiadomo również, że $2r = 2H$, czyli $H = r$.

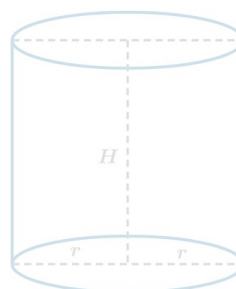
Po wstawieniu do wcześniej zapisanego równania otrzymamy:

$r^2 \cdot r = 729$ więc $r^3 = 729$, czyli $r = 9 \text{ (cm)}$.

Zatem wysokość walca $H = 9 \text{ (cm)}$.

Pole powierzchni całkowitej walca jest równe:

$P_c = 2\pi \cdot r(r + H) = 2\pi \cdot 9(9 + 9) = 324\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1CYhyL5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Powierzchnia boczna walca jest kwadratem o przekątnej długości $8\sqrt{2}$ cm. Oblicz objętość tego walca.

krok 5 z 5

Powierzchnia boczna walca jest kwadratem o przekątnej długości $8\sqrt{2}$ cm.

Oblicz objętość tego walca.

Przekątna kwadratu jest równa $d = 8\sqrt{2}$ cm,

zatem bok kwadratu jest równy $a = 8$ cm.

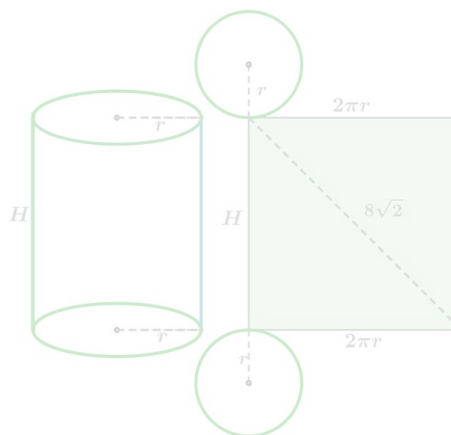
Jeden z boków kwadratu jest równy wysokości walca, zatem $H = 8$ cm.

Drugi z boków, po zwinięciu walca, stanowi obwód koła, które jest podstawą walca.

Wynika z tego, że $2\pi r = 8$, czyli $r = \frac{4}{\pi}$.

Obliczmy objętość walca:

$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot 8 = \frac{128}{\pi} \text{ (cm}^3\text{)}.$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1CYhyL5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 5

Podstawą walca jest koło o średnicy $12\sqrt{3}$ dm. Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca.

krok 5 z 5

Podstawą walca jest koło o średnicy $12\sqrt{3}$ dm.
Przekątna przekroju osiowego walca
jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° .
Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca.

Podstawą walca jest koło o średnicy $2r = 12\sqrt{3}$,
zatem promień jest równy $r = 6\sqrt{3}$ (dm).

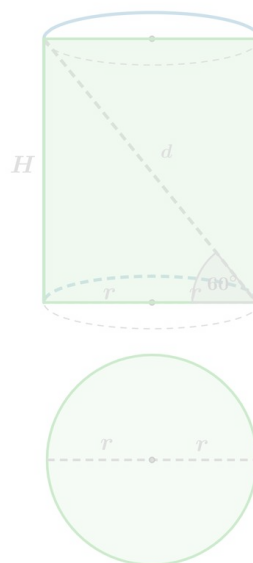
Z definicji funkcji w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{2r}, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{3} = \frac{H}{12\sqrt{3}}.$$

Wynika z tego, że $H = 36$ (dm).

Obliczymy pole powierzchni bocznej

$$P_b = 2\pi r \cdot H = 2\pi \cdot 6\sqrt{3} \cdot 36 = 432\pi \text{ (dm}^2\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1CYhyyL5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1



Prostokąt o bokach 9 cm i 12 cm obraca się wokół dłuższego boku. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca, który powstanie w wyniku tego obrotu.

☐ $V = 974\pi \text{ cm}^3, P_c = 376\pi \text{ cm}^2$

☐ $V = 972\pi \text{ cm}^3, P_c = 378\pi \text{ cm}^2$

☐ $V = 968\pi \text{ cm}^3, P_c = 372\pi \text{ cm}^2$

☐ $V = 970\pi \text{ cm}^3, P_c = 374\pi \text{ cm}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Kwadrat o polu 256 cm^2 obraca się wokół boku. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca otrzymanego w wyniku tego obrotu.

☐ $P_c = 1026\pi \text{ cm}^2$

☐ $P_c = 1028\pi \text{ cm}^2$

☐ $P_c = 1022\pi \text{ cm}^2$

☐ $P_c = 1024\pi \text{ cm}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Walec o promieniu 5 cm powstał w wyniku obrotu prostokąta, którego przekątna jest równa 13 cm . Oblicz objętość walca.

☐ $V = 500\pi \text{ cm}^3$

☐ $V = 300\pi \text{ cm}^3$

☐ $V = 400\pi \text{ cm}^3$

☐ $V = 200\pi \text{ cm}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Przekątna przekroju osiowego walca ma długość $6\sqrt{3}$ cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy walca pod kątem 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ $V = 243\pi \text{ cm}^3$

☐ $P_c = \left(\frac{25}{2} + 27\sqrt{3}\right)\pi \text{ cm}^2$

☐ $P_c = \left(\frac{27}{2} + 27\sqrt{3}\right)\pi \text{ cm}^2$

☐ $V = \frac{243}{4}\pi \text{ cm}^3$

☐ $P_c = 27\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$

☐ $V = \frac{243}{3}\pi \text{ cm}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Oblicz objętość walca, którego wysokość jest równa 14 cm, a pole powierzchni bocznej $112\pi \text{ cm}^2$.

☐ $V = 228\pi \text{ cm}^3$

☐ $V = 220\pi \text{ cm}^3$

☐ $V = 224\pi \text{ cm}^3$

☐ $V = 222\pi \text{ cm}^3$

☐ $V = 226\pi \text{ cm}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu 180 cm^2 . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.

☐ $V = 276\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3, P_c = 276\pi \text{ cm}^2$

☐ $V = 270\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3, P_c = 270\pi \text{ cm}^2$

☐ $V = 272\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3, P_c = 272\pi \text{ cm}^2$

☐ $V = 274\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3, P_c = 274\pi \text{ cm}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Pole podstawy walca jest równe $18\pi \text{ cm}^2$ i stanowi 30% pola powierzchni bocznej. Oblicz objętość tego walca.

☐ $V = 96\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$

☐ $V = 94\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$

☐ $V = 90\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$

☐ $V = 92\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



80% naczynia w kształcie walca o średnicy 8 cm i wysokości 15 cm jest wypełnione wodą. Ile sześciennych kostek lodu o krawędzi 2 cm można wrzucić do tego naczynia, tak aby woda nie wylała się z niego?

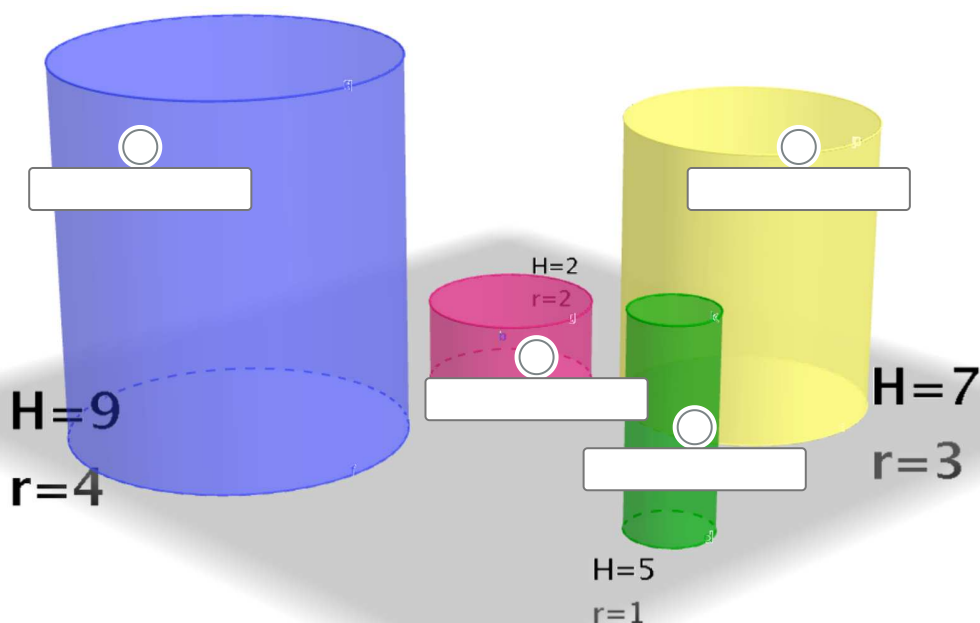
- ☐ więcej niż 18 kostek
- ☐ więcej niż 19 kostek
- ☐ nie więcej niż 19 kostek
- ☐ nie więcej niż 18 kostek

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Dopasuj do każdego z walców odpowiednią objętość.



- | | | | | | |
|------------------------|----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|------------------------|
| $60 \pi \text{ cm}^3$ | $5 \pi \text{ cm}^3$ | $6 \pi \text{ cm}^3$ | $144 \pi \text{ cm}^3$ | $5 \pi \text{ cm}^2$ | $144 \pi \text{ cm}^2$ |
| $140 \pi \text{ cm}^3$ | $8 \pi \text{ cm}^3$ | 5 cm^3 | $63 \pi \text{ cm}^3$ | | |

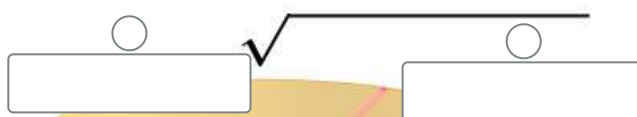
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Oblicz długość H wysokości waca, objętość V oraz pole powierzchni całkowitej P_c wiedząc, że rzutem odcinka d na podstawę walca jest średnicą tej podstawy. Wpisz w luki prawidłowe liczby.

$$H =$$



$$V =$$



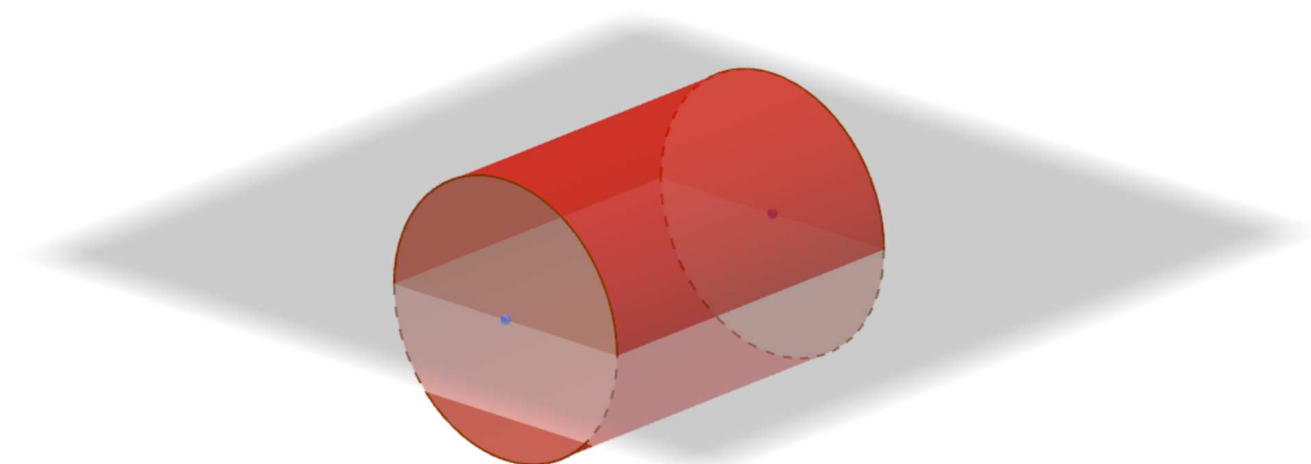
$$P_c = \left(\frac{\text{box}}{\text{box}} + \frac{\text{box}}{\text{box}} \right) \pi$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Oblicz, ile maksymalnie litrów wody zmieści się w zbiorniku w kształcie walca, którego długość wynosi 1 m, a średnica 30 cm. Przeciągnij w lukę odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.



$$V = \text{ } \pi \text{ cm}^3$$

Zbiornik pomieści maksymalnie $\text{ } \pi$ litrów wody.

$\approx 75,68$

14000

12000

225

18000

22500

22500

$\approx 600,68$

$\approx 700,68$

63000

60005

2250

225,5

225000

22,5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.