



Wielokąty foremne

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Wielokąty foremne

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Mówiąc o konstrukcjach „platońskich”, klasycznych lub krótko o konstrukcjach geometrycznych, mamy na myśli operacje rysowania linii i kreślenia okręgów przy użyciu wyłącznie cyrkla i liniału tzn. linijki bez podziałki. Przez wiele lat konstrukcje geometryczne stanowiły niezwykle ważny dział matematyki i były podstawą działań wielu pokoleń inżynierów i konstruktorów. Dzisiaj inżynierowie wykorzystują raczej graficzne programy komputerowe do projektowania, a o samych konstrukcjach, dowodach ich poprawności, czy analizie rozwiązań takich problemów czyta się tylko w starych podręcznikach, literaturze popularnonaukowej czy historycznej.

Z konstrukcjami geometrycznymi związane są trzy wielkie problemy starożytnej matematyki greckiej, sformułowane przez filozofów (matematyków) tzw. szkoły pitagorejskiej: problem „trysekcji kąta”, „kwadratury koła”, czy wreszcie „podwojenia sześcianu” („problem delijski”). W potocznym języku dosyć często pojawia się frazeologizm „kwadratura koła”, który oznacza zadanie z góry skazane na niepowodzenie – ma swoje źródło w problemie polegającym na skonstruowaniu kwadratu, którego pole równe jest polu danego koła, przy użyciu wyłącznie cyrkla oraz linijki bez podziałki.

Problemem związanym z klasycznymi konstrukcjami geometrycznymi, z którym częściej spotykają się współcześni adepci matematyki szkolnej, jest możliwość skonstruowania wielokąta foremnego. Dopiero w XIX wieku matematyk niemiecki C.F. Gauss podał

kryterium, które pozwala wskazać, które z wielokątów foremnych można skonstruować za pomocą cyrkla i liniału. Odwołał się przy tym do liczb naturalnych postaci $F_k = 2^{2^k} + 1$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą (liczby te noszą nazwę liczb Fermata) i udowodnił, że n -kąt foremny można skonstruować tylko wtedy, gdy $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, gdzie m jest liczbą naturalną (wraz z zerem), a p_i są różnymi pierwszymi liczbami Fermata lub gdy $n = 2^m$, gdzie m jest liczbą naturalną nie mniejszą niż 2.

Tym samym jest to możliwe np. dla $n = 3$, bo $3 = (2^{2^0} + 1)$, dla $n = 17$, bo $17 = 2^0 \cdot (2^{2^2} + 1)$, czy dla $n = 16$, bo $16 = 2^4$, ale nie jest to możliwe dla $n = 7$ czy $n = 9$.

Twoje cele

- Odkryjesz algorytm konstrukcji n -kąta foremnego dla $n = 2^m$.
- Poznasz i uzasadnisz poprawność konstrukcji sześciokąta foremnego.
- Poznasz konstrukcję pięciokąta foremnego.
- Zastosujesz poznane zależności do rozwiązywania problemów geometrycznych.
- Będziesz stosować kryterium Gaussa do badania wykonalności konstrukcji geometrycznych wielokątów foremnych.

Przeczytaj

Definicja: Wielokąt foremny

Wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, którego wszystkie boki mają taką samą długość i kąty wewnętrzne są przystające (mają równe miary).

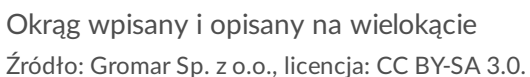
Zauważ, że mówiąc o trójkącie foremnym (równobocznym) wystarczy zażądać równości samych długości boków lub tylko równości miar kątów. Ale już w przypadku czworokątów foremnych musimy wymagać przystawania zarówno boków, jak i kątów. Romb niebędący kwadratem jest przykładem wielokąta, którego wszystkie boki są równe, ale który nie jest foremny. Z kolei prostokąt, który nie jest kwadratem to przykład czworokąta, którego wszystkie kąty są równe, a który nie jest foremny.

Okazuje się, że na dowolnym n -kącie foremnym można opisać okrąg oraz w dowolny n -kąt foremny można wpisać okrąg. Zależność między długością boku danego wielokąta i długościami promieni obu okręgów opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: o wielokącie foremnym i dwóch okręgach: wpisanym i opisanym

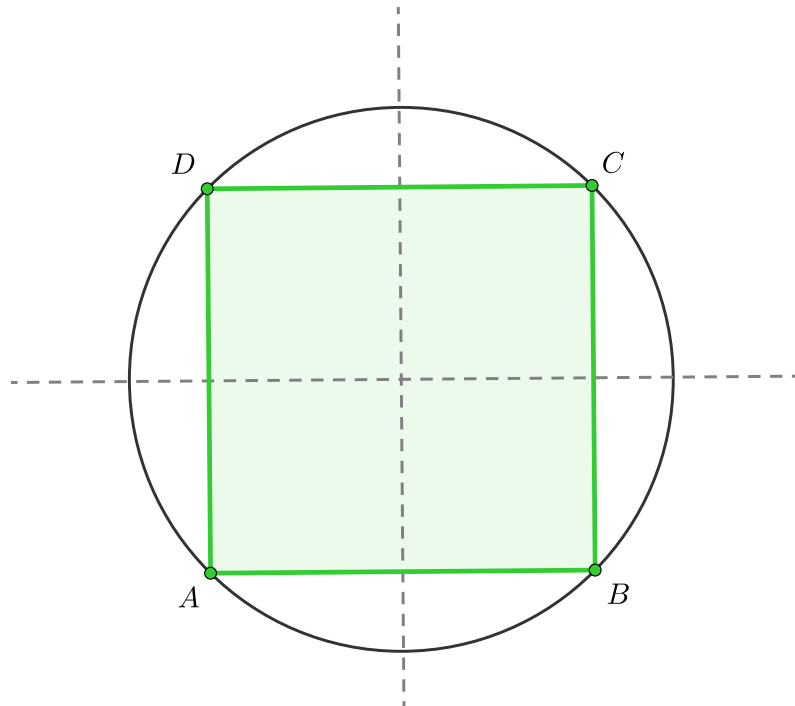
Niech dany będzie wielokąt foremny o boku długości a . Niech R będzie długością promienia okręgu opisanego na tym wielokącie, a r niech będzie długością promienia okręgu wpisanego w ten wielokąt. Wtedy $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$.

Prosty dowód zapisanej zależności wynika bezpośrednio z zastosowania twierdzenia Pitagorasa w trójkącie, którego dwoma bokami są odpowiednie promienie, a trzecim jest połowa boku danego wielokąta (patrz: rysunek).



Przykład 1

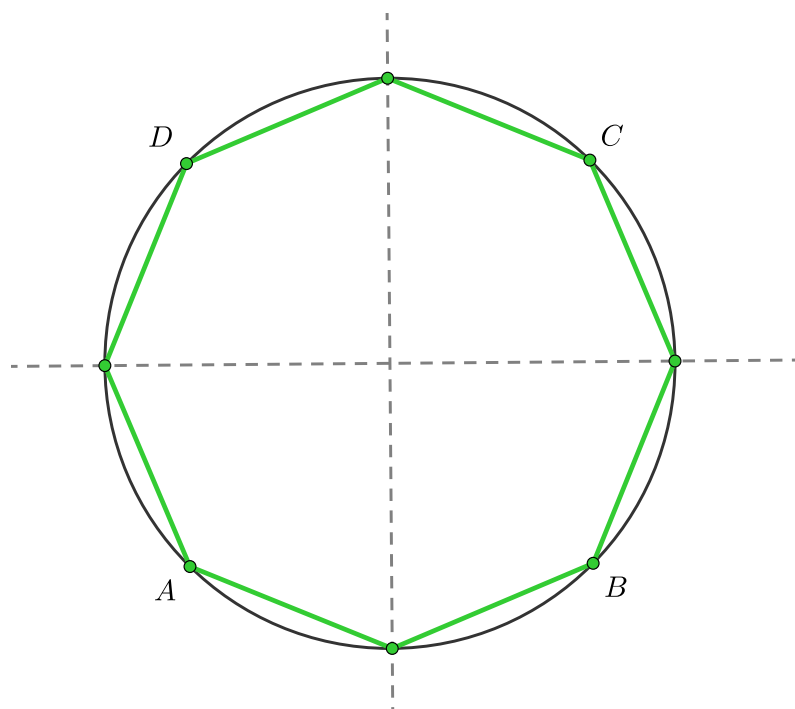
Rozważmy kwadrat wpisany w okrąg taki jak na rysunku i dwie proste, które są symetralnymi równoległych boków (symetralna boku AB jest jednocześnie symetralną boku CD i podobnie dla boków CB i AD).



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Proste te przecinają dany okrąg w czterech punktach. Spróbuj określić, czym są te punkty.

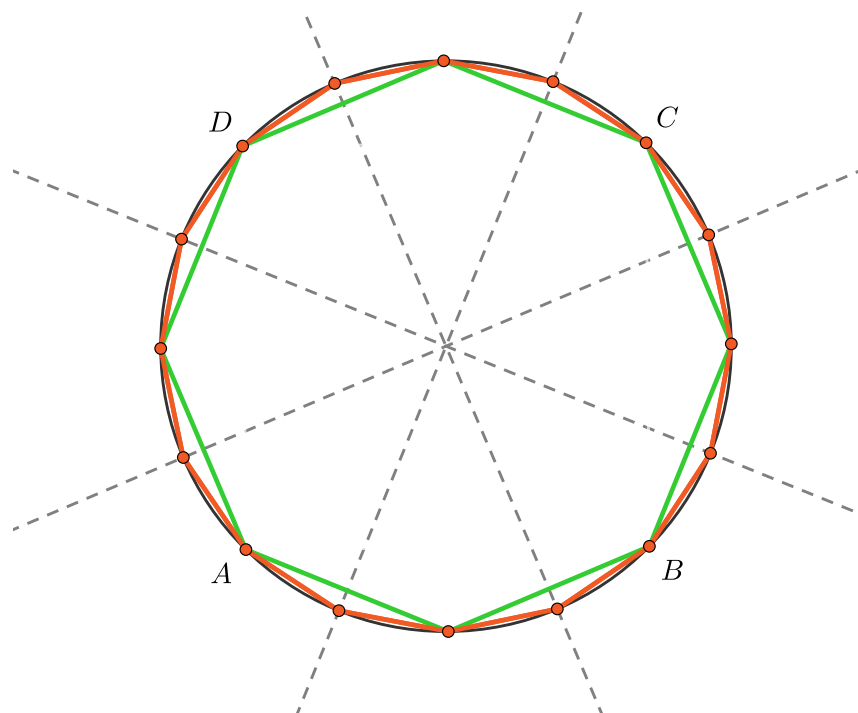
Oczywiście otrzymane punkty, wraz z punktami A , B , C i D , są wierzchołkami ośmiokąta. Jest to ośmiokąt foremny wpisany w dany okrąg (patrz: rysunek poniżej).



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Jeśli teraz poprowadzimy symetralne wszystkich boków otrzymanego ośmiokąta, to punkty wspólne tych symetralnych i okręgu wyznaczą kolejne wierzchołki szesnastokąta

foremnego (patrz: rysunek).



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Zauważ, że taką operację można prowadzić dowolną ilość razy, otrzymując wielokąt foremny wpisany w dany okrąg, który ma 2^m boków (dla $m > 2$) – jedynym ograniczeniem jest dokładność naszych rysunków (zapewne już kolejny wielokąt o 32 bokach byłby niemal nieodróżnialny od szesnastokąta, czy od danego okręgu).

Analogicznie moglibyśmy skonstruować sześciokąt foremny wpisany w dany okrąg, mając wcześniej trójkąt równoboczny, który w ten okrąg jest wpisany.

Teraz jednak zajmiemy się konstrukcją wybranych wielokątów, gdy dane są długości ich boków. Pominiemy znaną doskonale konstrukcję trójkąta równobocznego o danym boku. Także konstrukcja kwadratu o boku zadanej długości czy wpisanego w okrąg o danym promieniu, gdy znany jest sposób konstrukcji symetralnej (patrz: lekcja 745), nie powinna nastręczać trudności. Pora więc na konstrukcję pięciokąta i sześciokąta foremnego.

Konstrukcja sześciokąta foremnego

Opis konstrukcji sześciokąta foremnego.

- Odłóż na płaszczyźnie odcinek o długości a równej długości boku sześciokąta.
- Wykreśl okrąg o dowolnym środku i promieniu równym a .
- Na otrzymanym okręgu zaznacz dowolny punkt i nazwij go, np.: A .
- Z punktu A zakresł łuk promieniem równym a , aż do przecięcia z okręgiem (odkładamy cięciwę AB). Następnie z punktu B odłóż cięciwę BC równą promieniowi

okręgu, następnie z punktu C odłóż cięciwę CD itd. W ten sposób podzielisz okrąg na 6 równych części.

- Połącz kolejne końce cięciw, a otrzymasz szukany sześciokąt.

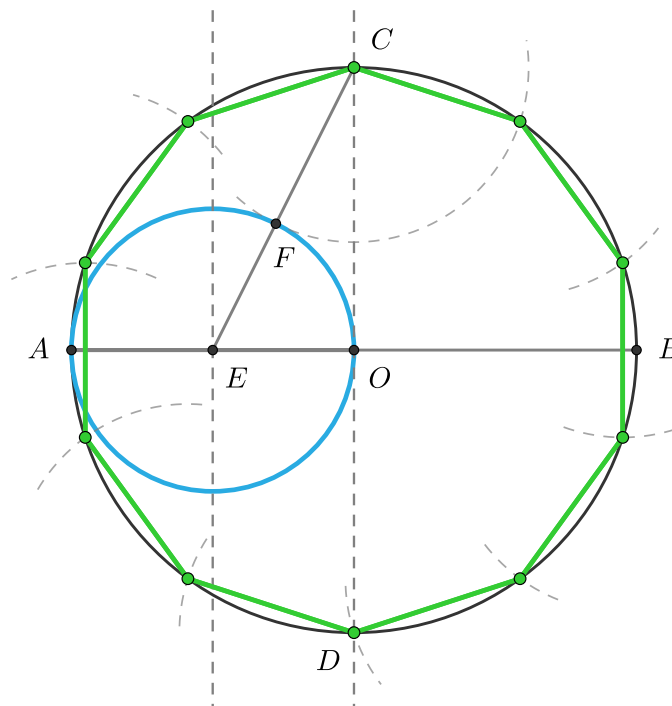
Zauważ, że przedstawiona konstrukcja jest konstrukcją sześciokąta foremego o danym boku i jednocześnie konstrukcją sześciokąta wpisanego w okrąg o danym promieniu.

W Przykładzie pierwszym, wychodząc od wielokąta o danej liczbie boków, konstruowaliśmy wielokąt, którego liczba boków była dwukrotnie większa. Okazuje się, że czasami warto postąpić odwrotnie. Jeśli bowiem wykreślimy sześciokąt foremny i połączymy kolejno odcinkami co drugi jego wierzchołek, to otrzymamy trójkąt równoboczny. Tym samym, otrzymaliśmy metodę konstrukcji trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o zadanym promieniu. Podobną operację można przeprowadzić w przypadku dziesięciokąta i pięciokąta foremnego.

Konstrukcja pięciokąta foremnego

Opis konstrukcji pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o zadanym promieniu.

- Odłóż na płaszczyźnie odcinek o długości a równej długości promienia okręgu opisanego na pięciokącie.
- Wykreśl symetralną danego odcinka, w celu wyznaczenia odcinka o długości równej $\frac{1}{2}a$.
- Wykreśl okrąg o dowolnym środku i promieniu równym a i poprowadź dowolną średnicę – środek okręgu oznacz przez O , końce średnicy przez A, B .
- Poprowadź symetralną odcinka AB – punkty wspólne otrzymanej prostej z okręgiem, które wyznaczają średnicę prostopadłą do AB , oznacz przez C i D .
- Na średnicy CD odłóż (po dowolnej stronie prostej AB) odcinek OE o długości równej $\frac{1}{2}a$.
- Poprowadź odcinek EC , na którym odłóż odcinek EF o długości równej $\frac{1}{2}a$ – pozostała część odcinka EC , czyli odcinek CF , jest bokiem dziesięciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg.
- Z dowolnego punktu okręgu, np. z punktu C zakresł łuk promieniem równym długości odcinka CF , aż do przecięcia z okręgiem (zaznaczysz w ten sposób końce cięciwy). Z końca zaznaczonego łuku zakresł ponownie łuk o takim samym promieniu, by przeciął się z okręgiem, itd. W ten sposób podzielisz okrąg na 10 równych części.
- Połącz kolejne końce cięciw, a otrzymasz dziesięciokąt foremny.
- Połącz co drugi z wierzchołków otrzymanego dziesięciokąta, a otrzymasz pięciokąt foremny.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Dowód poprawności konstrukcji dziesięciokąta (pięciokąta) foremnego wpisanego w okrąg o danym promieniu wykracza poza wymagania matematyki szkolnej, ale z pewnością sama konstrukcja (mimo rozbudowanego opisu) nie jest skomplikowana. Inaczej rzecz się ma z konstrukcją pięciokąta o boku zadanej długości. Przygotuj cyrkiel i linijkę, a następnie odtwórz na kartce opisaną niżej konstrukcję.

Przykład 2

Opis konstrukcji pięciokąta foremnego o boku zadanej długości.

- Na płaszczyźnie narysuj prostą k i odłóż na tej prostej odcinek o długości a równej długości boku pięciokąta – otrzymany odcinek oznacz AB .
- Wykreśl okrąg O o środku w punkcie B i promieniu AB .
- Przez punkt B poprowadź prostą l prostopadłą do prostej k – punkty wspólne prostej l i okręgu oznacz odpowiednio przez P_1, P_2 .
- Poprowadź symetralną m odcinka AB – otrzymany środek odcinka AB oznacz przez Q .
- Z punktu Q wykreśl okrąg o promieniu QP_1 – otrzymasz dwa punkty wspólne z prostą k . Oznacz przez R ten z otrzymanych punktów, który leży po przeciwnej stronie prostej l względem punktu A .
- Z punktu A wykreśl okrąg o promieniu AR – otrzymasz dwa punkty wspólne z okręgiem O i dwa punkty wspólne z prostą m . Rozważmy te z nich, które leżą po tej samej stronie prostej k , co punkt P_1 i oznaczmy przez C punkt wspólny z okręgiem O , a przez D punkt wspólny z prostą m .
- Wykreśl okręgi o środkach w punktach A i D – otrzymasz dwa punkty wspólne. Ten z nich, który leży po tej samej stronie prostej m , co punkt A , oznacz przez E .

- Połącz kolejno punkty $ABCDE$, a otrzymasz pięciokąt foremny o zadanym boku.

Słownik

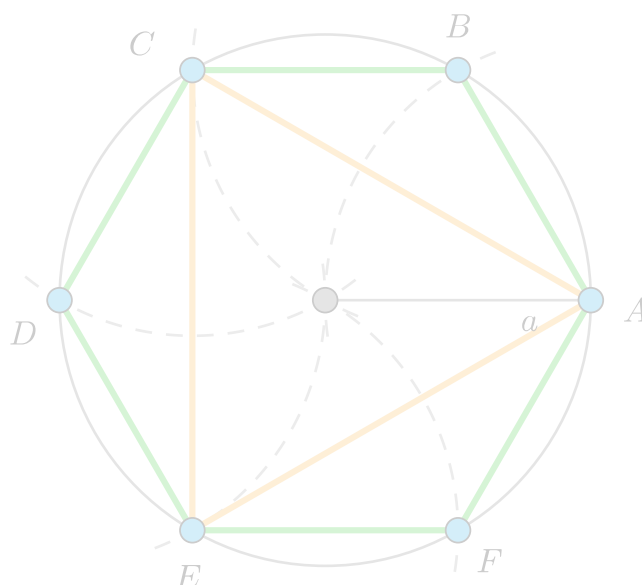
wielokąt foremny

wielokąt, którego wszystkie boki mają taką samą długość i kąty wewnętrzne są przystające (mają równe miary)

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet. Wybierz sześciokąt, a następnie kolejno zaznacz opisy etapów (ETAP 1, później ETAP 2, itd., aż do ETAP 7). Obserwuj operacje, jakie wykonuje program. W notatniku opisz działanie i jego wynik. Po wciśnięciu znacznika ETAP 7 i opisanie zaobserwowanego działania i jego wyniku spróbuj odtworzyć konstrukcję tylko na podstawie swoich notatek. Obserwuj, jaka jest relacja między długością promienia okręgu i długością boku wielokąta. W razie potrzeby jeszcze raz uruchom aplet.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Zj0Epyl>

Polecenie 2

Po zrealizowaniu ETAPU 7 i wykreśleniu sześciokąta wpisanego w dany okrąg zaproponuj konstrukcję trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg. Po wykonaniu konstrukcji trójkąta (albo, gdy nie masz pomysłu jak ją wykonać) wciśnij znacznik TRÓJKĄT i obserwuj zaproponowany sposób konstrukcji.

Polecenie 3

Uruchom ponownie aplet. Wybierz pięciokąt, a następnie kolejno zaznacz opisy etapów (ETAP 1, później ETAP 2, itd., aż do ETAP 8). Obserwuj operacje, jakie wykonuje program.

W notatniku opisz działanie wykonywane w kolejnych etapach i ich wynik. Po wciśnięciu znacznika ETAP 8 i jego opisaniu spróbuj odtworzyć konstrukcję tylko na podstawie swoich notatek. W razie potrzeby jeszcze raz uruchom aplet.

Polecenie 4

Po zrealizowaniu ETAPU 8 i wykreśleniu dziesięciokąta wpisanego w dany okrąg zaproponuj konstrukcję pięciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg. Wciśnij znacznik PIĘCIOKĄT i porównaj swoje propozycje i konstrukcję zaproponowaną w aplecie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dopasuj stwierdzenie do danej liczby.

Jest liczbą pierwszą i jest najmniejszą liczbą Fermata.

258

Jest liczbą pierwszą i jest liczbą Fermata (ale nie najmniejszą).

3

Nie jest liczbą pierwszą i nie jest liczbą Fermata.

67

Jest liczbą pierwszą (ale nie najmniejszą) i nie jest liczbą Fermata.

2

Jest najmniejszą liczbą pierwszą i nie jest liczbą Fermata.

5

Ćwiczenie 2



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ Każda liczba postaci 2^m , dla $m \geq 0$ jest liczbą Fermata.

☐ Każda liczba Fermata jest liczbą pierwszą.

☐ Istnieje nieskończenie wiele liczb Fermata.

☐ Istnieje nieskończenie wiele parzystych liczb Fermata.

Ćwiczenie 3



Dwudziestokąt foremny można skonstruować za pomocą cyrkla i liniału. Zapisane poniżej równości są prawdziwe, ale tylko jedna z nich pozwala wnioskować o wykonalności takiej konstrukcji, na podstawie kryterium Gaussa. Wskaż tę równość.

☐ $20 = 2^{2^2} + 2^2 \cdot 1$

☐ $20 = 2^4 + (2^2)$

☐ $20 = 2^2 \cdot (2^2 + 1)$

☐ $20 = 2 \cdot (2^3 + 2^1 \cdot 1)$

Ćwiczenie 4



Wśród podanych niżej n -kątów foremnych tylko jednego nie da się skonstruować klasycznymi metodami za pomocą cyrkla i liniału. Wskaż liczbę n -jego boków.

☐ 513

☐ 514

☐ 68

☐ 51

Ćwiczenie 5



Wybierz zdania prawdziwe. Wielokąt foremny można skonstruować za pomocą cyrkla i liniału, jeśli liczba n jego boków jest równa:

☐ $n = 14.$

☐ $n = 16.$

☐ $n = 13.$

☐ $n = 15.$

Ćwiczenie 6



Przeprowadź konstrukcję dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu a .

Ćwiczenie 7



Przeprowadź konstrukcję kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu a .

Ćwiczenie 8



Przeprowadź konstrukcję kwadratu opisanego na okręgu o promieniu a .

Ćwiczenie 9



Oblicz różnicę pól sześciokąta foremnego i trójkąta równobocznego wpisanych w okrąg o promieniu 1.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Wielokąty foremne.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa

VIII. Planimetria

Uczeń

3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje i poprawnie nazywa n – kąty foremne
- stosuje podstawowe konstrukcje geometryczne do rozwiązywania problemów
- odkrywa algorytm konstrukcji wielokątów foremnych o podwojonej liczbie boków na podstawie danego n – kąta foremnego
- rozpoznaje liczby Fermata i bada, czy dane liczba jest liczbą Fermata
- bada, czy dany n – kąt foremny można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm.
- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy zajęć:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer, najlepiej w pracowni komputerowej. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie wspólnie zastanawiają się, z czym kojarzy im się frazeologizm „kwadratura koła”. Nauczyciel wspomina o trzech klasycznych problemach geometrycznych starożytnej Grecji.
2. Nauczyciel prosi o scharakteryzowanie pojęcia wielokąta foremnego.
3. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęcia liczby pierwszej i złożonej. Wprowadza pojęcie liczby Fermata i wspólnie z uczniami uzasadnia, że liczba 17 jest liczbą pierwszą Fermata. Prosi o zbadanie, czy liczby 3, 5, 7 są liczbami pierwszymi Fermata.
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel precyzuje pojęcie wielokąta foremnego. Uczniowie na przykładach pokazują, że nie każdy wielokąt, który ma równe boki jest foremny. Uczniowie dyskutują, czy równość kątów jest wystarczająca dla stwierdzenia, czy dany wielokąt jest foremny.
2. Uczniowie mają za zadanie odkryć zależność między długością boku wielokąta i długościami promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten wielokąt. W tym celu nauczyciel rysuje trójkąt równoboczny lub kwadrat oraz okręgi opisany i wpisany w wybrany wielokąt. Następnie oznacza literami R i r promienie tych okręgów. Uczniowie zapisują zależność, a następnie uogólniają zastosowany model rozwiązania na przypadek ogólny i formułują twierdzenie.
3. Uczniowie, pracując w grupach, zastanawiają się nad konstrukcją ośmiokąta foremnego, gdy dany jest kwadrat wpisany w okrąg. Znaleziony algorytm stosują do konstrukcji

wielokąta, którego liczba boków da się opisać wzorem $n = 2^m$, gdzie m jest liczbą naturalną nie mniejszą niż 2.

4. Uczniowie, pracując w grupach, wykorzystują aplet geogebry Konstrukcje wielokątów foremnych. Nauczyciel steruje pracą w parach, tak by w trakcie wykonywania ćwiczeń z użyciem apletu samodzielnie sformułowali opis konstrukcji, który będzie możliwy do wykorzystania przez innych. Ważne jest, by w omawianych konstrukcjach dostrzec możliwość wnioskowania o innych wielokątach, niż te których bezpośrednio dotyczy aplet (np. konstrukcja trójkąta równobocznego, mając dany sześciokąt foremny, czy kwadratu, mając dany ośmiokąt, itd.).

5. Uczniowie realizując polecenie opisane w Przykładzie 2. doskonałą umiejętność pracy z tekstem matematycznym i intuicję geometryczną dotyczącą obiektów symetrycznych względem prostej.

6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

2. Nauczyciel wskazuje, że często rozwiązanie problemu, który pozornie nie jest związany z geometrią, daje się opisać prostym modelem geometrycznym i odwrotnie.

Praca domowa

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Symetralna odcinka](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimediu:

Aplet geogebry Konstrukcje wielokątów foremnych można użyć do przypomnienia konstrukcji symetralnej.