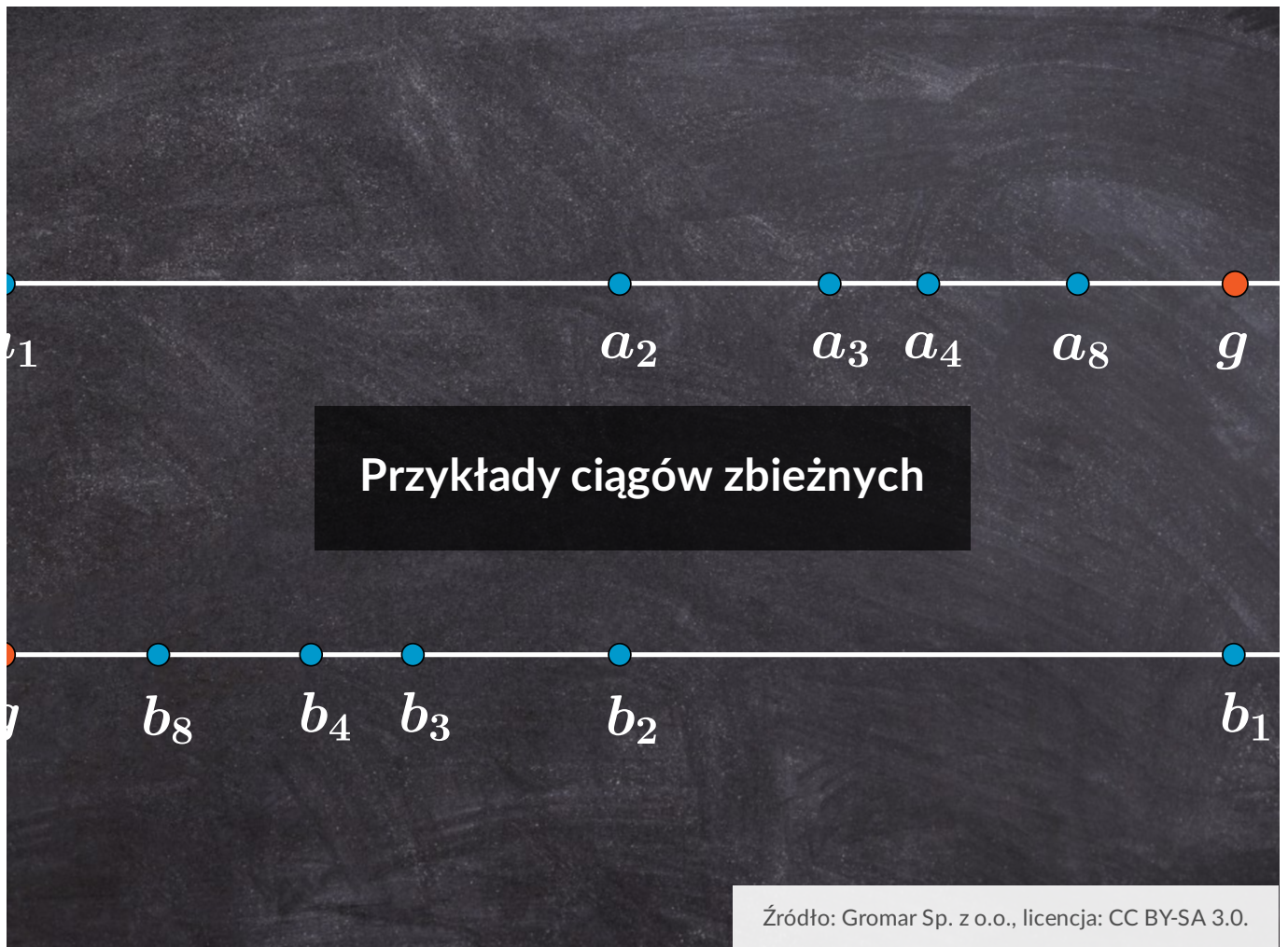


## Przykłady ciągów zbieżnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



We wcześniejszych tematach dowiedzieliśmy się czym jest granica ciągu oraz jaki jest jej związek ze zbieżnością ciągu. Poznaliśmy też przykładowe ciągi zbieżne. W tym temacie przedstawimy kolejne przykłady ciągów, które posiadają granicę skończoną, czyli są zbieżne a także postaramy się, korzystając z definicji granicy ciągu, uzasadnić ich zbieżność.

### Twoje cele

- Poznasz różne przykłady ciągów zbieżnych.
- Obliczysz granice wybranych ciągów zbieżnych.
- Uzasadnisz, korzystając z definicji, zbieżność wybranych ciągów.

# Przeczytaj

We wcześniejszych tematach poznaliśmy pojęcie granicy ciągu oraz dowiedzieliśmy się, między innymi że

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Poznamy teraz przykłady innych ciągów zbieżnych.

## Przykład 1

Niech  $a_n = 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Jest to ciąg stały, którego każdy wyraz jest równy 3. Granicą ciągu stałego jest jego stała wartość, czyli w naszym przykładzie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3.$$

Istotnie, sprawdźmy czy spełniona jest definicja granicy ciągu. Ponieważ

$$|a_n - 3| = |3 - 3| = 0$$

więc warunek  $|a_n - g| < \varepsilon$  jest zawsze spełniony dla każdej dodatniej liczby  $\varepsilon$ .

## Przykład 2

Niech  $b, c, d \in \mathbb{R}$  będą danymi liczbami rzeczywistymi, przy czym  $c \neq 0$ . Rozważmy ciąg  $a_n = \frac{b}{cn+d}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ciąg ten dla wszystkich liczb rzeczywistych  $b, c, d \in \mathbb{R}$ , ( $c \neq 0$ ) jest zbieżny do zera, co można zapisać symbolicznie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{cn+d} = 0.$$

Zauważmy, że dla  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $d = 0$  ciąg ten jest równy poznanemu już ciągowi  $a_n = \frac{1}{n}$ .

## Przykład 3

Rozważmy ciąg  $a_n = \frac{2n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wypiszmy kilka początkowych wyrazów tego ciągu

$$a_1 = 1, a_2 = 1\frac{1}{3}, a_3 = 1\frac{1}{2}, a_4 = 1\frac{3}{5}, a_5 = 1\frac{2}{3}, \dots, a_{20} = 1\frac{19}{21}$$

Widzimy, że kolejne wyrazy ciągu  $a_n$  są coraz bliższe liczbie 2. Możemy stąd wysnuć przypuszczenie, że granicą tego ciągu jest liczba 2, czyli

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$

Spróbujmy wykazać powyższą równość, korzystając z definicji granicy ciągu. W tym celu obliczymy wartość wyrażenia  $|a_n - g|$ , które pojawia się w definicji granicy. Mamy

$$|a_n - g| = \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}.$$

Ponieważ ciąg  $a_n = \frac{2}{n+1}$  jest zbieżny do 0 (podobnie jak ciąg  $a_n = \frac{1}{n}$ ) więc z definicji granicy ciągu dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje liczba naturalna  $N$  taka, że dla każdej liczby naturalnej  $n > N$  zachodzi nierówność  $\frac{2}{n+1} < \varepsilon$ . Stąd

$$|a_n - g| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon.$$

To dowodzi, że  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ .

#### Przykład 4

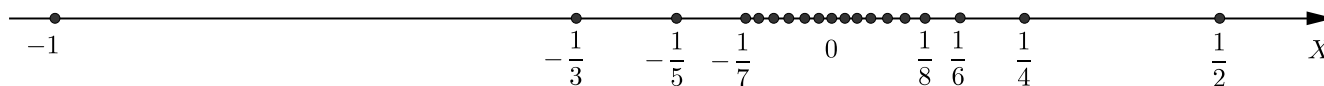
Rozważmy ciąg  $a_n = \frac{bn+c}{dn+f}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gdzie  $b, c, d, f \in \mathbb{R}$ ,  $d \neq 0$ . W podobny sposób jak w przykładzie 3. można wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{bn+c}{dn+f} = \frac{b}{d}.$$

Przyjmując np.  $b = 2$ ,  $c = 0$ ,  $d = 3$ ,  $f = -1$  otrzymujemy ciąg  $a_n = \frac{2n}{3n-1}$ , którego granica jest równa  $\frac{2}{3}$ . W jednym z kolejnych tematów poznamy sposób na obliczanie granic tego typu ciągów.

#### Przykład 5

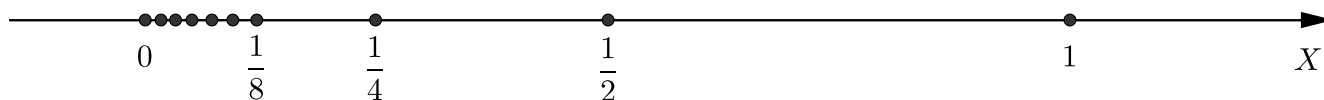
Rozważmy ciąg  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ . Ciąg ten podobnie jak ciąg  $a_n = \frac{1}{n}$  jest zbieżny do zera. W odróżnieniu od niego przyjmuje również wartości ujemne. Interpretację geometryczną tego ciągu przedstawia poniższy rysunek.



Widzimy, że w odróżnieniu od wcześniej poznanych ciągów, których prawie wszystkie wyrazy należały tylko do prawo- lub lewostronnego sąsiedztwa jego granicy, prawie wszystkie wyrazy ciągu  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$  należą zarówno do lewo- jak i prawostronnego sąsiedztwa zera.

#### Przykład 6

Niech dany będzie ciąg  $a_n = (\frac{1}{2})^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Jest to ciąg geometryczny o ilorazie równym  $\frac{1}{2}$ . Łatwo widać, że jest on zbieżny do zera (liczniki są zawsze równe jeden, natomiast mianowniki są coraz większe i zawsze dodatnie). Ilustruje to poniższy rysunek.



Okazuje się, że w ogólnym przypadku ciąg geometryczny  $a_n = q^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , jest zbieżny do zera wtedy i tylko wtedy, gdy  $|q| < 1$ . Możemy to zapisać symbolicznie w następujący sposób

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \Leftrightarrow |q| < 1.$$

### Przykład 7

Poniżej podane są granice jeszcze kilku ważnych ciągów.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ;
- jeśli  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$ , to  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ .

Pierwszą z podanych granic uzasadnimy w temacie poświęconym twierdzeniu o trzech ciągach.

### Dla zainteresowanych

Ważną rolę w matematyce odgrywa ciąg

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, n \in \mathbb{N}.$$

Jest to ciąg zbieżny a jego **granica** jest jedną z najważniejszych stałych matematycznych. Wypiszmy niektóre jego wyrazy.

$$a_1 = (1 + 1)^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2,37$$

$$a_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2,59$$

$$a_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2,705$$

$$a_{200} = \left(1 + \frac{1}{200}\right)^{200} \approx 2,716$$

$$a_{2500} = \left(1 + \frac{1}{2500}\right)^{2500} \approx 2,7177$$

Jak widać ciąg ten jest zbieżny do liczby, która w przybliżeniu jest równa 2,7. Liczba ta oznaczana jest literą  $e$  i jest ona liczbą niewymierną. Jest ona w przybliżeniu równa

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828 \dots$$

## Słowniczek

## granica ciągu

liczba rzeczywista  $g$  taka, że dla dowolnej liczby dodatniej  $\varepsilon$  istnieje liczba naturalna  $N$  taka, że dla każdej liczby naturalnej  $n > N$  zachodzi  $|a_n - g| < \varepsilon$

**sąsiedztwo lewostronne**

przedział  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$  dla pewnej liczby  $\varepsilon > 0$

**sąsiedztwo prawostronne**

przedział  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$  dla pewnej liczby  $\varepsilon > 0$

# Animacja

---

## Polecenie 1

Poniżej przedstawiona jest animacja, która pokazuje sposób na obliczenie granicy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a},$$

gdzie  $a$  jest dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą. Zapoznaj się z kolejnymi etapami obliczania tej granicy a następnie wykonaj umieszczone poniżej polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DRgTypDO3>

W filmie przedstawiono treści dotyczące przykładów ciągów zbieżnych.

---

## Polecenie 2

Dany jest ciąg  $a_n = \sqrt[n]{64}$ .

Oblicz  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, a_{12}$ . Zapisz wyniki w postaci dziesiętnej.

## Polecenie 3

Korzystając z kalkulatora, znajdź najmniejszą liczbę naturalną  $N$  taką, że  $a_N < 1.1$ , jeśli ciąg  $a_n$  dany jest wzorem  $a_n = \sqrt[n]{64}$ .

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Mariusz Doliński

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Przykłady ciągów zbieżnych

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu  $1n$ ,  $an$  oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne (językiem ucznia):**

- Poznasz różne przykłady ciągów zbieżnych.
- Obliczysz granice wybranych ciągów zbieżnych.
- Uzasadnisz, korzystając z definicji, zbieżność wybranych ciągów.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego i ćwiczeń interaktywnych.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach.

## Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki, kalkulator;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- duże arkusze papieru, flamastry dla każdej grupy.

## Przebieg zajęć:

### Faza wstępna

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie sytuacji problemowej związanej z tematem lekcji.

### Faza realizacyjna

1. Nauczyciel zapisuje na tablicy przykładowe ciągi zbieżne i prosi uczniów aby w grupach spróbowali odgadnąć jaka jest ich granica. Uczniowie do pomocy mogą wykorzystać komputery lub kalkulatory w celu obliczenia wybranych elementów ciągów.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy. Każda grupa losuje liczbę naturalną  $a$  i przy użyciu kalkulatora oblicza kolejne wyrazy ciągu  $\sqrt[n]{a}$ . Grupy porównują uzyskane wyniki i wyciągają wnioski na temat granicy ciągu  $\sqrt[n]{a}$ .
3. Uczniowie oglądają animację opisującą granice ciągów. Na jej podstawie wykonują Polecenia 2 i 3.
4. Nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy, Uczniowie z grupy pierwszej rozwiązują ćwiczenia interaktywne: 1, 3, 5, 7 a z grupy drugiej: 2, 4, 6, 8. Następnie w grupach omawiają trudności w rozwiązywanych ćwiczeniach. Wybrani uczniowie z każdej z grup wskazują ćwiczenie, które uważają za najtrudniejsze i uzasadniają wybór grupy

### Faza podsumowująca

- Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

## Praca domowa

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zrobili na lekcji.

## Materiały pomocnicze:

GeoGebra – wizualizacje oraz materiały wspierające naukę matematyki.

## Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimediu:

Uczniowie mogą przeanalizować treść animacji jako pracę własną przed lekcją lub po niej, jako podsumowanie.