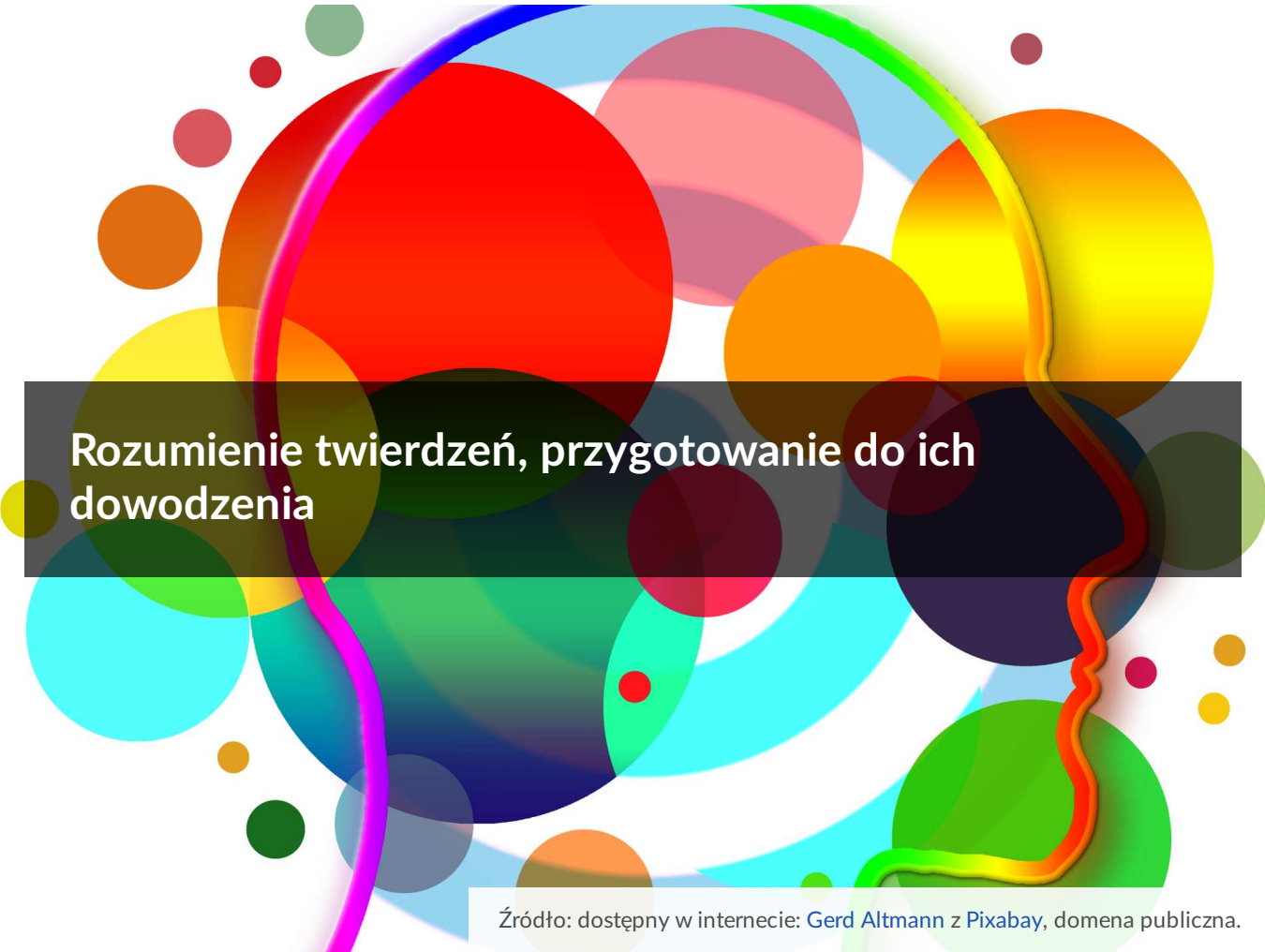




Rozumienie twierdzeń, przygotowanie do ich dowodzenia

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Mapa myśli](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozumienie twierdzeń, przygotowanie do ich dowodzenia

Źródło: dostępny w internecie: [Gerd Altmann](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

O prawdziwości naszych przypuszczeń najłatwiej jest przekonać samego siebie. Trudniej jest przekonać przyjaciela. Najtrudniej jest przekonać wroga. Tak więc ostateczna wersja dowodu powinna być jasna i nie może zawierać luk w rozumowaniu. Aby taki dowód utworzyć, warto myśleć o tym, kto będzie go czytał jako o osobie, która będzie kwestionować każdy z przedstawionych przez Ciebie kroków. Musisz więc tak tworzyć dowody twierdzeń, aby była w nich jasna odpowiedź na każde pytanie „dlaczego?”, które ktoś inny mógłby postawić.

Tak więc przygotuj się na bardzo wnikliwą pracę podczas dowodzenia twierdzeń, ale zanim zaczniesz ją wykonywać, musisz dobrze zrozumieć samą istotę twierdzeń i logiczną podbudowę procesu ich dowodzenia.

Treści zawarte w tym materiale są nadobowiązkowe, więc jeśli nie interesuje Cię ta tematyka, możesz po prostu materiał pominąć.

Twoje cele

- Zastosujesz prawo kontrapozycji w dowodzeniu twierdzeń.
- Wykorzystasz kwantyfikatory w dowodach twierdzeń.
- Zbudujesz twierdzenia odwrotne do danych.
- Zapiszesz twierdzenia w postaci kontrapozycji.

- Zapiszesz twierdzenia przy pomocy kwantyfikatorów.

Przeczytaj

Twierdzenia najczęściej zapisywane są w postaci implikacji. Implikacja $p \Rightarrow q$ nie jest równoważna implikacji $q \Rightarrow p$. Stąd wynika, że nie należy mylić tezy i założenia, ponieważ udowodnienie prawdziwości implikacji $q \Rightarrow p$ nie oznacza udowodnienia naszego wyjściowego twierdzenia $p \Rightarrow q$. Innymi słowy udowodnienie twierdzenia odwrotnego nie oznacza udowodnienia twierdzenia wyjściowego.

Istnieje jednak **prawo**, które umożliwia nam przeprowadzenie dowodu w trochę inny sposób niż skorzystanie na początku z założenia i – drogą kolejnych kroków – dotarcie do tezy. Czasami zdarza się tak, że nie umiemy zacząć przekształcać założeń, czyli zacząć naszego rozumowania, które powinno doprowadzić nas do tezy. Wtedy możemy skorzystać z prawa kontrapozycji:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Jak należy je rozumieć? Otóż implikacja

„z założenia wynika teza”

jest równoważna implikacji

„z zaprzeczenia tezy wynika zaprzeczenie założenia”.

Oznacza to, że jeżeli udowodnimy twierdzenie zapisane w formie kontrapozycji $\sim q \Rightarrow \sim p$, to udowodnimy twierdzenie zapisane w postaci implikacji $p \Rightarrow q$.

Sprawdźmy prawdziwość prawa kontrapozycji. Przeanalizujemy tabelę wartości logicznych, zwracając uwagę na zawartość wyróżnionych kolumn:

Wartość logiczna zdania p	Wartość logiczna zdania q	Wartość logiczna implikacji $p \Rightarrow q$	Wartość logiczna zdania $\sim p$	Wartość logiczna zdania $\sim q$	Wartość logiczna implikacji $\sim q \Rightarrow \sim p$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1

Przykład 1

Rozważmy twierdzenie (nie próbujemy go udowodnić):

Jeśli dla n naturalnego $\sqrt{n}$ jest liczbą wymierną, to $n = k^2$ dla pewnej liczby całkowitej k .

Wyodrębnijmy założenie i tezę, a następnie zbudujmy zaprzeczenie założenia, zaprzeczenie tezy, zapiszmy **twierdzenie odwrotne** do danego i twierdzenie w formie kontrapozycji.

Rozwiązanie:

Twierdzenie to możemy przeczytać następująco:

Jeśli dla n naturalnego $\sqrt{n}$ jest liczbą wymierną, to n jest kwadratem pewnej liczby całkowitej k .

Założenie: Pierwiastek z liczby naturalnej n jest liczbą wymierną.

Zaprzeczenie założenia: Pierwiastek z liczby naturalnej n nie jest liczbą wymierną – lub inne brzmienie: Pierwiastek z liczby naturalnej n jest liczbą niewymierną.

Teza: Liczba n jest kwadratem pewnej liczby całkowitej k .

Zaprzeczenie tezy: Liczba n nie jest kwadratem żadnej liczby całkowitej k – lub inne brzmienie: Nie istnieje taka liczba całkowita k , że n jest jej kwadratem.

Twierdzenie odwrotne:

Jeżeli n jest kwadratem pewnej liczby całkowitej k , to $\sqrt{n}$ jest liczbą wymierną.

Twierdzenie w postaci kontrapozycji:

Jeżeli liczba n nie jest kwadratem żadnej liczby całkowitej k , to $\sqrt{n}$ jest liczbą niewymierną.

Uwaga: W przypadku zapisywania twierdzenia w formie kontrapozycji trzeba bardzo uważnie budować negacje założenia i tezy – nie zawsze jest to łatwe.

W powyższym przykładzie zostały użyte zwroty „żadnej”, „nie istnieje”. Są one związane z pojęciem kwantyfikatora.

Kwantyfikatory znacznie ułatwiają i skracają zapisywanie form zdaniowych. Po użyciu kwantyfikatora i określeniu zbioru jego działania, forma zdaniowa staje się zdaniem prawdziwym lub fałszywym. Wiele twierdzeń można zapisać z użyciem kwantyfikatorów.

Kwantyfikatorami nazywamy zwroty: **dla każdego** i **istnieje takie**.

Istnieją dwa rodzaje kwantyfikatorów: kwantyfikator ogólny i kwantyfikator szczegółowy.

Kwantyfikator ogólny oznaczamy symbolem $\forall$ i czytamy: **dla każdego** x .

Kwantyfikator szczegółowy oznaczamy symbolem $\exists$ i czytamy: **istnieje takie** x .

Uwaga!

W niektórych starszych polskich książkach **kwantyfikator ogólny** jest oznaczany przez $\bigwedge_x$ („dla każdego x ...”), a **kwantyfikator szczegółowy** przez $\bigvee_x$ („istnieje takie x , że ...”).

Oznaczenia kwantyfikatorów $\forall$ i $\exists$ są międzynarodowe i pochodzą z języka angielskiego: $\forall$ od All (wszystkie), $\exists$ od Exists (istnieje). Takie właśnie oznaczenia są współcześnie używane.

Przykład 2

Rozważmy zapis z użyciem kwantyfikatora ogólnego: $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 0$ i zapis z użyciem kwantyfikatora szczegółowego: $\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 0$. Jak przeczytamy te zdania? Jaka jest ich wartość logiczna?

Rozwiązanie:

Zdanie $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 0$ czytamy: Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie x^2 jest nieujemne. Jest to zdanie prawdziwe – wyraża ono jeden z najbardziej znanych faktów matematycznych.

Zapis z użyciem kwantyfikatora szczegółowego: $\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 0$ czytamy: Istnieje taka liczba rzeczywista x , że wyrażenie x^2 ma wartość 0. Jest to zdanie prawdziwe – dla $x = 0$ zachodzi właśnie taka równość.

Nie wszystkie zdania zapisane przy pomocy kwantyfikatorów są prawdziwe.

Przykład 3

Jaką wartość logiczną mają zdania: $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 > 0$ i $\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 < 0$?

Rozwiązanie:

Zdania $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 > 0$ i $\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 < 0$ są zdaniami fałszywymi. Aby stwierdzić, że zdanie z kwantyfikatorem ogólnym jest fałszywe, wystarczy podać kontrprzykład, czyli przykład takiej liczby rzeczywistej x , dla której dana zależność nie zachodzi. W naszym przykładzie takim kontrprzykładem jest $x = 0$. Natomiast w przykładzie z kwantyfikatorem szczegółowym sytuacja jest bardziej skomplikowana. Aby pokazać, że nie istnieje liczba, która spełnia dany warunek, należałoby pokazać, że żadna liczba z rozważanego zbioru nie spełnia danego warunku.

I tutaj dochodzimy do budowania negacji zdań z kwantyfikatorami. Umiejętność budowania negacji zdań logicznych jest bardzo ważna głównie przy podawaniu **kontrprzykładów**.

Jak Ci się wydaje, co to znaczy zanegować zdanie z kwantyfikatorem ogólnym?
A z kwantyfikatorem szczegółowym?

Przykład 4

Rozważmy zdanie: Moduł każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny. Jak zapiszemy to zdanie przy pomocy kwantyfikatora? Zbudujemy zaprzeczenie tego zdania.

Rozwiązanie:

Przy pomocy kwantyfikatora zadanie to zapiszemy w sposób następujący: $\forall_{x \in \mathbb{R}} |x| \geq 0$.

Zaprzeczenie (negacja) zdania: Istnieje taka liczba rzeczywista, której moduł jest ujemny.

Przy pomocy kwantyfikatora zapiszemy: $\exists_{x \in \mathbb{R}} |x| < 0$.

Takich przykładów można zbudować wiele i zawsze zauważymy, że w zaprzeczeniu zdania z kwantyfikatorem ogólnym występuje **kwantyfikator szczegółowy** i zaprzeczenie formuły zdaniowej występującej w zapisanym zdaniu.

Przykład 5

Rozważmy zdanie: Istnieje taka liczba rzeczywista, której moduł jest liczbą ujemną. Jak zapiszemy to zdanie przy pomocy kwantyfikatora? Zbudujemy zaprzeczenie tego zdania.

Rozwiązanie:

Przy pomocy kwantyfikatora zapiszemy: $\exists_{x \in \mathbb{R}} |x| < 0$.

Zaprzeczenie (negacja) zdania: Nie istnieje taka liczba rzeczywista, której moduł jest liczbą ujemną. Inaczej: Moduł każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Przy pomocy kwantyfikatora zapiszemy: $\forall_{x \in \mathbb{R}} |x| \geq 0$.

Zauważmy, że w zaprzeczeniu zdania z kwantyfikatorem szczegółowym występuje **kwantyfikator ogólny** i zaprzeczenie formuły zdaniowej występującej w zapisanym zdaniu.

Należy podkreślić, że w wielu twierdzeniach nie pojawia się znak kwantyfikatora w zapisie, ale brzmienie twierdzenia („wykaż, że dla dowolnej liczby ...”, „znajdź taką liczbę, że ...”) zawiera samą „ideę” kwantyfikatora ogólnego lub szczegółowego. Dlatego też warto znać zasady pracy z kwantyfikatorami, aby bezbłędnie stosować je tam, gdzie kwantyfikator jest „ukryty”.

Zastosujmy nabytą podczas tej lekcji wiedzę do pracy z twierdzeniami.

Przykład 6

Rozważmy zadanie:

Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

Wyodrębnijmy założenie i tezę w tym twierdzeniu, zapiszmy twierdzenie do niego odwrotne, zapiszmy twierdzenie w formie kontrapozycji oraz zapiszmy je z użyciem kwantyfikatorów.

Rozwiązanie:

Założenie: $a > 0$ (a jest liczbą dodatnią)

Teza: $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$

Twierdzenie odwrotne:

Jeśli $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$ to $a > 0$

Twierdzenie w formie kontrapozycji:

Jeśli $\frac{a^2+1}{a+1} < \frac{a+1}{2}$ to $a \leq 0$ (Uważamy na nierówności ostre i nieostre przy negacjach!)

Twierdzenie zapisane przy użyciu kwantyfikatorów:

$$\forall_{a>0} \frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$$

Słownik

prawo kontrapozycji

równoważność implikacji prostej i przeciwstawnej, czyli

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

twierdzenie odwrotne

twierdzenie, w którym założenie zamieniono z tezą wyjściowego twierdzenia

twierdzenie w postaci kontrapozycji

dla danego twierdzenia to zdanie orzekające wynikanie zaprzeczenia założenia z zaprzeczenia tezy

kwantyfikator ogólny

kwantyfikator oznaczający, że dane twierdzenie (funkcja zdaniowa) jest prawdziwe dla dowolnej wartości zmiennej

kwantyfikator szczegółowy

kwantyfikator oznaczający, że istnieje taka wartość zmiennej, dla której dane twierdzenie (funkcja zdaniowa) jest prawdziwe

kontrprzykład

przykład sytuacji spełniającej założenia, a nie spełniającej tezy jakiegoś twierdzenia;
podanie kontrprzykładu obala to twierdzenie

Mapa myśli

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą mapie myśli. Zawiera ona wszystkie ważne pojęcia, jakie trzeba znać, aby dobrze przygotować się do dowodzenia danego twierdzenia.

- [bold]twierdzenie[/]
- twierdzenie odwrotne
- założenie
 - zaprzeczenie założenia
- teza
 - zaprzeczenie tezy
- twierdzenie zapisane z użyciem kwantyfikatora (jeśli można)
- twierdzenie w formie kontrapozycji
- moja intuicja: Czy twierdzenie jest prawdziwe?
 - jeśli nie, to kontrprzykład

Polecenie 2

Poniżej widzisz częściowo wypełnioną mapę myśli zastosowaną do twierdzenia: Jeśli dla n naturalnego $\sqrt{n}$ jest liczbą wymierną, to $n = k^2$ dla pewnej liczby całkowitej k . Uzupełnij brakujące miejsca.

- [bold]Założmy, że n jest liczbą naturalną. Jeśli pierwiastek z n jest liczbą wymierną, to n równa się k do kwadratu, gdzie k jest liczbą całkowitą.[/]
- twierdzenie odwrotne: ...
- założenie: pierwiastek z n jest liczbą wymierną
 - zaprzeczenie założenia: ...
- teza: n równa się k do kwadratu dla pewnej liczby całkowitej k
 - zaprzeczenie tezy: ...
- twierdzenie w formie kontrapozycji: ...
- moja intuicja: Czy twierdzenie jest prawdziwe? ...
 - jeśli nie, to kontrprzykład

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rozważ twierdzenie:
"Jeśli n^3 jest liczbą nieparzystą, to n jest liczbą nieparzystą."
Wypełnij tabelkę przeciągając do niej odpowiednie wyrażenia.

Założenie, Teza, Twierdzenie odwrotne, Zaprzeczenie założenia, Zaprzeczenie tezy,
Twierdzenie w formie kontrapozycji, Czy twierdzenie jest prawdziwe (intuicyjnie)?, Nie

Twierdzenie	Wyrażenie	
Założenie		
Teza		
Twierdzenie odwrotne		
Zaprzeczenie założenia		
Zaprzeczenie tezy		
Twierdzenie w formie kontrapozycji		
Czy twierdzenie jest prawdziwe (intuicyjnie)?		

Zdanie	Prawda	Fałsz
Dla każdej liczby całkowitej k liczba $\frac{k(k+1)}{2}$ jest liczbą całkowitą	☐	☐
Istnieje liczba naturalna n , dla której $2n + 5 = 6$	☐	☐

$([(\quad) (\quad) (\quad) (\quad) (\quad)] : \quad) \in \mathbb{Z}$

--	--	--	--

$$36 \quad k^2 \quad k^2 \quad = \quad \exists_{k \in \mathbb{Z}} \quad - \quad 2k^4 \quad \forall_{k \in \mathbb{R}} \quad k^6 \quad k^3 \quad +$$

Ćwiczenie 4



„Suma dowolnych dwóch liczb rzeczywistych jest większa od ich różnicy.” Wyodrębnij założenie i tezę, następnie zapisz twierdzenie w formie kontrapozycji i sformułuj twierdzenie do niego odwrotne. Co Ci podpowiada intuicja: czy twierdzenie jest prawdziwe?

☐ Teza: $a + b > a - b$.

☐ Założenie: $a + b > a - b$.

☐ Założenie: a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

☐ Teza: a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Ćwiczenie 5



Wyodrębnij założenie i tezę, następnie zapisz twierdzenie w formie kontrapozycji i sformułuj twierdzenie do niego odwrotne. Co Ci podpowiada intuicja: czy twierdzenie jest prawdziwe?

Iloczyn dowolnych dwóch liczb naturalnych dodatnich jest nie mniejszy od ich ilorazu.

Ćwiczenie 6



Wyodrębnij założenie i tezę, następnie zapisz twierdzenie w formie kontrapozycji i sformułuj twierdzenie do niego odwrotne. Co Ci podpowiada intuicja: czy twierdzenie jest prawdziwe?

Dla każdej liczby naturalnej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

Ćwiczenie 7



Wyodrębnij założenie i tezę, następnie zapisz twierdzenie w formie kontrapozycji i sformułuj twierdzenie do niego odwrotne. Co Ci podpowiada intuicja: czy twierdzenie jest prawdziwe?

Jeśli czworokąt jest kwadratem, to jest rombem.

Ćwiczenie 8



Wyodrębnij założenie i tezę, następnie zapisz twierdzenie w formie kontrapozycji i sformułuj twierdzenie do niego odwrotne. Co Ci podpowiada intuicja: czy twierdzenie jest prawdziwe?

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dla nauczyciela

Autor: Anna Rybak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozumienie twierdzeń, przygotowanie do ich dowodzenia

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

2) Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków.

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1) Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:

- a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
- b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje prawo kontrapozycji;
- stosuje do zapisu zdań pojęcie kwantyfikatora ogólnego i kwantyfikatora szczegółowego;
- tworzy zaprzeczenia zdań z kwantyfikatorami;
- formułuje twierdzenia odwrotne do danych;
- zapisuje dane twierdzenia w formie kontrapozycji;
- intuicyjnie określa prawdziwość lub nieprawdziwość twierdzenia, argumentując swoje zdanie – bez dowodzenia.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- metoda problemowa.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- praca z tekstem matematycznym;
- dyskusja;
- mapa myśli;
- ćwiczenia.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Rozumienie twierdzeń, przygotowanie do ich dowodzenia”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wspólnie zapoznają się z prawem kontrapozycji, wykonują Ćwiczenie 1, a następnie analizują Przykład 1.
2. Nauczyciel wprowadza pojęcia: kwantyfikator ogólny i kwantyfikator szczegółowy.
3. Uczniowie analizują Przykłady 2.-5. dyskutując nad poruszonymi w nich zagadnieniami.

4. Uczniowie pracują nad Przykładem 6. Najpierw starają się sami wyodrębnić założenie i tezę podanego twierdzenia, zapisać je z użyciem kwantyfikatorów, w postaci kontrapozycji, zapisać twierdzenie odwrotne, a następnie w drodze dyskusji omawiają swoje zapisy.
5. Uczniowie analizują materiał przedstawiony w sekcji „Mapa myśli”, a następnie wykonują Ćwiczenie 2. Podsumowują w formie dyskusji tę część pracy.
6. Uczniowie wykonują zadania z sekcji „Sprawdź się”: 1. indywidualnie, 2. i 4. razem, 6., 7. indywidualnie. Następnie dyskutują o rozwiązaniach zadań wykonywanych indywidualnie, sprawdzając ich poprawność i uzasadniając swoje decyzje.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytania: Co było w lekcji trudne? Co było w lekcji interesujące? Co chcielibyście zmienić, gdyby lekcja miała być przeprowadzona jeszcze raz? Jeszcze raz krótko odnosi się do elementów wskazanych jako trudne, komentuje propozycje zmian w lekcji.
2. Uczniowie krótko podsumowują swoje osiągnięcia, rozwijając zdanie: Na dzisiejszych zajęciach zaciekało mnie ...

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują zadania 3., 5. i 8. z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Co mówią pytania?](#)

Wskazówki metodyczne:

- Podczas tej lekcji główną uwagę zwracamy na kształcenie umiejętności zapisywania twierdzeń odwrotnych do danych i zapisywanie twierdzeń w postaci kontrapozycji.
- Należy ponownie zwrócić baczną uwagę na wyodrębnianie założenia i tezy w twierdzeniach sformułowanych w postaci innej niż implikacja (zadania 4.-8. z sekcji Sprawdź się).
- Przy budowaniu twierdzeń odwrotnych do rozpatrywanych należy przedyskutować z uczniami kwestię prawdziwości twierdzenia wyjściowego i twierdzenia odwrotnego. Należy zwrócić uwagę uczniów na te przypadki, gdy twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, ponieważ to może później ustrzec uczniów przed zamianą założenia i tezy przy dowodzeniu twierdzenia.
- Zapisywanie twierdzeń w postaci kontrapozycji ma uczniów przygotować do dowodzenia metodą nie wprost. Należy tutaj zwrócić baczną uwagę na prawidłowe budowanie negacji założenia i tezy, zwłaszcza jeśli w twierdzeniu mamy do czynienia z nierównościami – w negacjach uczniowie często nie zwracają uwagi na to, czy

nierówność powinna być ostra czy nieostra. Podobnie jest z domkniętością przedziałów.

- Znajomość kwantyfikatorów jest ponadprogramowa, ale dobrze przygotowuje do pracy z kontrprzykładami.
- Mapę myśli można wykorzystać np. na zajęciach poświęconych dowodom geometrycznym.