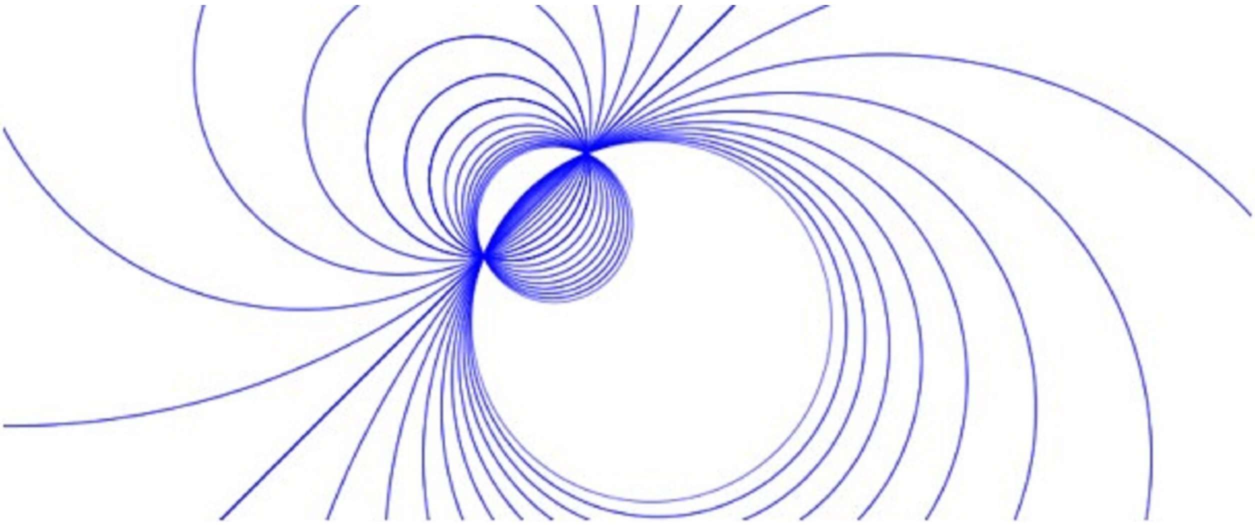
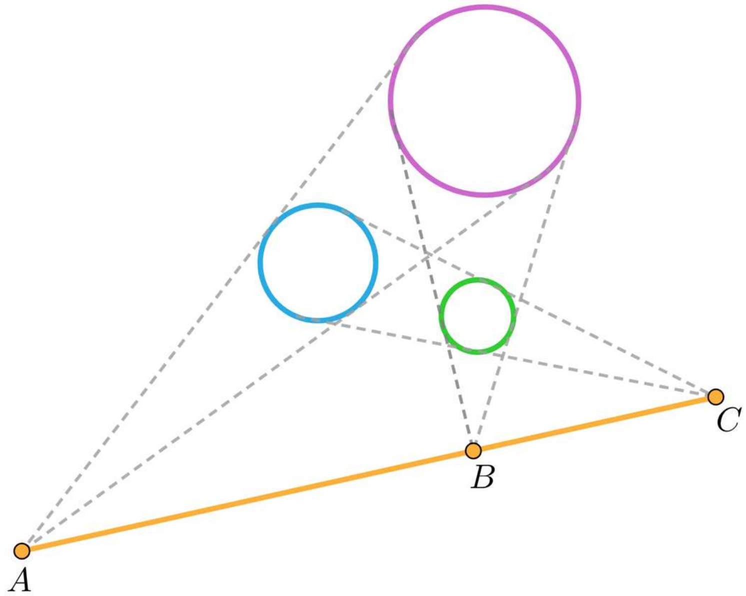
Okręgi rozłączne

Źródło: dostępny w internecie: Amanda Elizabeth z Pixabay, domena publiczna.



Pęk okręgów o równaniu $(1+k)x^2+(1+k)y^2+(2-4k)x-6y-1+2k=0$.



Twierdzenie Monge’a

Twierdzenie Monge’a to twierdzenie geometrii mówiące, że dla dowolnych trzech parami rozłącznych okręgów, punkty przecięć trzech par prostych stycznych zewnętrznie do odpowiednich par okręgów są współliniowe. Problem został postawiony przez d’Alemberta oraz udowodniony przez Gasparda Monge’a w 1798 roku.

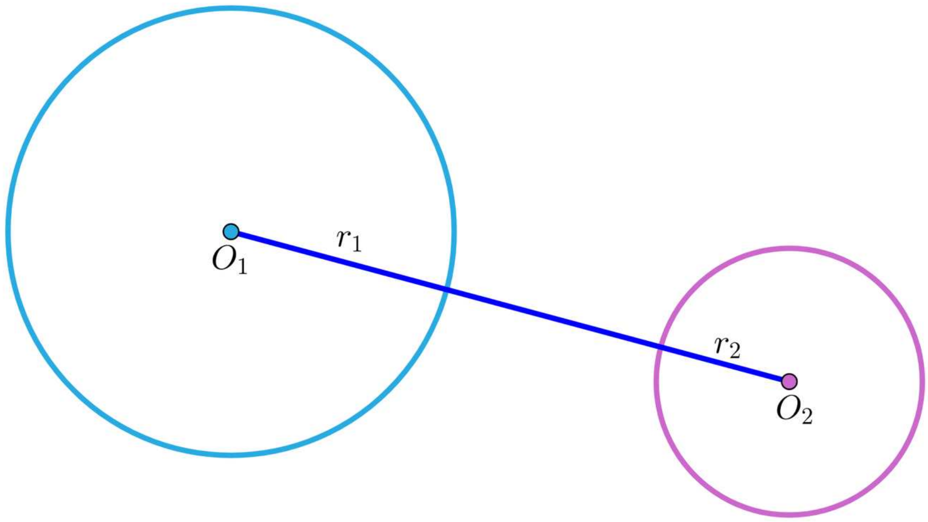
W tym materiale przybliżymy informacje dotyczące okręgów rozłącznych.

> **Twoje cele**
>
> - Rozpoznasz okręgi rozłączne zewnętrznie i wewnętrznie.
> - Zastosujesz twierdzenia o wzajemnym położeniu dwóch okręgów.
> - Zastosujesz poznane wiadomości i umiejętności do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Przeczytaj

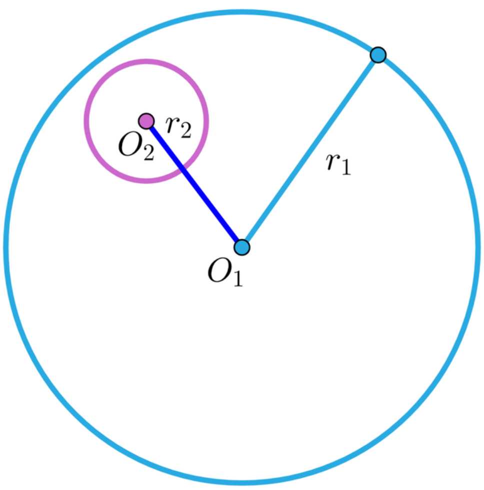
Rozważmy dwa okręgi: okrąg o środku w punkcie $O_1 = (a_1,\ b_1)$ i promieniu r_1 oraz okrąg o środku w punkcie $O_2 = (a_2,\ b_2)$ i promieniu długości r_2. Okręgi te na płaszczyźnie mogą nie mieć punktów wspólnych – nazywamy je rozłącznymi.

Okręgi są rozłączne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środków okręgów jest większa niż suma długości ich promieni:



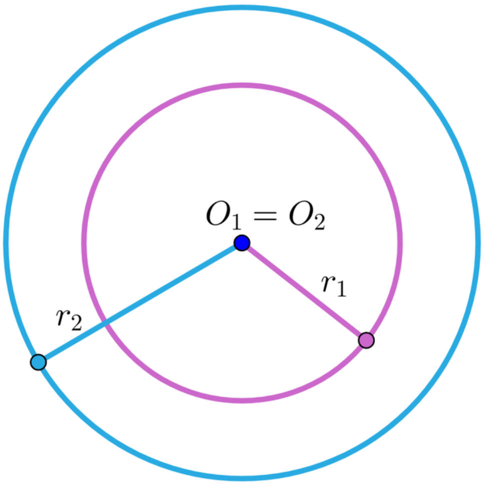
$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

Okręgi są rozłączne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środków okręgów jest mniejsza niż różnica długości ich promieni:



$$0 \leq |O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$

Szczególnym przypadkiem okręgów rozłącznych o różnych promieniach są okręgi współśrodkowe:



$$|O_1O_2| = 0$$

Przykład 1

Określimy wzajemne położenie okręgów: $o_1(O_1,\ r_1)$ i $o_2(O_2,\ r_2)$, jeśli $|O_1O_2| = 1$, $r_1 = 3$, $r_2 = 5$.

Rozwiązanie

Ponieważ $|r_1 - r_2| = 2$, więc

$|O_1O_2| = 1 < 2$.

Okręgi są rozłączne wewnętrznie.

Przykład 2

Określimy wzajemne położenie okręgów: $o_1 : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$ i $o_2 :$ $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 2$.

Rozwiązanie

Ponieważ $O_1 = (2,\ -1)$ i $r_1 = \sqrt{10}$ oraz $O_2 = (7,\ 3)$ i $r_2 = \sqrt{2}$, to

$|O_1O_2| = \sqrt{(7-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} \approx 6,4$

i

$r_1 + r_2 = \sqrt{10} + \sqrt{2} \approx 3,16 + 1,41 = 4,57;$

Zatem:

$|O_1O_2| > r_1 + r_2$

Dane okręgi są rozłączne zewnętrznie.

Przykład 3

Niech $a > 0$ i $|O_1O_2| = 3$. Ustalimy, dla jakiego a okręgi $o_1(O_1,\ 2a)$ i $o_2(O_2,\ a+1)$ będą rozłączne.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $r_1 + r_2 = 3a + 1$ oraz $|r_1 - r_2| = |a - 1|$.

Aby okręgi były rozłączne zewnętrznie, musi zachodzić zależność:

$r_1 + r_2 < |O_1O_2|$.

Zatem: $3a + 1 < 3$, stąd: $a \in \left(0,\ \frac{2}{3}\right)$.

Aby okręgi były rozłączne wewnętrznie, musi zachodzić zależność:
$0 \leq |O_1O_2| < |\ r_1 - r_2|$.

Zatem: $|a - 1| > 3$, stąd: $a \in (4,\ \infty)$.

Przykład 4

Dany jest okrąg o_1 o równaniu: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$. Wyznaczymy wartości parametru $r_2 > 0$, dla których okrąg o_2 o równaniu: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = r_2^2$ jest rozłączny z okręgiem o_1.

Rozwiązanie

Okrąg o_1 ma środek w punkcie $O_1 = (3,\ -1)$ i promień długości $r_1 = 4$.

Okrąg o_2 ma środek w punkcie $O_2 = (-2,\ 3)$.

Zauważmy, że: $|O_1O_2| = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{41}$.

Aby okręgi były rozłączne zewnętrznie, musi zachodzić warunek: $r_1 + r_2 < |O_1O_2|$.

Zatem: $4 + r_2 < \sqrt{41}$. Stąd: $r_2 < \sqrt{41} - 4$.

Aby okręgi były rozłączne wewnętrznie musi zachodzić warunek: $0 < |O_1O_2| < |r_1 - r_2|$
.

Zatem: $|4 - r_2| > \sqrt{41}$.

Stąd: $4 - r_2 > \sqrt{41}$ lub $4 - r_2 < -\sqrt{41}$, co daje: $r_2 < 4 - \sqrt{41}$ lub $r_2 > 4 + \sqrt{41}$.

Ponieważ $\sqrt{41} > 4$, to ostatecznie: $r_2 > 4 + \sqrt{41}$.

Przykład 5

Dany jest okrąg o_1 o równaniu: $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 30 = 0$. Wyznaczymy wartości parametrów $r_2 > 0$ i $r_3 > 0$, dla których okręgi o_1 i $o_2 : (x+2)^2 + (y-2)^2 = r_2^2$ oraz o_1 i $o_3 : (x-1)^2 + (y+1)^2 = r_3^2$ są rozłączne wewnętrznie a jednocześnie okręgi o_2 i o_3 są rozłączne zewnętrznie.

Rozwiązanie

Okrąg o_1 ma środek w punkcie $O_1 = (-3, \ -5)$ i promień długości $r_1 = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 - (-30)} = 8$.

Okrąg o_2 ma środek w punkcie $O_2 = (-2, \ 2)$ zaś okrąg o_3 ma środek w punkcie $O_3 = (1, \ -1)$.

Zauważmy, że punkty O_2 i O_3 leżą wewnątrz koła o równaniu
$k_1 : x^2 + y^2 + 6x + 10y - 30 \leq 0$, bo
$|O_1O_2| = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (2-(-5))^2} = \sqrt{50} < 8$ i
$|O_1O_3| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-1-(-5))^2} = \sqrt{32} < 8$.

Ponieważ okręgi o_1 i o_2 są rozłączne wewnętrznie, to: $0 < |O_1O_2| < |r_1 - r_2|$. Zatem: $5\sqrt{2} < |8 - r_2|$.

Ponieważ okręgi o_1 i o_3 są rozłączne wewnętrznie, to: $0 < |O_1O_3| < |r_1 - r_3|$. Zatem: $4\sqrt{2} < |8 - r_3|$.

Ponieważ okręgi o_2 i o_3 są rozłączne zewnętrznie, to: $|O_2O_3| > r_2 + r_3$. Zatem: $\sqrt{(1-(-2))^2 + (-1-2)^2} > r_2 + r_3$.

Rozwiązujemy zatem układ 3 nierówności:

$$\begin{cases} |8 - r_2| > 5\sqrt{2} \\ |8 - r_3| > 4\sqrt{2} \\ r_2 + r_3 < 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Zauważmy, że jedyna możliwa sytuacja to taka, że okręgi O_2 i O_3 leżą wewnątrz okręgu O_1. Zatem $r_2 \in (0, 8)$ i $r_3 \in (0, 8)$, więc

$$\begin{cases} r_2 \in \left(0,\ 8-5\sqrt{2}\right) \\ r_3 \in \left(0,\ 8-4\sqrt{2}\right) \\ r_2 + r_3 < 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Zauważmy, że: $r_2 + r_3 < 8 - 5\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{2} = 16 - 9\sqrt{2}$.

$16 - 9\sqrt{2} \approx 16 - 12,73 = 3,27$

$3\sqrt{2} \approx 4,24$

Zatem $r_2 + r_3 < 3\sqrt{2}$ i ostatecznie dla $r_2 \in \left(0,\ 8-5\sqrt{2}\right)$ i $r_3 \in \left(0,\ 8-4\sqrt{2}\right)$ okręgi o_1 i o_2 oraz o_1 i o_3 są rozłączne wewnętrznie, a jednocześnie okręgi o_2 i o_3 są rozłączne zewnętrznie.

Niech o będzie okręgiem o środku w punkcie O i promieniu r, zaś P – dowolnym punktem.

Potęgą punktu P względem okręgu o nazywamy liczbę $pot(P; o) = |PO|^2 - r^2$.

Potęga punktu, który leży na zewnątrz okręgu jest równa kwadratowi długości stycznej poprowadzonej z punktu P do okręgu o.

Zbiorem punktów, które mają równe potęgi względem danych dwóch okręgów o_1 i o_2 (o różnych środkach), jest prosta. Prostą tę nazywamy **prostą (osią) potęgową** okręgów o_1 i o_2.

W poniższym aplecie przedstawiono oś potęgową dla okręgów przecinających się. Przechodzi ona zawsze przez punkty przecięcia tych okręgów.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D15CGloXz

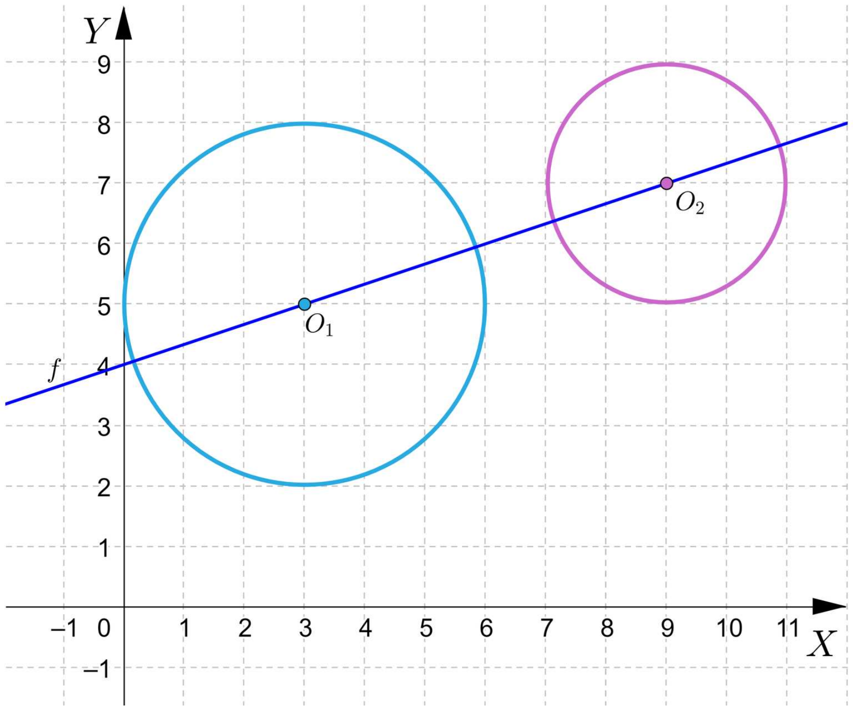
Gdy okręgi są **rozłączne**, to prosta potęgowa tych okręgów jest prostą prostopadłą do prostej przechodzącej przez ich środki przechodzącą przez środek odcinka wspólnej stycznej tych okręgów łączącego jej punkty styczności z tymi okręgami. Nie ma ona punktów wspólnych z tymi okręgami.

Przykład 6

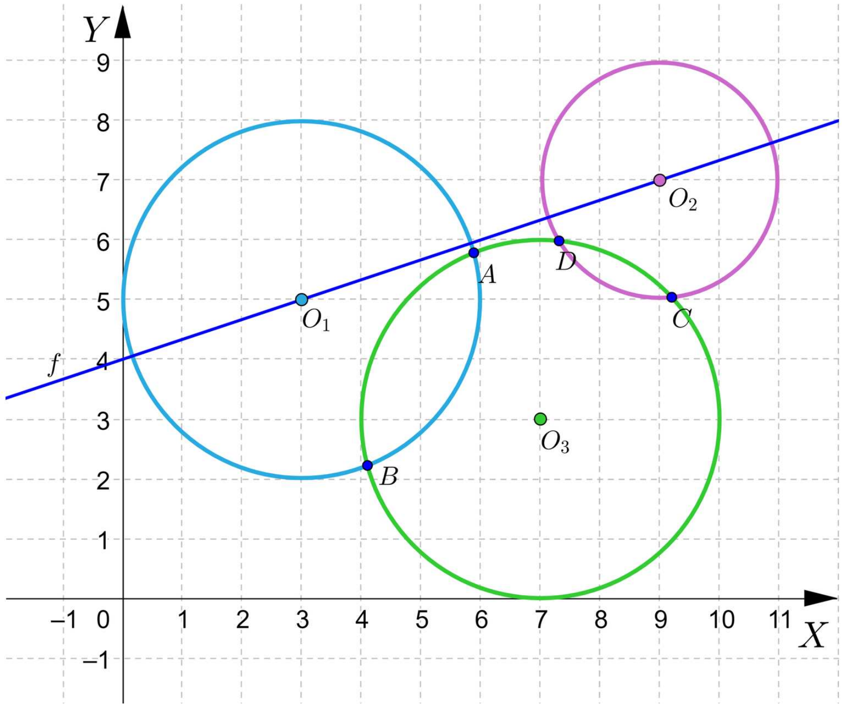
Niech o_1 będzie okręgiem o środku w punkcie O_1 i promieniu r_1 zaś okrąg o_2 – okręgiem o środku w punkcie O_2 i promieniu r_2. Skonstruujemy prostą potęgową okręgów o_1 i o_2, jeśli są one rozłączne zewnętrznie.

Rozwiązanie

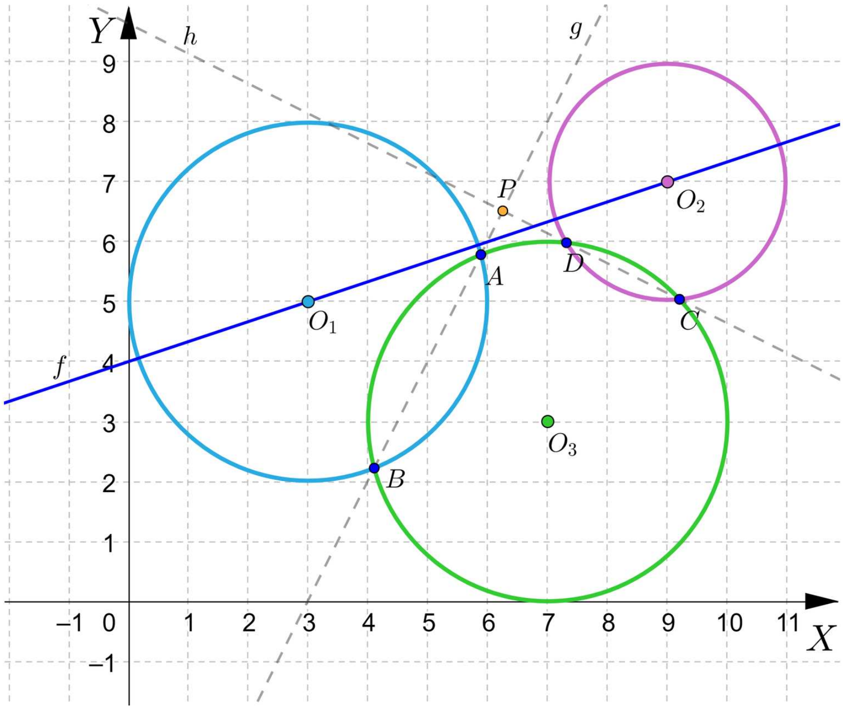
Narysujemy okręgi o_1 i o_2 oraz prostą O_1O_2.



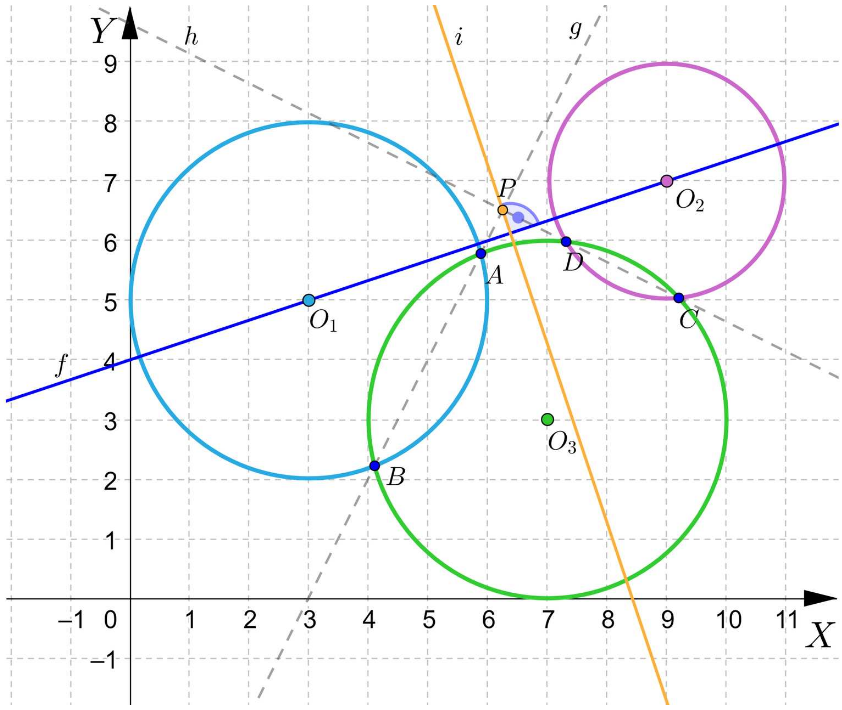
Wykreślamy okrąg o_3 tak, by przecinał każdy z okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach: A, B, C, D.



Prosta O_1O_2 jest prostą potęgową okręgów o_1 i o_3 zaś prosta CD – prostą potęgową okręgów o_2 i o_3. Przecinają się one w punkcie P, który jest środkiem potęgowym wszystkich trzech kół.



Prowadzimy teraz prostą prostopadłą do prostej O_1O_2 i przechodzącą przez punkt P.



Jest ona prostą potęgową okręgów o_1 i o_2.

Słownik

okręgi rozłączne zewnętrznie

odległość środków okręgów jest większa niż suma długości ich promieni

okręgi rozłączne wewnętrznie

odległość środków okręgów jest mniejsza niż różnica długości ich promieni

środek potęgowy

punkt przecięcia linii potęgowych trzech okręgów, z których żadne dwa nie są współśrodkowe

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż testy samosprawdzające. Wśród podanych możliwości wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Test

Okręgi rozłączne

Sprawdzisz:

- swoje umiejętności rozpoznawania okręgów rozłącznych zewnętrznie i wewnętrznie;
- swoje umiejętności z zakresu stosowania twierdzenia o wzajemnym położeniu dwóch okręgów.

Liczba pytań: 5

Limit czasu: 10 min

Twój ostatni wynik: -

Uruchom

Polecenie 2

Ułóż test złożony z pięciu pytań, każde z trzema odpowiedziami. Ułożony test daj do rozwiązania koledze lub koleżance z klasy.

Question: ...

a. ...
b. ...

c. ...

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Uzupełnij zdania, przeciągając poprawne odpowiedzi w puste pola.

Okręgi: $o(A,\ r_1)$ i $o(B,\ r_2)$, gdy $|AB| = 10$ oraz $r_1 = 3$, $r_2 = 5$ są ______.

Okręgi: $o(A,\ r_1)$ i $o(B,\ r_2)$, gdy $|AB| = 1$ oraz $r_1 = 3$, $r_2 = 5$ są ______.

styczne zewnętrznie | styczne wewnętrznie | rozłączne wewnętrznie | rozłączne zewnętrznie

Ćwiczenie 2

Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.
Okręgi o równaniach $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ są:

- rozłączne wewnętrznie.
- styczne wewnętrznie.
- rozłączne zewnętrznie.
- styczne zewnętrznie.

Ćwiczenie 3

Dany jest okrąg O_1 o równaniu: $x^2 + y^2 - 4y = 0$. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Okrąg O_1 jest rozłączny zewnętrznie z okręgiem o równaniu: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$.	○	○
Okrąg O_1 jest rozłączny wewnętrznie z okręgiem o równaniu: $x^2 + y^2 - 4x = 0$.	○	○
Okrąg O_1 jest rozłączny zewnętrznie z okręgiem o równaniu: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.	○	○

Ćwiczenie 4

Dokończ zdanie, wybierając poprawne odpowiedzi.
Okręgi o równaniach: $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 25$ oraz $(x-10)^2 + y^2 = r^2$ nie mają punktów wspólnych, gdy:

- ☐ $r = \sqrt{160}$.
- ☐ $r = \sqrt{7}$.
- ☐ $r = \sqrt{150}$.
- ☐ $r = \sqrt{6}$.

Ćwiczenie 5

Połącz w pary okręgi rozłączne zewnętrznie.

$(x+6)^2+(y-6)^2=36$	$(x+2)^2+(y-12)^2=1$
$(x+2)^2+(y-10)^2=16$	$(x+4)^2+(y-2)^2=4$

Ćwiczenie 6

Dane są okręgi o_1 o środku w punkcie $O_1=(6,\ 6)$ i promieniu $r_1=3$ oraz o_2 o środku w punkcie $O_2=(12,\ 2)$ i promieniu r_2.
Spośród podanych liczb wybierz i przeciągnij w odpowiednie miejsca w kolejności rosnącej te, które mogą być długościami promienia okręgu o_2 rozłącznego wewnętrznie z okręgiem o_1

$r_2 \in$ ____ ; ____ ; ____

$3,5$ | $3,6$ | $2\sqrt{3}$ | $\sqrt{13}$ | $3,4$

Ćwiczenie 7

Określ wzajemne położenie okręgów o równaniach: $o_1:(x+5)^2+(y+1)^2=49$ i $o_2:(x+1)^2+(y+4)^2=2$.

Ćwiczenie 8

Określ wzajemne położenie okręgów o równaniach: $o_1:x^2+y^2+4x-8y+11=0$ i $o_2:x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

Dla nauczyciela

Autor: Janusz Karkut, Aneta Rogalska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okręgi rozłączne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne i informatyczne;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza współrzędne środków i długości promieni okręgów;
- sprawdza, czy dane okręgi są rozłączne;
- wyznacza wartości parametrów, dla których okręgi są rozłączne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- pokaz multimedialny;
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputer z rzutnikiem multimedialnym i z dostępem do Internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie zapoznają się ze wstępem sekcji „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
3. Uczniowie przypominają definicję koła i okręgu oraz równania okręgu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 5 grup. Każda grupa ma zapoznać się z jednym przykładem z sekcji „Przeczytaj”, a następnie przedstawić przykład pozostałym uczniom.
2. Nauczyciel w razie potrzeby pomaga uczniom w wyjaśnianiu zagadnienia.
3. Następnie uczniowie pracują indywidualnie – rozwiązują ćw. 1 – 4 z sekcji „Sprawdź się”. W razie pytań nauczyciel wyjaśnia niejasności.
4. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
5. Uczniowie rozwiązują testy samosprawdzające. Osoby, które rozwiążą test bezbłędnie mogą zostać nagrodzone oceną.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują pozostałe zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Punkty wspólne dwóch okręgów

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać materiał w sekcji „Testy samosprawdzające” do powtórzenia przed sprawdzianem.