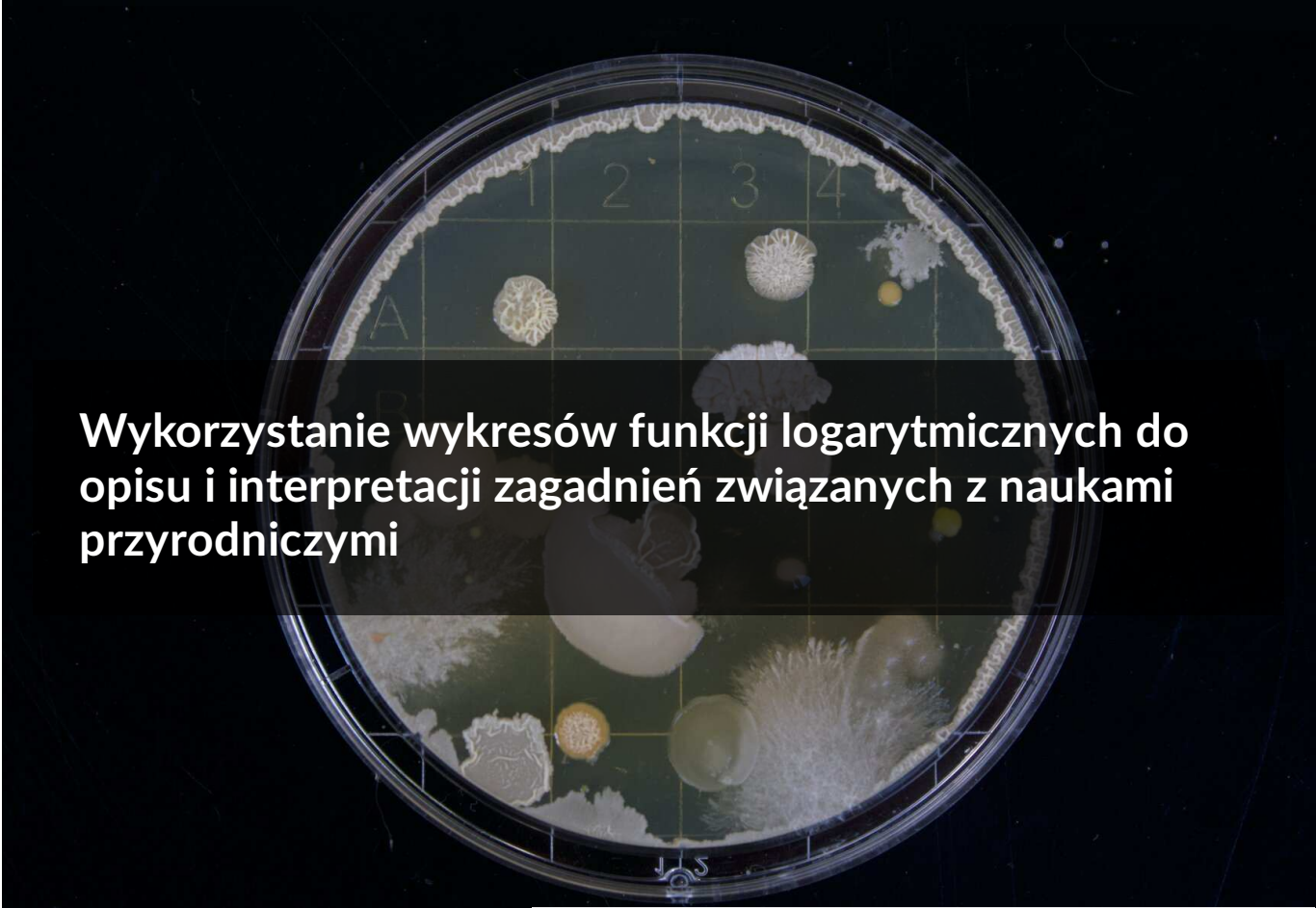




Wykorzystanie wykresów funkcji logarytmicznych do opisu i interpretacji zagadnień związanych z naukami przyrodniczymi

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykorzystanie wykresów funkcji logarytmicznych do opisu i interpretacji zagadnień związanych z naukami przyrodniczymi

Źródło: Michael Schiffer, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Naukowcy, którzy badają dane zjawisko, starają się znaleźć wzór funkcji opisującej parametry tego zjawiska. Pozwala to przedstawić graficznie przebieg tego procesu w zależności od różnych czynników. Ważniejsze jest jednak to, że dzięki takim funkcjom naukowcy mogą przewidywać, w jaki sposób zjawisko będzie przebiegało.

Okazuje się, że przyroda w tym przypadku bardzo mocno upodobała sobie funkcje wykładnicze i logarytmiczne. Za pomocą funkcji wykładniczych można opisać zjawisko rozpadu izotopów promieniotwórczych, co ma zastosowanie między innymi w archeologii i medycynie. Za pomocą modelu wykładniczego można opisać stężenie leków we krwi pacjenta (maleje wykładniczo) lub populację bakterii w próbce (rośnie wykładniczo).

Funkcję logarytmiczną można zastosować do opisu reakcji ludzkich zmysłów. Zgodnie z odkrytym doświadczalnie prawem Webera-Fechnera nasza reakcja na bodźce zależy od logarytmu ich zmiany. Na przykład, jeżeli najpierw słyszymy dźwięk o natężeniu I_1 , a następnie dźwięk o natężeniu I_2 , to nasze ucho rejestruje drugi dźwięk jako $\log \frac{I_2}{I_1}$ razy większy od pierwszego.

W tym materiale poznasz zjawiska opisane funkcjami wykładniczymi lub logarytmicznymi. Nauczysz się wyznaczać



Źródło: Foundry, dostępny w internecie:
<https://pixabay.com/>.

wzór funkcji opisującej dane zjawisko na podstawie wykresu.

Twoje cele

- Znajdziesz wzory funkcji wykładniczych i logarytmicznych opisujących zjawiska przyrodnicze.
- Opisziesz zjawiska opisane funkcjami wykładniczymi lub logarytmicznymi.

Przeczytaj

Na początek proponujemy Ci wykonanie doświadczenia lub symulacji.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1BGJ381a>

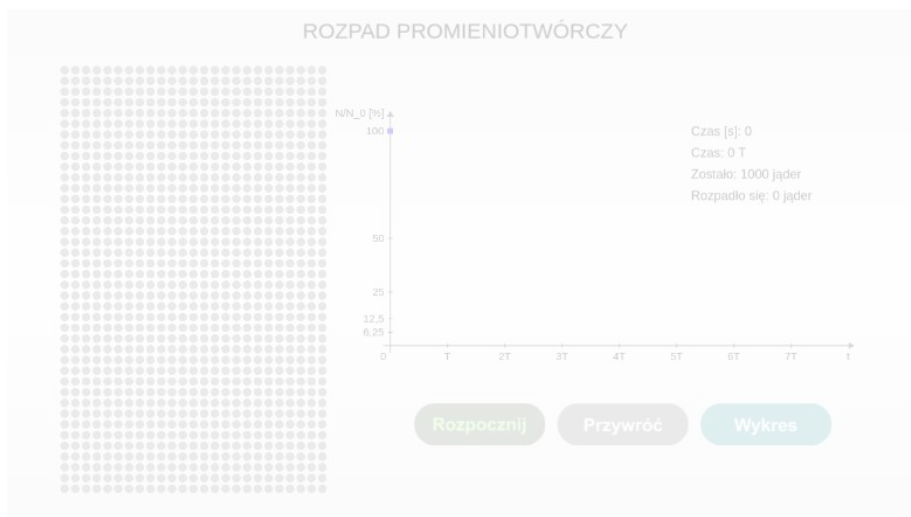
Polecenie 1

Niech x oznacza numer kolejnego rzutu monetami w doświadczeniu opisanym powyżej. Na podstawie wykonanego doświadczenia oceń, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

Stwierdzenie	Prawda	Fałsz
Po każdym rzucie liczba orłów zmniejsza się mniej więcej o połowę.	☐	☐
W każdym rzucie liczba orłów jest dwa razy mniejsza od liczby reszek.	☐	☐
Przez punkty na wykresie można poprowadzić wykres funkcji opisanej wzorem: $y = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, gdzie k oznacza liczbę monet użytych w doświadczeniu.	☐	☐
Przez punkty na wykresie można poprowadzić wykres funkcji opisanej wzorem: $y = k \cdot 2^x$, gdzie k oznacza liczbę monet użytych w doświadczeniu.	☐	☐
Doświadczenie z monetami jest przykładem sytuacji związanej z zanikiem wykładniczym.	☐	☐

Zbadaj rozpad promieniotwórczy przy użyciu poniższej symulacji.

W próbce znajduje się 1000 jąder promieniotwórczych (szarych kółeczek). W chwili uruchomienia symulacji jądra ulegają rozpadowi, czyli przemianie promieniotwórczej (kolor kółeczka zmienia się z szarego na niebieski). Symulację można zatrzymać i wznowić przyciskiem start/stop. Po wciśnięciu stop w układzie współrzędnych pojawia się niebieski punkt. Zaznacz kilkanaście takich punktów, a następnie wybierz wykres.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1BGJ381a>

Polecenie 2

Odczytaj z wykresu i wpisz w tabeli, jaki procent jąder promieniotwórczych nie uległ rozpadowi po upływie czasu T , $2T$, $3T$ itd.

Czas	0	T	2T	3T	4T
procent jąder w próbce, które nie uległy rozpadowi					

Jakie są podobieństwa między doświadczeniem z monetami a symulacją rozpadu promieniotwórczego?

doświadczenie z monetami	symulacja rozpadu promieniotwórczego
w kolejnych rzutach liczba orłów zmniejsza się dwukrotnie	po upływie określonego czasu liczba jąder promieniotwórczych, które nie uległy przemianie, zmniejsza się dwukrotnie
nie można przewidzieć, w którym rzucie konkretna moneta wypadnie zwrócona orłem do góry	nie można przewidzieć czasu, po którym jądro ulegnie rozpadowi
punkty otrzymane w doświadczeniu nie leżą dokładnie na krzywej	punkty otrzymane w symulacji nie leżą dokładnie na krzywej

Zarówno w przypadku rozpadu promieniotwórczego, jak i rzutu monetami, mamy do czynienia z zanikiem wykładniczym. W obu sytuacjach pomiędzy punktami w układzie współrzędnych można poprowadzić fragment wykresu funkcji, tak aby wykres tej funkcji leżał jak najbliżej każdego punktu, choć niekoniecznie punkty leżą dokładnie na krzywej. Tak dopasowany wykres funkcji z dość dobrym przybliżeniem opisuje rzeczywiste zjawisko. Skoro dopasowaliśmy krzywą do wyników doświadczenia lub symulacji, to możemy znaleźć równanie, które opisuje daną krzywą.

W przypadku rzutu monetami wzór opisujący wyniki doświadczenia ma postać:

$$y = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

gdzie:

y – liczba wyrzuconych orłów,

k – liczba monet użytych w doświadczeniu,

x – kolejny numer rzutu.

Przez analogię możemy znaleźć wzór, który opisuje rozpad promieniotwórczy. Wtedy numerem rzutu x będzie informacja, ile razy upłynął czas T od chwili uruchomienia symulacji. Na przykład, jeżeli od początku symulacji upłynął czas $2T$, to $x = \frac{2T}{T} = 2$. Jeżeli czas jest równy $3T$, to $x = \frac{3T}{T} = 3$. Stąd wzór opisujący rozpad promieniotwórczy ma postać:

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie:

N – liczba jąder promieniotwórczych w próbce, które nie uległy rozpadowi,

N_0 – początkowa liczba jąder promieniotwórczych w próbce,

t – czas, który upłynął od początku obserwacji próbki,

T – czas, w którym połowa jąder promieniotwórczych uległa rozpadowi, zwany **czasem połowicznego rozpadu**.

Czas połowicznego rozpadu jest wielkością, która charakteryzuje izotop promieniotwórczy. Może być niezwykle krótki lub bardzo długi.

izotop	czas połowicznego rozpadu
polon-212	$3 \cdot 10^{-9}\text{s}$
azot-13	10 minut
sód-24	15 godzin

izotop	czas połowicznego rozpadu
jod-131	8 dni
kobalt-60	5, 3 lat
cez-137	30 lat
węgiel-14	5730 lat
jod-129	$1, 57 \cdot 10^7$ lat

Przykładowe wartości czasów połowicznego rozpadu dla wybranych izotopów. Źródło: [Wikipedia](#)

W praktyce nie posługujemy się liczbą jąder promieniotwórczych w próbce, lepiej posługiwać się masą izotopu promieniotwórczego. Liczbę jąder izotopu promieniotwórczego zastępuje masa:

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie:

m – masa izotopu promieniotwórczego w próbce, który nie uległ rozpadowi

m_0 – początkowa masa izotopu promieniotwórczych w próbce

t – czas, który upłynął od początku obserwacji próbki

T – czas połowicznego rozpadu

Przykład 1

Scyntygrafia jest jedną z metod diagnostycznych wykorzystywanych w medycynie nuklearnej do badania tarczycy, mózgu oraz do poszukiwania zmian nowotworowych. Na początku badania wprowadza się do organizmu pacjenta substancję, która zawiera izotop promieniotwórczy. Emitowane przez pacjenta promieniowanie jest rejestrowane przez specjalne urządzenie (detektor). Jednym z izotopów stosowanych podczas tego badania jest technet-99m. Jego czas połowicznego rozpadu to 6 godzin.

Do organizmu pacjenta wprowadzono substancję zawierającą 2 μg technetu-99m. Oblicz po jakim czasie, ilość technetu-99m w organizmie zmniejszy się do:

1. 0, 125 μg
2. 0, 1 μg

Pytanie 1

Oblicz, po jakim czasie ilość technetu-99m w organizmie zmniejszy się do 0, 125 μg .

Odpowiedź na to pytanie możemy znaleźć dwoma sposobami.

Sposób 1

Sposób 2

Skorzystamy ze wzoru: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

Podstawiamy wartości z treści zadania:

$$0,125 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

$$\frac{0,125}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

$$\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

Z porównania wykładników otrzymujemy: $4 = \frac{t}{6}$.

Stąd $t = 24$ godziny.

Pytanie 2

Odpowiedź w pytaniu 2 nie jest tak oczywista, jak w pytaniu 1. Wiemy, że po upływie 18 godzin (czyli trzech okresach połowicznego rozpadu) masa radioaktywnego izotopu jest równa 0,25 μg, natomiast po upływie 24 godzin (czyli czterech okresach połowicznego rozpadu) masa tego izotopu to 0,125 μg. Czas, po którym masa izotopu jest równa 0,2 μg, będziemy mogli obliczyć w przybliżeniu, stosując logarytmy.

Skorzystamy ze wzoru: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

Podstawiamy wartości z treści zadania:

$$0,2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

$$\frac{0,2}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

$$0,1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

Skorzystamy z własności, że $\frac{1}{2} = 2^{-1}$.

$$0,1 = 2^{-\frac{t}{6}}$$

Skoro obie strony równania są liczbami dodatnimi, to możemy zapisać:

$$\log_2 0,1 = \log_2 2^{-\frac{t}{6}}$$

$$\log_2 10^{-1} = -\frac{t}{6}$$

$$-\log_2 10 = -\frac{t}{6}$$

$$t = 6 \log_2 10$$

Do obliczenia czasu skorzystamy ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu, a wartości **logarytmów dziesiętnych** odczytamy z tablic.

$$t = 6 \cdot \frac{\log 10}{\log 2} = 6 \cdot \frac{1}{\log 2} \approx 6 \cdot \frac{1}{0,3010} \approx 19,9 \approx 20 \text{ godzin}$$

Pojęcia analogiczne do czasu połowicznego rozpadu można spotkać również w innych gałęziach nauki. Na przykład w farmakologii funkcjonuje czas połowicznego rozkładu leku. Okazuje się, że stężenie większości leków po ich podaniu i wchłonięciu zmniejsza się wykładniczo. Czas, w którym stężenie leku we krwi zmniejsza się o połowę wartości początkowej, nazywa się właśnie czasem połowicznego rozkładu leku lub biologicznym czasem półtrwania. W takiej sytuacji zmianę stężenia leku we krwi można opisać wzorem:

$$c = c_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie:

c – stężenie leku we krwi po upływie czasu t od podania

c_0 – początkowe stężenie leku

t – czas, który minął od chwili podania leku

T – czas połowicznego rozkładu leku

substancja	biologiczny czas półtrwania
paracetamol	2 – 4 h
ibuprofen	1,8 – 4 h
kwas acetylosalicylowy	3 h
morfina	2 – 4 h
penicylina	0,4 – 0,9 h
loratadyna	8 h

Źródło: [Wikipedia](#)

Wzór na zmianę stężenia leku we krwi można również zapisać w postaci:

$$c = c_0 \cdot e^{-kt}$$

gdzie:

k – stała szybkości rozkładu leku (jej wartość zależy od rodzaju leku i cech organizmu pacjenta).

Liczba e , która pojawia się jako podstawa potęgi, jest nazywana liczbą Eulera lub liczbą Napiera. Podobnie do liczby π , liczba e jest niewymierna.

$$e = 2,718281828459045235360287 \dots$$

Odkryto ją w XVII wieku. Z czasem okazała się być jedną z podstawowych stałych przyrody – pojawia się w wielu prawach matematycznych, statystycznych, fizycznych i nie tylko.

Liczba e często występuje jako podstawa potęgi, a więc w równaniach wykładniczych. W niektórych sytuacjach do rozwiązywania równań wykładniczych stosujemy logarytmy.

Na przykład: $3^x = 5$.

Dobieramy wtedy logarytm o odpowiedniej podstawie:

$$\log_3 3^x = \log_3 5 \text{ i otrzymujemy } x = \log_3 5.$$

Podobnie, gdy chcemy rozwiązać równanie $e^x = 5$, korzystamy z logarytmu, którego podstawą jest liczba e . Zamiast jednak pisać „log_e” piszemy symbol „ln”, który czytamy: logarytm naturalny. Wtedy:

$$e^x = 5$$

$$\ln e^x = \ln 5$$

$$x = \ln 5$$

Wartość wyrażenia $\ln 5$ odczytujemy z tablic wartości logarytmów naturalnych.

Przykład 2

Uzasadnimy, że ze wzoru $c = c_0 \cdot e^{-kt}$ wynika wzór $c = c_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (oba wzory opisują zmianę stężenia leku we krwi z upływem czasu).

Ciąg wszystkich przekształceń jest postaci:

$$c = c_0 \cdot e^{-kt} = c_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T}t} = c_0 \cdot e^{-\frac{t}{T} \ln 2} = c_0 \cdot e^{\ln 2^{-\frac{t}{T}}} = c_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = c_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Przykład 3

Po upływie 2,5 godziny stężenie leku we krwi pacjenta zmniejszyło się o 25%. Oblicz okres połowicznego rozkładu tego leku.

Skorzystamy ze wzoru: $c = c_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

Należy go tak przekształcić, aby otrzymać okres połowicznego zaniku leku T .

$$c = c_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Big| : c_0$$

$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$\frac{c}{c_0} = 2^{-\frac{t}{T}}$$

Korzystamy z własności logarytmu, aby przekształcić równanie wykładnicze w równanie liniowe.

$$\log_2 \frac{c}{c_0} = \log_2 2^{-\frac{t}{T}}$$

$$\log_2 \frac{c}{c_0} = -\frac{t}{T} \log_2 2$$

$$\log_2 \frac{c}{c_0} = -\frac{t}{T}$$

$$\log_2 \frac{c}{c_0} = -\frac{t}{T} \mid \cdot T$$

$$T \cdot \log_2 \frac{c}{c_0} = -t \mid : \log_2 \frac{c}{c_0}$$

$$T = \frac{-t}{\log_2 \frac{c}{c_0}}$$

Podstawiamy wartości z treści zadania.

$$T = \frac{-2,5}{\log_2 \frac{0,75c_0}{c_0}} = \frac{-2,5}{\log_2 0,75}$$

W tablicach logarytmów znajdziemy wartości logarytmów dziesiętnych lub naturalnych. Dlatego też, aby obliczyć wartość wyrażenia $\log_2 0,75$, skorzystamy ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu. [Logarytm](#) o podstawie 2 zamienimy na iloraz logarytmów dziesiętnych.

$$T = \frac{-2,5}{\log_2 0,75} = \frac{\frac{-2,5}{\log 0,75}}{\log 2} = \frac{-2,5 \log 2}{\log 0,75} = \frac{-2,5 \log 2}{\log(7,5 \cdot 0,1)} = \frac{-2,5 \log 2}{\log 7,5 + \log 0,1} \approx \frac{-2,5 \cdot 0,3010}{0,8751 - 1} \approx 6,025$$

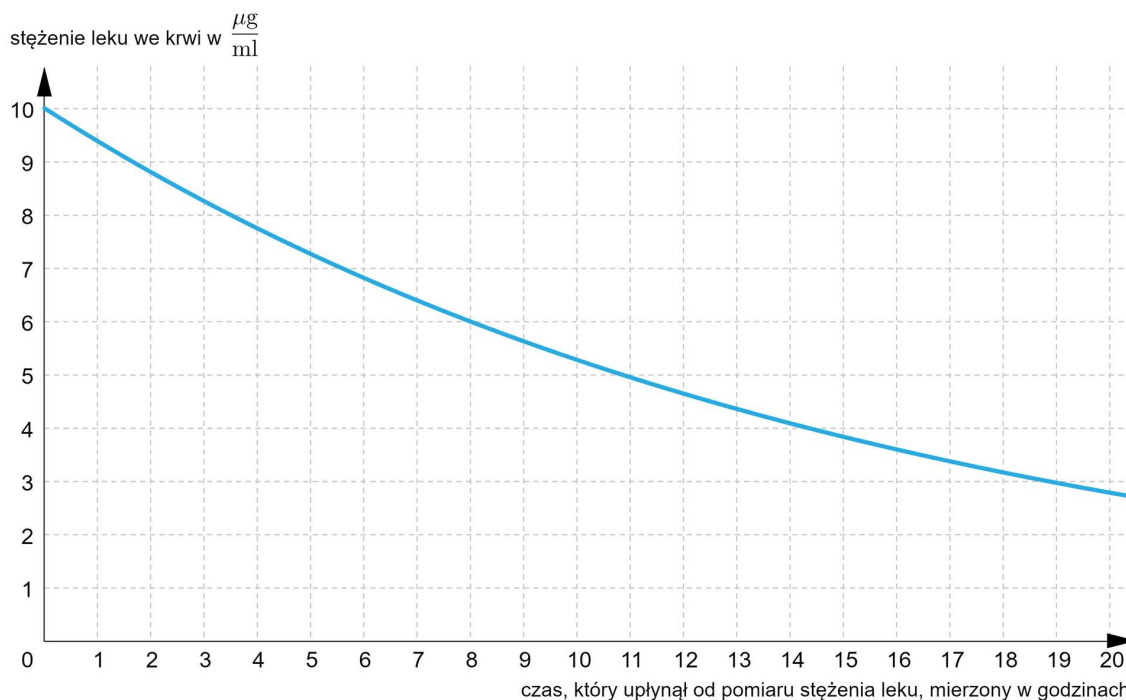
Czas połowicznego zaniku leku to około 6 godzin.

Przykład 4

Pacjentowi podano lek, a następnie zmierzono jego stężenie we krwi o godzinie 9 : 00.

Na wykresie przedstawiono, w jaki sposób zmienia się stężenie tego leku we krwi.

Podczas leczenia stężenie leku nie powinno być niższe od $7 \frac{\mu\text{g}}{\text{ml}}$, a jego czas połowicznego rozkładu jest równy 11 godzin. Oblicz, z dokładnością do 10 minut, o której godzinie pacjent powinien przyjąć kolejną dawkę leku.



Do rozwiązania zadania skorzystamy ze wzoru: $c = c_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

Z wykresu odczytujemy i przyjmujemy, że $10 \frac{\mu\text{g}}{\text{ml}}$ jest początkowym stężeniem leku we krwi pacjenta. Obliczymy czas t , który upłynie do chwili, gdy stężenie leku spadnie do $7 \frac{\mu\text{g}}{\text{ml}}$. W tym celu przekształcamy powyższy wzór i wyznaczamy ze wzoru czas t .

$$c = c_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad | : c_0$$

$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$\frac{c}{c_0} = 2^{-\frac{t}{T}}$$

Korzystamy z własności [logarytmu](#), aby przekształcić równanie wykładnicze w równanie liniowe.

$$\log_2 \frac{c}{c_0} = \log_2 2^{-\frac{t}{T}}$$

$$\log_2 \frac{c}{c_0} = -\frac{t}{T} \log_2 2$$

$$\log_2 \frac{c}{c_0} = -\frac{t}{T}$$

$$\log_2 \frac{c}{c_0} = -\frac{t}{T} \cdot T$$

$$T \cdot \log_2 \frac{c}{c_0} = -t$$

$$t = -T \cdot \log_2 \frac{c}{c_0}$$

Podstawiamy wartości z treści zadania.

$$t = -11 \cdot \log_2 \frac{7}{10} = -11 \cdot \log_2 \frac{7}{10} = -11 \cdot \frac{\log 0,7}{\log 2} = -11 \cdot \frac{\log 7 + \log 0,1}{\log 2} \approx \\ \approx -11 \cdot \frac{0,8451-1}{0,3010} \approx 5,66$$

Zatem $t \approx 5,66$ godziny.

Obliczymy, ile minut stanowi 0,66 godziny.

$$0,66 \cdot 60 \text{ minut} = 39,6 \text{ minuty} \approx 40 \text{ minut}$$

Pacjent powinien otrzymać kolejną dawkę leku po upływie 5 godzin 40 minut od chwili pomiaru stężenia leku we krwi, czyli lekarstwo powinno zostać podane o godzinie 14 : 40.

Ciekawostka

Ważnym zagadnieniem związanym z lotami kosmicznymi jest ruch rakiety. W czasie lotu jej masa zmniejsza się, ponieważ paliwo zostaje spalone. Wpływa to na osiąganą przez raketę szybkość. Związek ten opisuje wzór Ciołkowskiego:

$$\Delta v = v_{\text{wzgl}} \ln \frac{m_0}{m_k}$$

gdzie:

Δv – wzrost szybkości rakiety

v_{wzgl} – prędkość spalin względem rakiety

m_0 – masa początkowa rakiety

m_k – masa końcowa rakiety

Słownik

logarytm

logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a dodatniej i różnej od jedności, nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b

logarytm dziesiętny

logarytm o podstawie 10

Animacja

Polecenie 1

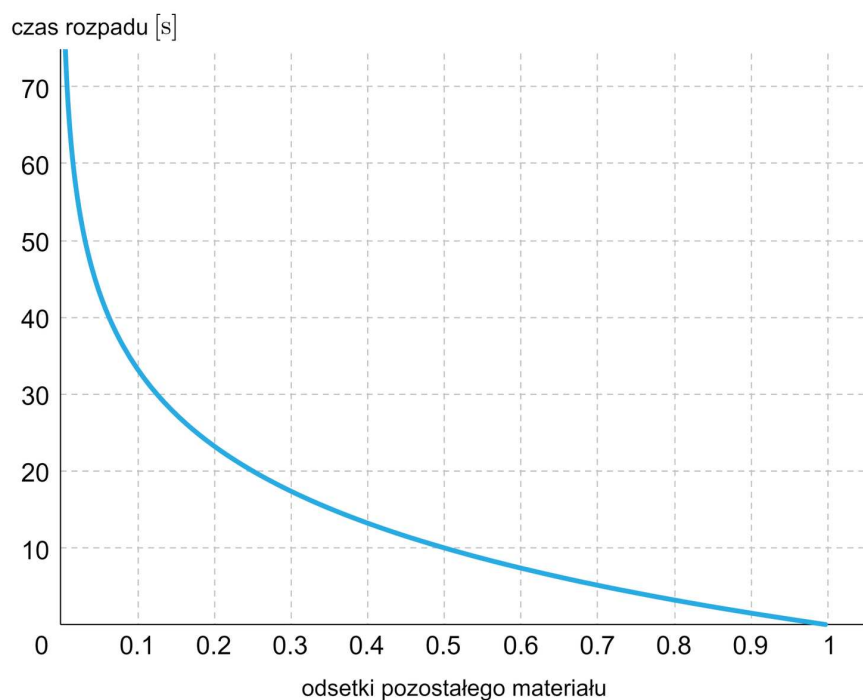
Zapoznaj się z przykładami w animacji i wykonaj polecenie poniżej.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D4ikb1yzJ>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wykorzystania wykresów funkcji logarytmicznych.

Polecenie 2

Okres połowicznego rozpadu T pewnej substancji wynosi 10 s. Wykres przedstawia odsetki pozostałej substancji w czasie jej rozpadu.



- (1) Po jakim czasie pozostanie 70 % materiału?
- (2) Ile procent materiału pozostanie po 15 s?
- (3) Po jakim czasie pozostanie 1 % substancji?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Milena i Radek wykonali doświadczenie, które polegało na jednoczesnym rzucie pięćdziesięcioma sześciennymi kostkami do gry. Kostki, na których wypadło sześć oczek, odkładano na bok. Pozostałe kostki zebrano i rzucono nimi kolejny raz. Znowu Milena i Bartek odłożyli na bok kostki, na których wypadło sześć oczek. Doświadczenie powtarzano do czasu, gdy została jedna kostka. Po każdym rzucie liczba kostek, na których wypadło sześć oczek była równa mniej więcej:

☐ $\frac{5}{6}$ wszystkich rzuconych kostek

☐ $\frac{1}{6}$ wszystkich rzuconych kostek

☐ $\frac{1}{3}$ wszystkich rzuconych kostek

☐ $\frac{1}{2}$ wszystkich rzuconych kostek

Ćwiczenie 2



Doświadczenie polegało na jednoczesnym rzucie pięćdziesięcioma sześciennymi kostkami do gry. Wykonano je w trzech wersjach:

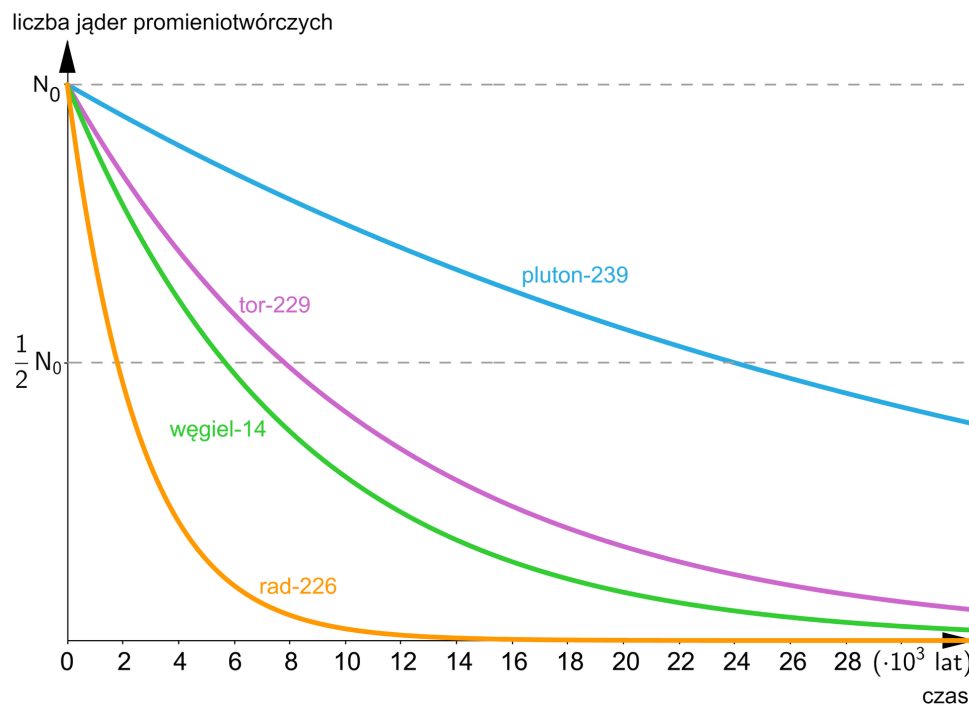
- a. W wersji A po każdym rzucie usuwano kostki, na których wypadło jedno oczko.
- b. W wersji B po każdym rzucie usuwano kostki, na których wypadła parzysta liczba oczek.
- c. W wersji C po każdym rzucie usuwano kostki, na których wypadły trzy lub cztery oczka.

Przyporządkuj, której wersji doświadczenia ten wykres odpowiada.

Ćwiczenie 3



Wykres przedstawia zależność liczby jąder promieniotwórczych w próbce od czasu. Uszereguj w kolejności pierwiastki, zaczynając od tego, którego okres połowicznego rozpadu jest najkrótszy, a kończąc na tym, którego czas połowicznego rozpadu jest najdłuższy.



węgiel-14



pluton-239



tor-229



rad-226



Ćwiczenie 4



Zmianę stężenia leku we krwi pacjenta możemy opisać za pomocą dwóch wzorów:

$c = c_0 \cdot e^{-kt}$ lub $c = c_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie k oznacza stałą szybkość rozkładu, c oznacza stężenie leku we krwi w pewnej chwili t , c_0 oznacza początkowe stężenie leku we krwi, natomiast T jest czasem połowicznego rozkładu leku. Połącz czas połowicznego rozkładu leku z odpowiadającą mu stałą szybkości rozpadu.

8 godzin

0,347 na godzinę

2 godziny

0,069 na godzinę

10 godzin

0,087 na godzinę

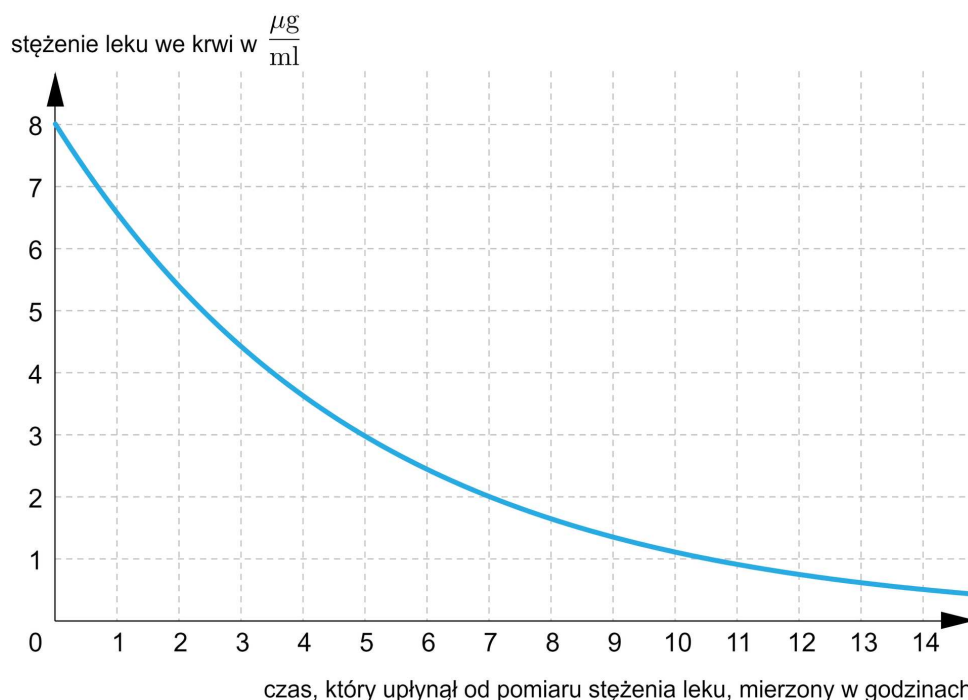
5 godzin

0,139 na godzinę

Ćwiczenie 5



Wykres prezentuje zmianę stężenia leku we krwi pacjenta. Krzywa opisana jest równaniem $c = c_0 \cdot e^{-kt}$. Oceń prawdziwość zdań.



Stwierdzenie	Prawda	Fałsz
Stała szybkości rozkładu leku jest równa około 0,2 na godzinę	☐	☐
Czas połowicznego rozkładu leku to około 3,5 godziny.	☐	☐
Początkowe stężenie leku we krwi pacjenta było równe $8 \frac{\mu\text{g}}{\text{ml}}$.	☐	☐
Stała szybkości rozkładu leku jest równa około 0,14 na godzinę.	☐	☐
Czas połowicznego rozkładu leku to około 5 godzin.	☐	☐

Ćwiczenie 6



Pacjentowi podano lek dożylnie. Zmierzone po godzinie stężenie tego leku we krwi pacjenta było równe $10 \frac{\mu\text{g}}{\text{ml}}$. Pomiar powtórzono trzy godziny później i uzyskano wynik $6 \frac{\mu\text{g}}{\text{ml}}$. Równanie krzywej, która opisuje zmianę stężenia leku we krwi pacjenta z upływem czasu można opisać wzorem:

☐ $c = 6a \cdot e^{-0,17t}$

☐ $c = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$

☐ $c = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$

☐ $c = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{0,17}}$

☐ $c = 10 \cdot e^{-0,17t}$

☐ $c = 10 \cdot e^{-4t}$

Ćwiczenie 7



Izotop ${}^{13}_7\text{N}$ jest jądrem β^+ - promieniotwórczym wykorzystywanym w medycynie nuklearnej w diagnostyce metodą pozytonowej tomografii emisyjnej. Czas połowicznego rozpadu tego izotopu jest równy 10 minut. Oblicz, jaka część początkowej liczby jąder tego izotopu uległa rozpadowi w ciągu godziny.

Ćwiczenie 8



Prawo rozpadu promieniotwórczego można również zapisać za pomocą równania:

$N = N_0 e^{-\lambda t}$, gdzie λ jest stałą rozpadu promieniotwórczego, która charakteryzuje dany izotop. Znajdź związek stałej rozpadu z czasem połowicznego zaniku izotopu promieniotwórczego i uzasadnij, że z powyższego wzoru można otrzymać wzór opisujący prawo rozpadu promieniotwórczego w postaci $N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

Dla nauczyciela

Autor: Patryk Wolny

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie wykresów funkcji logarytmicznych do opisu i interpretacji zagadnień związanych z naukami przyrodniczymi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:

14) uczeń posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odczytuje informacje (interpretuje) wzór opisujący dane zjawisko
- tworzy wzór funkcji na podstawie jej wykresu
- posługuje się pojęciem czasu połowicznego zaniku oraz biologicznym czasem półtrwania
- rozwiązuje równania wykładnicze
- zna i stosuje własności logarytmów, również logarytmu naturalnego
- przeprowadza proste rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza pomysłów
- symulacja
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów o przeprowadzenie w domu doświadczenia z monetami lub kostkami do gry.

Faza wstępna:

1. Omówienie wyników doświadczenia przeprowadzonego przez uczniów przed lekcją.
2. Podanie przez nauczyciela tematu: Zastosowanie krzywych wykładniczych i logarytmicznych do zagadnień związanych z naukami przyrodniczymi oraz celów zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie rozwiązują zadanie interaktywne dotyczące doświadczenia z monetami w części Przeczytaj.
2. Uczniowie przeprowadzają symulację zjawiska rozpadu promieniotwórczego. Rozwiązują samodzielnie zadanie interaktywne dotyczące tej symulacji. Zapoznają się tekstem na temat informacji, które można uzyskać z otrzymanego w symulacji wykresu. Poznają pojęcie czasu połowicznego zaniku.
3. Uczniowie zapoznają się z przykładem 1. Omawiają z nauczycielem różne sposoby rozwiązania problemu.
4. Uczniowie zapoznają się z tekstem na temat biologicznego czasu półtrwania.
5. Nauczyciel wprowadza pojęcie liczby Eulera (liczby Napiera) i logarytmu naturalnego.
6. Uczniowie zapoznają się z przykładami 2, 3, 4 i 5. Dyskutują rozwiązania z nauczycielem.

7. Uczniowie rozwiązują w grupach zadania od 1 do 6 z sekcji Sprawdź się. Kolejne grupy prezentują rozwiązania zadań na forum klasy (każda grupa jedno z zadań).

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem zadań z sekcji Sprawdź się.
2. Podsumowanie informacji na temat krzywych wykładniczych i logarytmicznych.

Praca domowa:

Uczniowie zapoznają się z animacją i rozwiązują zadania związane z nią. Dodatkowo, rozwiązują zadania 7 i 8 z sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

[Funkcja logarytmiczna](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może zostać wykorzystana na lekcji „Wzrost i zanik wykładniczy”