Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji opisanej za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach

Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji opisanej za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Funkcja może być opisana różnymi sposobami. Jednym ze sposobów opisu funkcji jest opis za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach.
W jaki sposób możemy wyznaczyć miejsce zerowe tak opisanej funkcji?
Czy funkcja opisana za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach ma zawsze co najmniej jedno miejsce zerowe?

Odpowiedzi na te pytania uzyskasz analizując poniższy materiał.

Twoje cele

- Wyznaczysz miejsce zerowe funkcji opisanej za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach.
- Sprawdzisz, czy podana liczba jest miejscem zerowym funkcji opisanej za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach.
- Uzasadnisz, że podana liczba jest miejscem zerowym funkcji opisanej za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach.

Przeczytaj

W tym materiale zajmiemy się wyznaczaniem miejsca zerowego funkcji (o ile funkcja takowe posiada) opisanej wzorem wyrażonym różnymi wyrażeniami w różnych przedziałach.

Definicja: Miejsce zerowe funkcji

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x, dla którego:

$$f(x) = 0$$

Przeanalizujemy kilka przykładów wyznaczania miejsca zerowego funkcji opisanej wzorem zapisanym za pomocą różnych wyrażeń w różnych przedziałach.

Przykład 1

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{gdy } x < 3 \\ -x + 5, & \text{gdy } x \geq 3 \end{cases}$$

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji f (o ile istnieją).

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia miejsca zerowego funkcji f musimy rozwiązać równanie $f(x) = 0$. Funkcja f opisana jest za pomocą dwóch różnych wyrażeń w różnych przedziałach. Rozwiążemy równanie $f(x) = 0$ w każdym z podanych przedziałów.

1. $x \in (-\infty,\ 3) \Rightarrow f(x) = x - 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.
   Liczba $2 \in (-\infty,\ 3)$. Stąd liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji f.
2. $x \in \langle 3,\ \infty) \Rightarrow f(x) = -x + 5 \Rightarrow -x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.
   Liczba $5 \in \langle 3,\ \infty)$. Stąd liczba 5 jest miejscem zerowym funkcji f.

Funkcja f posiada dwa miejsca zerowe: 2, 5.

Możemy to zapisać: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Przykład 2

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 36, & \text{gdy } x \in (-\infty,\ -3) \\ \frac{1}{3}x - 2, & \text{gdy } x \in \langle -3,\ \infty) \end{cases}$$

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji f (o ile istnieją).

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia miejsca zerowego funkcji f musimy rozwiązać równanie $f(x) = 0$.

Funkcja f opisana jest za pomocą dwóch różnych wzorów w różnych przedziałach. Rozwiążemy równanie $f(x) = 0$ w każdym z podanych przedziałów.

1. $x \in (-\infty, \ -3) \Rightarrow f(x) = x^2 - 36 \Rightarrow x^2 - 36 = 0 \Rightarrow$
   $\Rightarrow (x - 6 = 0 \ \vee \ x + 6 = 0) \Rightarrow (x = 6 \ \vee \ x = -6)$.
   Liczba $-6 \in (-\infty, \ -3)$, liczba $6 \notin (-\infty, \ -3)$. Stąd liczba (-6) jest miejscem zerowym funkcji f.
2. $x \in \langle -3, \ \infty) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x - 2 \Rightarrow \frac{1}{3}x - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 2 \Rightarrow x = 6$.
   Liczba $6 \in \langle -3, \ \infty)$. Stąd liczba 6 jest miejscem zerowym funkcji f.

Funkcja f posiada dwa miejsca zerowe: -6, 6.

Możemy to zapisać: $x_1 = -6$, $x_2 = 6$.

Przykład 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{gdy } x \leq -3 \\ -x + 4, & \text{gdy } x \in (-3, \ 2) \\ |x| - 1, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$$

Sprawdzimy, która z liczb: -1, 1, 4 jest miejscem zerowym funkcji f.

Rozwiązanie:

Zadanie rozwiążemy dwoma sposobami.

Sposób 1:

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji f metodą algebraiczną. Rozwiążemy równanie $f(x) = 0$.

Funkcja f opisana jest trzema wzorami w trzech różnych przedziałach. Rozwiążemy równanie

$f(x) = 0$ w każdym z podanych przedziałów.

1. $x \in (-\infty, \ -3\rangle \Rightarrow f(x) = x - 4 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$.
   Liczba $4 \notin (-\infty, \ -3\rangle$. Stąd liczba 4 nie jest miejscem zerowym funkcji f.

2. $x \in (-3,\ 2) \Rightarrow f(x) = -x + 4 \Rightarrow -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$.
   Liczba $4 \notin (-3,\ 2\rangle$. Stąd liczba 4 nie jest miejscem zerowym funkcji f.
3. $x \in \langle 2,\ \infty) \Rightarrow f(x) = |x| - 1 \Rightarrow |x| - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow (x = -1 \ \vee \ x = 1)$.
   Liczba $-1 \notin \langle 2,\ \infty)$. Stąd liczba -1 nie jest miejscem zerowym funkcji f.
   Liczba $1 \notin \langle 2,\ \infty)$. Stąd liczba 1 nie jest miejscem zerowym funkcji f.

Stąd wniosek – funkcja f nie posiada miejsc zerowych, czyli żadna z podanych liczb nie może być miejscem zerowym funkcji f.

Sposób 2:

Obliczamy wartość funkcji dla każdego z podanych argumentów.

Liczba $-1 \in (-3,\ 2)$. Jeżeli liczba -1 jest miejscem zerowym funkcji f, to wartość funkcji dla tego argumentu musi być równa zero.

Podstawiamy liczbę -1 do drugiej części wzoru.

$-(-1) + 4 = 1 + 4 = 5$

Otrzymaliśmy wartość funkcji różną od zera. Stąd wniosek, że liczba -1 nie jest miejscem zerowym funkcji f.

Liczba $1 \in (-3,\ 2)$. Jeżeli liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji f, to wartość funkcji dla tego argumentu musi być równa zero. Podstawiamy liczbę 1 do drugiej części wzoru.

$-1 + 4 = 3$

Otrzymaliśmy wartość funkcji różną od zera. Stąd wniosek, że liczba 1 nie jest miejscem zerowym funkcji f.

Liczba $4 \in \langle 2,\ \infty)$. Jeżeli liczba 4 jest miejscem zerowym funkcji f, to wartość funkcji dla tego argumentu musi być równa zero.

Podstawiamy liczbę 4 do trzeciej części wzoru.

$|4| - 1 = 4 - 1 = 3$

Otrzymaliśmy wartość funkcji różną od zera. Stąd wniosek, że liczba 4 nie jest miejscem zerowym funkcji f.

Sprawdziliśmy, że żadna z podanych liczb nie jest miejscem zerowym funkcji f.

Przykład 4

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & \text{gdy } x\le 0\\ |x+3|-2, & \text{gdy } x\in(0,\ 3)\\ \frac{1}{9}x^2-1, & \text{gdy } x\ge 3\end{cases}$$

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji f (o ile istnieją).

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia miejsca zerowego funkcji f musimy rozwiązać równanie $f(x)=0$.

Funkcja f opisana jest za pomocą trzech różnych wyrażeń w różnych przedziałach.

Rozwiążemy równanie $f(x)=0$ w każdym z podanych przedziałów.

1. $x\in(-\infty,\ 0\rangle \Rightarrow f(x)=\sqrt{-x}\Rightarrow \sqrt{-x}=0\Rightarrow x=0$.
   Liczba $0\in(-\infty,\ 0\rangle$. Stąd liczba 0 jest miejscem zerowym funkcji f.
2. $x\in(0,\ 3)\Rightarrow f(x)=|x+3|-2\Rightarrow |x+3|-2=0\Rightarrow |x+3|=2\Rightarrow$
   $\Rightarrow (x+3=-2\ \vee\ x+3=2)\Rightarrow (x=-5\ \vee\ x=-1)$.
   Liczba $-5\notin(0,\ 3)$ oraz liczba $-1\notin(0,\ 3)$. Stąd żadna z tych liczb nie jest miejscem zerowym funkcji f.
3. $x\in\langle 3,\ \infty)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}x^2-1\Rightarrow \frac{1}{9}x^2-1=0\Rightarrow x^2-9=0\Rightarrow$
   $\Rightarrow (x-3)(x+3)=0\Rightarrow (x-3=0\ \vee\ x+3=0)\Rightarrow (x=3\ \vee\ x=-3)$.
   Liczba $-3\notin\langle 3,\ \infty)$. Stąd liczba -3 nie jest miejscem zerowym funkcji f.
   Liczba $3\in\langle 3,\ \infty)$. Stąd liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji f.

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe: 0, 3.

Możemy to zapisać: $x_1=0$, $x_2=3$.

Ważne!

Aby wyznaczyć miejsce zerowe funkcji opisanej za pomocą wzoru wyrażonego różnymi wyrażeniami w różnych przedziałach należy, w każdym z przedziałów rozwiązać równanie $f(x)=0$.

Jeżeli rozwiązanie równania należy do danego przedziału, to otrzymana liczba jest miejscem zerowym funkcji f.

Jeżeli rozwiązanie równania nie należy do danego przedziału, to otrzymana liczba nie jest miejscem zerowym funkcji f.

Słownik

miejsce zerowe funkcji

argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość równą 0

Film samouczek

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w filmie. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać podane przykłady, następnie porównaj swoje rozwiązania z tymi, które są przedstawione w filmie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DImNu3XZ5

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wyznaczania miejsca zerowego funkcji opisanej za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach.

Po przeanalizowaniu materiału przedstawionego w filmie wykonaj samodzielnie poniższe polecenia.

Polecenie 2

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 12x + 9, & \text{gdy } x \in (-\infty,\ 2) \\ \frac{x-6}{x+8}, & \text{gdy } x \in \langle 2,\ \infty) \end{cases}$$

Wyznacz jej miejsca zerowe.

Polecenie 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, & \text{gdy } x \in (-\infty,\ 4\rangle \\ |2x-3| - 5, & \text{gdy } x \in (4,\ \infty) \end{cases}$$

Wyznacz a tak, aby miejscem zerowym funkcji była liczba -5.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji opisanej za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza miejsca zerowe funkcji opisanej za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach
- sprawdza, czy dana liczba jest miejscem zerowym funkcji opisanej za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach
- uzasadnia, że dana liczba jest miejscem zerowym funkcji opisanej za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- diamentowe uszeregowanie
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie, metodą diamentowego uszeregowania, porządkują poznane dotychczas wiadomości dotyczące miejsca zerowego funkcji i sposobów jego wyznaczania.
3. Po skończonej pracy otrzymane plansze umieszczają w widocznym miejscu w sali lekcyjnej.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują między sobą uzyskane informacje.
3. Uczniowie oglądają film przedstawiający przykłady wyznaczania miejsca zerowego funkcji opisanej za pomocą kilku wzorów w różnych przedziałach i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 - 4 i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia 5 - 8.

2. Zadanie dla chętnych:

   Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru. Wyznacz miejsca zerowe funkcji (o ile istnieją).

   a) $f(x) = \begin{cases} x\left(x^2 - 4x + 4\right), & \text{gdy } x \in (-\infty,\ 3) \\ 2 - \sqrt{x+7}, & \text{gdy } x \in \langle 3,\ \infty) \end{cases},$

   b) $f(x) = \begin{cases} 4 - |x-2|, & \text{gdy } x \in (-\infty,\ 0) \\ \log_2(x+5), & \text{gdy } x \in \langle 0,\ 4\rangle \\ \frac{2}{x}, & \text{gdy } x \in (4,\ \infty) \end{cases}.$

Materiały pomocnicze:

Miejsce zerowe funkcji

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać film w czasie realizacji tematów związanych z rozwiązywaniem równań.