



Podstawowe metody dowodzenia twierdzeń – dowód nie wprost

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Podstawowe metody dowodzenia twierdzeń – dowód nie wprost

Źródło: dostępny w internecie: [ElisaRiva](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Czasami założenie w twierdzeniu jest bardzo ogólne (np. Jeśli liczba a jest dodatnia, to...), zaś teza ma postać rozbudowanej zależności algebraicznej. Dowodzenie takiego twierdzenia metodą wprost jest wówczas bardzo utrudnione, ponieważ zwykle nie wiemy, jak zacząć pracować z założeniem, aby drogą kolejnych kroków rozumowania dojść do tezy. W tym materiale pokażemy, jak w takim przypadku można postąpić.

Materiał zawarty w tej lekcji jest materiałem nadobowiązkowym, więc jeśli nie interesuje Cię ta tematyka, możesz po prostu lekcję pominąć. Ale pamiętaj, że umiejętność dowodzenia twierdzeń jest wymagana na maturze!

Twoje cele

- Dowiesz się, na czym polega dowód nie wprost.
- Udowodnisz wybrane twierdzenia metodą nie wprost.

Przeczytaj

W Słowniku Języka Polskiego możemy przeczytać, że **dowód nie wprost** to „dowód polegający na wykazaniu, że zaprzeczenie tezy prowadzi do wniosku sprzecznego z założeniem, bądź też z jakimś twierdzeniem prawdziwym”.

Tak więc metoda nie wprost polega na przyjęciu hipotezy odwrotnej do tej, którą chcemy udowodnić i wydedukowaniu stąd albo zaprzeczenia jednego z założeń, albo zaprzeczenia dowodzonej tezy. Dowody oparte o tę zasadę noszą nazwę apagogicznych, a inaczej mówi się o nich, że są to dowody przez sprowadzanie do niedorzeczności.

Metoda nie wprost jest użyteczna, gdy mamy trudności z przeprowadzeniem dowodu metodą wprost, co może mieć miejsce, gdy założenie w twierdzeniu jest bardzo ogólne i trudno jest znaleźć sposób przekształcania go, aby wykonać kolejne kroki rozumowania.

Z jednej z poprzednich lekcji pamiętasz, że dla implikacji $p \Rightarrow q$, gdzie p jest poprzednikiem, a q następnikiem (co w twierdzeniu sformułowanym **w postaci implikacji** oznacza, że p to założenie, a q to teza) zachodzi równoważność:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Jak należy je rozumieć? Otóż **implikacja**

„z założenia wynika teza”

jest równoważna implikacji

„z zaprzeczenia tezy wynika zaprzeczenie założenia.”

Oznacza to, że jeżeli udowodnimy twierdzenie zapisane w formie kontrapozycji $\sim q \Rightarrow \sim p$, to udowodniliśmy twierdzenie zapisane w postaci implikacji $p \Rightarrow q$.

Dowód korzystający z **prawa kontrapozycji** nazywamy dowodem nie wprost (inaczej: dowodem przez sprowadzenie do sprzeczności).

Tak więc w sytuacjach, gdy trudno jest nam zastosować metodę dowodu wprost, możemy posłużyć się metodą dowodu nie wprost.

Uwaga!

Czasami rozpoczynając dowodzenie metodą nie wprost nie zapisujemy twierdzenia w postaci kontrapozycji, ale po prostu rozpoczynamy rozumowanie od zaprzeczenia tezy i patrzymy, do jakich zaprzeczeń nas to rozumowanie zaprowadzi. Jeżeli zaprowadzi do

zaprzeczenia założenia lub dobrze znanego faktu matematycznego, to znaczy, że udowodniliśmy nasze wyjściowe twierdzenie.

Przykład 1

Zacznijmy od problemu geometrycznego: Czy istnieje na płaszczyźnie trójkąt, w którym przynajmniej jedna dwusieczna kąta jest jednocześnie środkową boku?

Rozwiązanie

Oczywiście, od razu powiesz, że w trójkącie równobocznym dwusieczne wszystkich kątów są środkowymi boków. Masz rację. Ale zgłębiając dalej problem możemy zadać sobie kolejne pytanie: Czy istnieje inne rozwiązanie?

I znowu, korzystając z już nabytej wiedzy z geometrii, odpowiesz: w każdym trójkącie równoramiennym, ale nierównobocznym, istnieje jedna dwusieczna kąta, która jest jednocześnie środkową boku. To jest prawda, ale przecież istnieją inne trójkąty niż równoramienne i równoboczne. Ponawiamy więc pytanie: Czy istnieje inne rozwiązanie?

Udowodnimy, że nie istnieje inne rozwiązanie postawionego problemu na płaszczyźnie, to znaczy udowodnimy twierdzenie:

w trójkącie różnobocznym żadna dwusieczna kąta nie jest jednocześnie środkową boku.

Założenie: trójkąt jest trójkątem różnobocznym

Teza: żadna dwusieczna kąta nie jest jednocześnie środkową boku w tym trójkącie

Ponieważ trudno jest tutaj zacząć dowód od przekształcania założenia (trójkątów różnobocznych jest nieskończenie wiele i niemożliwe jest rozpatrzenie każdego z nich), więc udowodnimy twierdzenie metodą nie wprost.

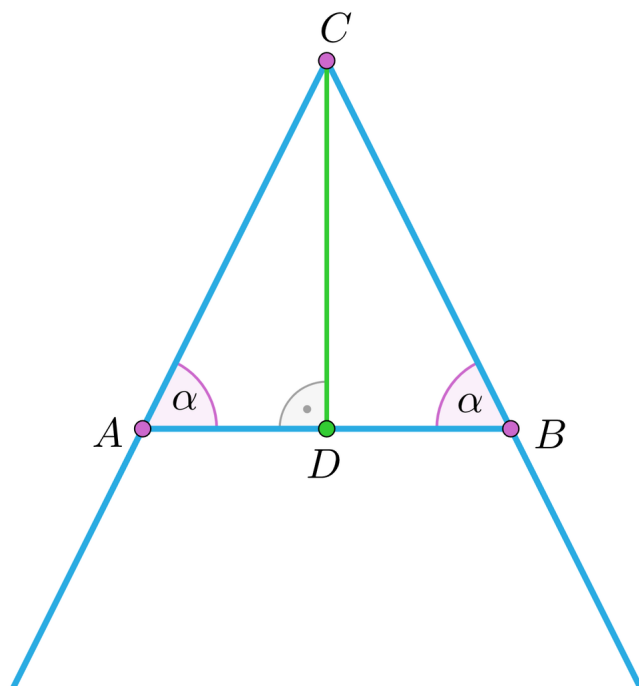
Twierdzenie zapisane w postaci kontrapozycji ma postać:

jeżeli co najmniej jedna dwusieczna kąta w trójkącie jest środkową przeciwległego boku, to trójkąt nie jest różnoboczny.

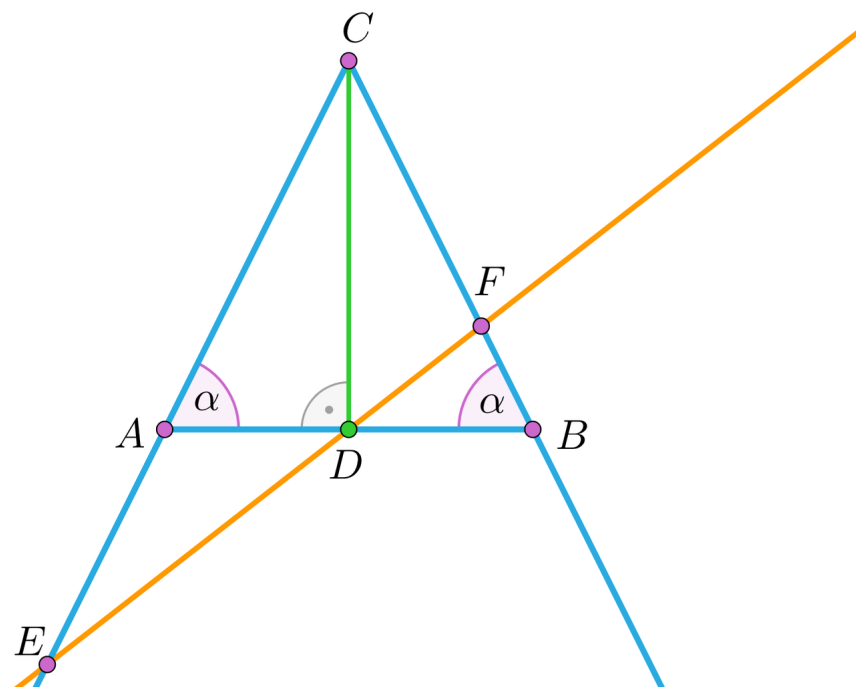
Dowód:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:

Konstruujemy kąt, jego dwusieczną i obieramy dowolny punkt na dwusiecznej (z wyjątkiem wierzchołka kąta). Konstruujemy prostopadłą do dwusiecznej przechodzącą przez wybrany punkt. Otrzymaliśmy trójkąt równoramienny ABC :



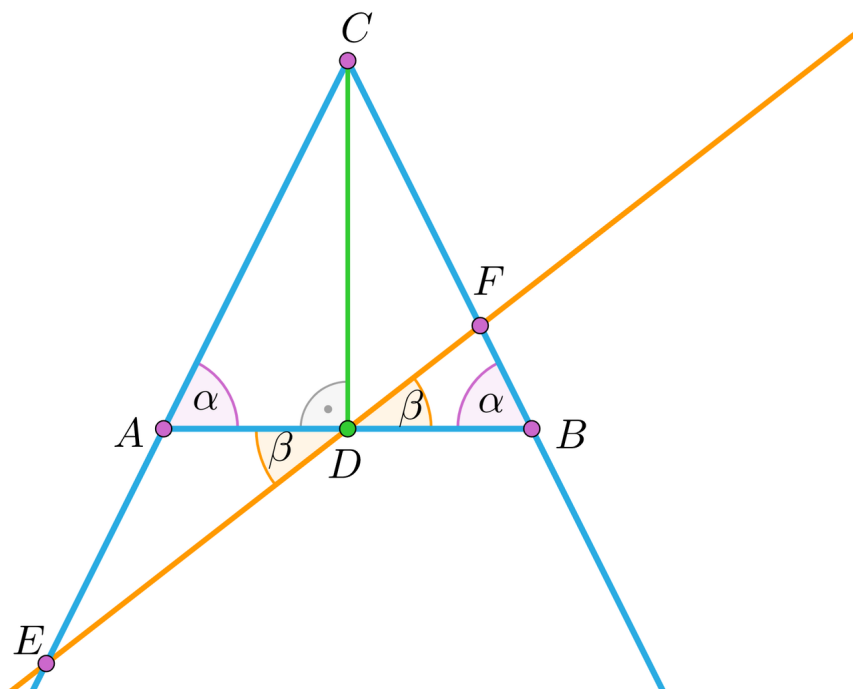
Założmy, że jest możliwe, aby dwusieczna kąta w trójkącie równobocznym była jednocześnie środkową przeciwległego boku. Przeprowadźmy przez punkt D na dwusiecznej prostą, która nie jest prostopadła do dwusiecznej. Otrzymaliśmy trójkąt równoboczny EFC :



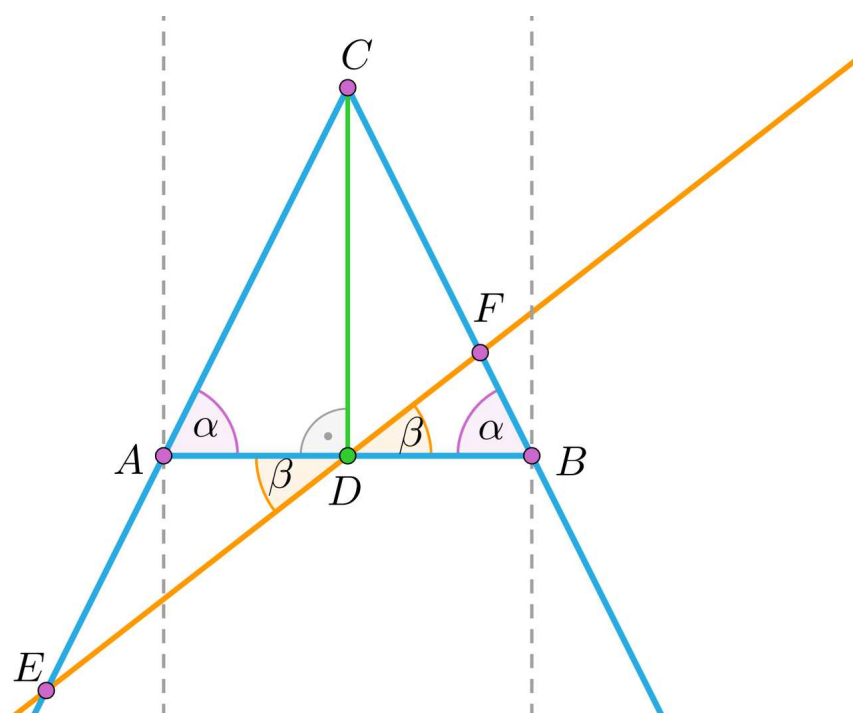
Jeżeli nasza dwusieczna ma być środkową boku, to odcinki ED i DF powinny być równej długości. Czy są? Jak to sprawdzić?

Spójrzmy na te odcinki jako na boki trójkątów. Czy trójkąty EDA i DBF są przystające?

Pamiętamy, że dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają takie same kąty i takie same boki. W naszym przypadku oznacza to, że dwa kąty przeciwległe do boków ED i DF powinny być takie same. Korzystamy tu z cechy przystawiania trójkątów kąt-bok-kąt, mając równość kątów wierzchołkowych BDF i ADE oraz równość odcinków AD i DB . Równość kątów EAD i DBF oznaczałaby, że kąty oznaczone powinny mieć miary po 90° , gdyż dwa kąty α (jak na rysunku) tworzą kąt półpełny.



Ale wtedy ramiona kątów powinny być równoległe do siebie. To jest niemożliwe, ponieważ nie istniałby wtedy trójkąt.



Pokazaliśmy, że gdyby w trójkącie różnobocznym dwusieczna kąta była środkową przeciwległego boku, to nasz trójkąt nie byłby trójkątem! Tak więc – zgodnie z określeniem dowodu nie wprost: „zaprzeczenie tezy prowadzi do wniosku sprzecznego z założeniem, bądź też z jakimś twierdzeniem prawdziwym” – wychodząc od zaprzeczenia tezy pokazaliśmy sprzeczność z warunkami istnienia trójkąta (w trójkącie na płaszczyźnie nie mogą istnieć dwa kąty proste).

c.n.d.

Przykład 2

Udowodnimy, że jeżeli $m > 0$, to $m + \frac{4}{m^2} \geq 3$.

Rozwiązanie

Założenie: $m > 0$

Teza: $m + \frac{4}{m^2} \geq 3$

Zaprzeczenie założenia: $m \leq 0$

Zaprzeczenie tezy: $m + \frac{4}{m^2} < 3$

Prowadzimy **dowód nie wprost**, czyli dowodzimy twierdzenie zapisane w postaci kontrapozycji:

Jeśli $m + \frac{4}{m^2} < 3$ to $m \leq 0$

Dowód:

Przekształcamy nierówność:

$$m + \frac{4}{m^2} < 3$$

$$m^3 + 4 < 3m^2$$

$$m^3 - 3m^2 + 4 < 0$$

$$m^3 + m^2 - 4m^2 + 4 < 0$$

$$m^2(m + 1) - 4(m^2 - 1) < 0$$

$$m^2(m + 1) - 4(m - 1)(m + 1) < 0$$

$$(m + 1)(m^2 - 4m + 4) < 0$$

$$(m + 1)(m - 2)^2 < 0$$

Aby powyższa nierówność była prawdziwa, musi być spełniona nierówność $m + 1 < 0$, czyli $m < -1$.

Powyższa nierówność nie może być spełniona dla żadnej liczby m dodatniej.

Udowodniliśmy, że zaprzeczenie tezy naszego twierdzenia prowadzi do zaprzeczenia założenia, a więc twierdzenie

Jeżeli $m > 0$, to $m + \frac{4}{m^2} \geq 3$.

jest prawdziwe.

c.n.d.

Przykład 3

Udowodnimy, że suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

Twierdzenie brzmi: Niech a będzie liczbą wymierną i b liczbą niewymierną. Wówczas suma $a + b$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie

Założenie: a jest liczbą wymierną, b jest liczbą niewymierną

Teza: $a + b$ jest liczbą niewymierną

Dowód metodą nie wprost:

Założmy, że suma $a + b$ jest liczbą wymierną. Możemy wtedy zapisać (zgodnie z określeniem liczby wymiernej): $a + b = \frac{m}{n}$, gdzie m i n to liczby całkowite, przy czym $n \neq 0$. Z założenia wiemy, że a jest liczbą wymierną, więc możemy zapisać: $a = \frac{p}{q}$, gdzie p i q to liczby całkowite, przy czym $q \neq 0$. Tak więc

$$b = (a + b) - a = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - pn}{nq}$$

Licznik i mianownik tego ułamka są liczbami całkowitymi, mianownik jest liczbą różną od zera jako iloczyn liczb różnych od zera, więc b jest liczbą wymierną, co stanowi sprzeczność z założeniem, że liczba b jest liczbą niewymierną.

Tak więc zaprzeczając tezie i doprowadzając do sprzeczności z założeniem udowodniliśmy nasze twierdzenie wyjściowe.

Przykład 4

Udowodnimy twierdzenie: Niech n będzie liczbą całkowitą. Jeśli n^2 jest liczbą nieparzystą, to n jest liczbą nieparzystą.

Rozwiązanie

Założenie: n^2 jest liczbą nieparzystą

Teza: n jest liczbą nieparzystą

Twierdzenie w postaci kontrapozycji:

Niech n będzie liczbą całkowitą. Jeśli n jest liczbą parzystą, to n^2 jest liczbą parzystą.

Dowód:

Zanegujmy tezę, czyli założmy, że n jest liczbą parzystą. Wówczas możemy zapisać, że $n = 2k$ dla jakiejś liczby całkowitej k . Stąd $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$, czyli liczba n^2 jest liczbą parzystą, co przeczy założeniu twierdzenia. Tak więc dowodząc twierdzenia w formie kontrapozycji udowodniliśmy twierdzenie wyjściowe.

Przykład 5

Udowodnimy, że $\cos 10^\circ$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie

Założmy, że $\cos 10^\circ$ jest liczbą wymierną, czyli możemy zapisać: $\cos(10^\circ) = \frac{m}{n}$, gdzie m i n to liczby całkowite, przy czym $n \neq 0$. Skorzystajmy ze wzoru na cosinus kąta potrojonego i zapiszmy:

$$\begin{aligned}\cos(30^\circ) &= \cos(3 \cdot 10^\circ) = 4 \cos^3(10^\circ) - 3 \cos(10^\circ) = 4 \left(\frac{m}{n}\right)^3 - \frac{3m}{n} = \\ &= \frac{4m^3 - 3mn^2}{n^3} = \frac{p}{q}\end{aligned}$$

gdzie p i q to liczby całkowite, przy czym $q \neq 0$, czyli $\cos 30^\circ$ jest liczbą wymierną.

Wiemy jednak, że $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli jest liczbą niewymierną. Tak więc zaprzeczając tezę doszliśmy do sprzeczności z dobrze nam znanym faktem matematycznym. Tym samym udowodniliśmy nasze twierdzenie wyjściowe.

Ciekawostka

Dowód nie wprost był znany już Sokratesowi, który chętnie go stosował w tzw. dialogach sokratycznych.

Słownik

implikacja

zdanie złożone mające postać „jeśli p to q ”, gdzie p , q są zdaniami logicznymi

twierdzenie w postaci implikacji

zdanie oznajmujące złożone z dwóch zdań, przy czym jedno wynika z drugiego

kontrapozycja (prawo kontrapozycji)

równoważność implikacji prostej i przeciwstawnej, czyli $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

twierdzenie w postaci kontrapozycji

dla danego twierdzenia to zdanie orzekające wynikanie zaprzeczenia założenia z zaprzeczenia tezy

dowód nie wprost

dowód polegający na wykazaniu, że zaprzeczenie tezy prowadzi do wniosku sprzecznego z założeniem, bądź też z jakimś twierdzeniem prawdziwym

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj galerię zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj polecenie 2.



1. {audio}Udowodnimy podane twierdzenie.

Polecenie 2

Rozważ twierdzenie:

Niech m i n będą liczbami całkowitymi. Jeśli iloczyn mn jest liczbą nieparzystą, to liczby m i n są nieparzyste.

Uzupełnij poniższy dowód przeprowadzony metodą nie wprost przeciągając w wyznaczone miejsca odpowiednie wyrażenia.

Dowód:

Zanegujemy tezę, czyli założmy, że m i n są liczbami

Można więc zapisać, że $m = 2 \cdot \boxed{}$, gdzie $\boxed{}$ jest liczbą $\boxed{}$ i $n = 2 \cdot \boxed{}$, gdzie $\boxed{}$ jest liczbą $\boxed{}$.

Tak więc $mn = \boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$

Stąd wnioskujemy, że $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, co przeczy założeniu.

Tak więc udowodniliśmy twierdzenie przez sprowadzenie do sprzeczności z założeniem.

Diagram illustrating the decomposition of the product of two permutations into a product of transpositions. The top row shows the decomposition of the permutation $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)$ into transpositions $(k\ 2l)$, $(4k\ k)$, $(mn\ \text{jest liczbą parzystą}\ l)$, $(l\ l)$, $(l\ 2k)$, and $(\text{parzystymi}\ 2l)$. The bottom row shows the decomposition of the permutation $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)$ into transpositions $(\text{całkowitą}\ \text{całkowitą})$, $(mn\ \text{jest liczbą nieparzystą}\ k)$, $(\text{nieparzystymi}\ l)$, $(4l\ k)$, $(2k\ 4kl)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Spójrz na dowód nie wprost pewnego twierdzenia: Niech n będzie liczbą parzystą (co stanowi zaprzeczenie tezy twierdzenia wyjściowego). Wtedy możemy zapisać: $n = 2k$, gdzie k jest liczbą całkowitą, więc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$, czyli n^2 jest liczbą parzystą. Jak brzmi twierdzenie wyjściowe? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- ☐ Jeśli n^2 jest liczbą parzystą, to n jest liczbą nieparzystą.
- ☐ Jeśli n^2 jest liczbą nieparzystą, to n jest liczbą parzystą.
- ☐ Jeśli n^2 jest liczbą nieparzystą, to n jest liczbą nieparzystą.

Ćwiczenie 2



Dowodząc twierdzenie „Niech m i n będą liczbami całkowitymi. Jeśli iloczyn mn jest liczbą nieparzystą, to liczby m i n są nieparzyste” metodą nie wprost można założyć, że obie liczby są parzyste lub że tylko jedna z nich jest parzysta. Jaki będzie dowód, jeśli założymy, że tylko jedna z nich jest parzysta?

Ćwiczenie 3



Uzupełnij dowód twierdzenia: Iloczyn dowolnych dwóch liczb naturalnych dodatnich jest nie mniejszy od ich ilorazu.

Przeciągnij odpowiednie wyrażenia lub wyrazy w prawidłowe miejsca.

Założenie: m i n są dowolnymi liczbami naturalnymi dodatnimi.

Teza: $mn \geq \frac{m}{n}$

Zaprzeczenie założenia: m lub n nie może być dowolną liczbą naturalną dodatnią.

Zaprzeczenie tezy:

Twierdzenie w formie kontrapozycji: Jeśli iloczyn dowolnych dwóch liczb naturalnych dodatnich m i n jest mniejszy od ich ilorazu, to nie są one dowolnymi liczbami naturalnymi dodatnimi.

Dowód twierdzenia zapisanego w formie kontrapozycji:

Iloczyn dowolnych dwóch liczb naturalnych dodatnich jest mniejszy od ich ilorazu, co zapiszemy $mn < \frac{m}{n}$ i możemy przekształcić do postaci , skąd możemy otrzymać nierówność: $n^2 < 1$, ponieważ dzielenie obustronne nierówności przez liczbę naturalną dodatnią .

Ta nierówność być prawdziwa dla żadnej liczby naturalnej dodatniej n .

Udowodniliśmy twierdzenie w formie kontrapozycji, a więc również nasze twierdzenie wyjściowe.

może

$m \cdot n^2 \geq m$

zmienia zwrot nierówności

$m \cdot n^2 < m$

nie może

$mn < \frac{m}{n}$

nie zmienia zwrotu nierówności

$mn \geq \frac{m}{n}$

Ćwiczenie 4



Dane jest twierdzenie: Jeśli n^3 jest liczbą nieparzystą, to n jest liczbą nieparzystą.
Poniżej widzisz kilka zapisów, ustaw je w odpowiedniej kolejności, aby otrzymać dowód twierdzenia przeprowadzony metodą nie wprost.

Zaprzeczenie tezy: n jest liczbą parzystą



c.n.d.



Teza: n jest liczbą nieparzystą



Zaprzeczenie założenia: n^3 jest liczbą parzystą



Liczbę parzystą możemy zapisać jako wielokrotność liczby 2, czyli $n = 2k$, gdzie k jest liczbą naturalną.



Ponieważ twierdzenie dane i twierdzenie zapisane w postaci kontrapozycji są sobie równoważne, więc dowodząc twierdzenia w formie kontrapozycji udowodniliśmy jednocześnie twierdzenie dane w zadaniu.



Założenie: n^3 jest liczbą nieparzystą



Jeśli n jest liczbą parzystą to n^3 jest liczbą parzystą.



Stąd $n^3 = (2k)^3 = 8k^3 = 2(4k^3) = 2m$, gdzie m jest liczbą naturalną.



Ćwiczenie 5



Opowiedz swoimi słowami, jak można udowodnić, że w każdym trójkącie co najmniej jeden z kątów ma miarę nie mniejszą od 60° .

Ćwiczenie 6



Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$. Przeciągnij w prawidłowe miejsca.

Założenie:, Teza:, Twierdzenie w formie kontrapozycji:, Dowód twierdzenia zapisanego w formie kontrapozycji:, Nierówność ta jest prawdziwa,, Udowodniliśmy twierdzenie:

Jeśli $\frac{a^2+1}{a+1} < \frac{a+1}{2}$ to $a \leq 0$, tym samym udowodniliśmy twierdzenie:

Dowód	Kroki dowodu
Założenie:	
Teza:	
Twierdzenie w formie kontrapozycji:	
Dowód twierdzenia zapisanego w formie kontrapozycji:	
Nierówność ta jest prawdziwa,	
Udowodniliśmy twierdzenie: Jeśli $\frac{a^2+1}{a+1} < \frac{a+1}{2}$ to $a \leq 0$, tym samym udowodniliśmy twierdzenie:	

Ćwiczenie 7



Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Ćwiczenie 9



Znajdź w dowolnych źródłach twierdzenie, którego dowód nie wprost Cię zainteresował.

Dla nauczyciela

Autor: Anna Rybak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Podstawowe metody dowodzenia twierdzeń – dowód nie wprost

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- dobiera odpowiedni rodzaj dowodu do uzasadnienia danego twierdzenia;
- analizuje i uzupełnia dowody twierdzeń matematycznych ;
- dowodzi twierdzenia metodą nie wprost.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- praca z tekstem matematycznym
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel przedstawia uczniom temat zajęć, wskazuje cele zajęć oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie prezentują, czego dowiedzieli się na temat dowodzenia twierdzeń metodą nie wprost w ramach pracy domowej z poprzedniej lekcji. Zgłaszają, co jest dla nich niejasne.
2. Uczniowie wspólnie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj”: przypominają prawo kontrapozycji i w drodze dyskusji analizują przykłady.
3. Uczniowie zapoznają się z galerią zdjęć interaktywnych (czyli wykonują Polecenie 1), następnie indywidualnie wykonują Polecenie 2.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. W drodze dyskusji omawiają swoje wyniki i razem z nauczycielem wyjaśniają trudności.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenie 4 i w drodze dyskusji omawiają swoje propozycje ustawienia w kolejności zapisów dowodu.
6. Uczniowie wspólnie wykonują ćwiczenie 5, czyli ustnie proponują sposób dowodzenia twierdzenia z geometrii, następnie ćwiczenie 6.
7. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie 7 i dyskutują nad jego rozwiązaniem.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytania: Co było w lekcji trudne? Co było w lekcji interesujące? Co chcielibyście zmienić, gdyby lekcja miała być przeprowadzona jeszcze

raz? Jeszcze raz krótko odnosi się do elementów wskazanych jako trudne, komentuje propozycje zmian w lekcji.

2. Uczniowie krótko podsumowują swoje osiągnięcia, rozwijając zdanie: Na dzisiejszych zajęciach ważne dla mnie było ...

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenia 3, 8, 9 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Twierdzenia i ich rodzaje](#)
- [Zbiór liczb niewymiernych. Działania w zbiorze liczb niewymiernych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Galeria zdjęć interaktywnych może być też wykorzystane do uczenia się uczniów w parach nawzajem. Po obejrzeniu galerii zdjęć interaktywnych Polecenie 2 uczniowie wykonują w parze, gdzie jedna osoba pełni rolę osoby podającej początek zapisu, a druga pełni rolę osoby uzupełniającej zapis. Uczniowie mogą też dowodzić w ten sposób wybrane przez siebie twierdzenia, nie tylko te wskazane w poleceniach.
- Podczas formułowania dowodów uczniowie mają dobrą okazję, aby ćwiczyć prawidłowe posługiwanie się językiem matematycznym. Należy zwrócić uwagę na precyzję sformułowań i prawidłowe używanie pojęć matematycznych. Należy też zwrócić uwagę na prawidłowe formułowanie zaprzeczeń tezy i założenia, zwłaszcza, gdy mamy do czynienia z nierównościami.
- Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać na zajęciach poświęconych dowodzeniu twierdzeń z teorii liczb rzeczywistych.