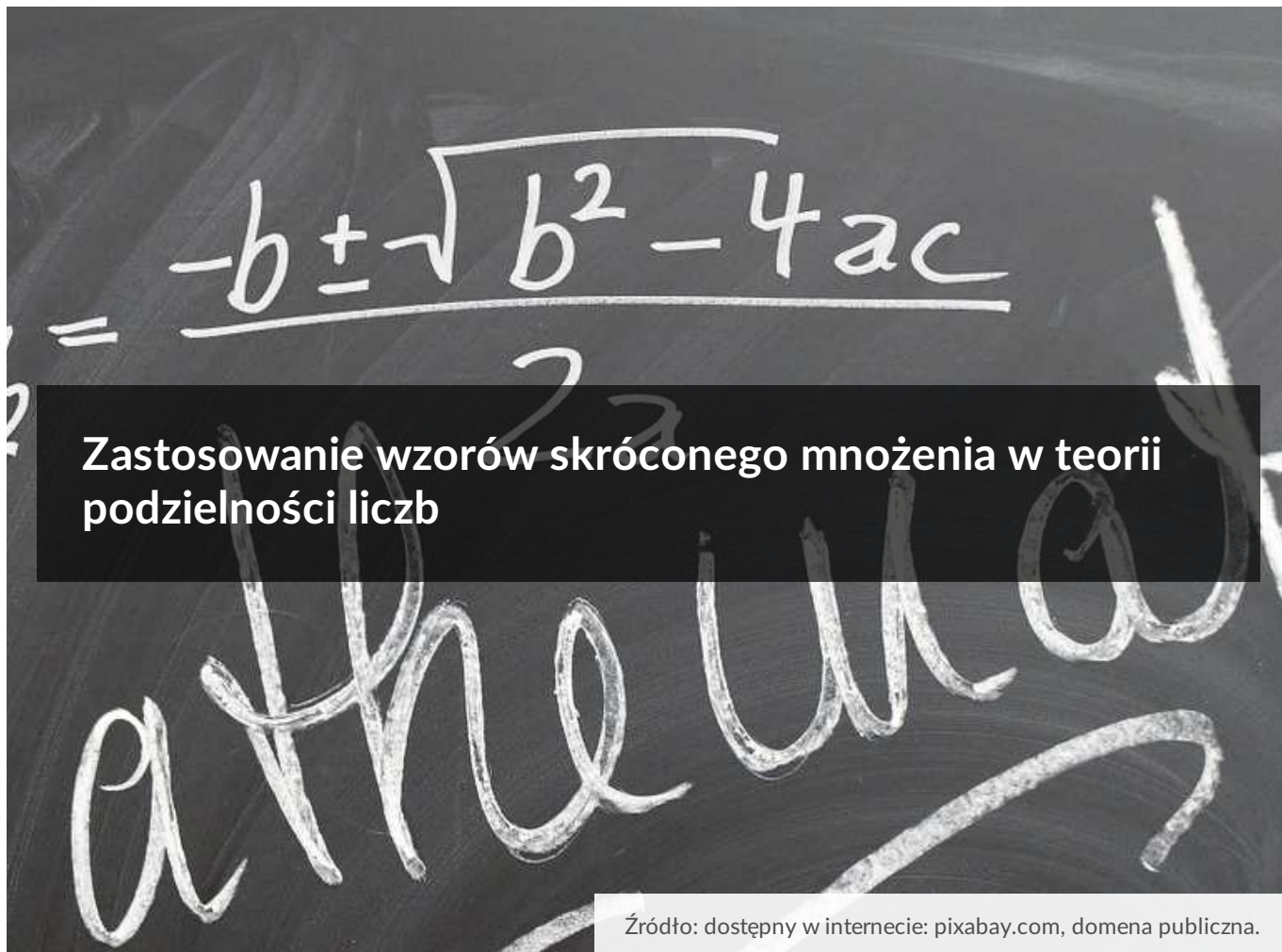


Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia
w teorii podzielności liczb

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)

- Dla nauczyciela



Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w teorii podzielności liczb

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.



Marie-Sophie Germain (1776 – 1831)

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Czy wiesz, że jeszcze pod koniec XVIII wieku we Francji kobiety nie miały wstępu na wyższe uczelnie? Zatem utalentowane kobiety musiały szukać nauczycieli poza murami uniwersytetów. Jedną z takich osób była Marie-Sophie Germain (1776 – 1831), która pod nazwiskiem Le Blanc nawiązała korespondencję z Josephem Lagrangem – jednym z najlepszych na świecie ówczesnych matematyków, a następnie z równie sławnym niemieckim matematykiem Carlem Gaussem.

Germain zajmowała się głównie teorią liczb, jej nazwiskiem zostały nazwane takie liczby pierwsze p , dla których liczby $2p + 1$ są również pierwsze. W 1811 r. wygrała konkurs ogłoszonym przez Francuską Akademię Nauk, którego tematem było wyjaśnienie powstawania wzorów, jakie tworzy piasek rozsypany na drgającej płycie.

My również będziemy zajmować się wybranymi zagadnieniami z teorii liczb. Niestety, zakres prezentowanego materiału będzie dużo uboższy niż ten, który zgłębiała Germain.

Ograniczymy się bowiem tylko do pokazania możliwości stosowania wzorów skróconego mnożenia stopnia drugiego do dowodzenia twierdzeń dotyczących podzielności liczb całkowitych.

Twoje cele

- Wykorzystasz wzory skróconego mnożenia w dowodzeniu podzielności liczb całkowitych.
- Rozpoznasz liczby złożone, nie wykonując pracochłonnych obliczeń.

Przeczytaj

Podzielność liczb całkowitych

Dane są liczby całkowite a i b , różne od 0.

Jeśli iloraz $\frac{a}{b}$

- jest liczbą całkowitą, to mówimy, że liczba a jest **podzielna** przez liczbę b (liczba b jest **dzielnikiem** liczby a),
- nie jest liczbą całkowitą, to mówimy, że liczba a **nie dzieli się** przez b (liczba b **nie jest dzielnikiem** liczby a).

W przypadku, gdy liczba a jest **podzielna** przez liczbę b , to istnieje taka liczba całkowita t , że:

$$a = bt$$

W przypadku, gdy liczba a **nie jest podzielna** przez b , to w wyniku dzielenia liczby a przez liczbę b otrzymujemy iloraz t (będący liczbą całkowitą) i resztę r .

$$a = tb + r$$

Twierdzenie: Twierdzenie o dzieleniu z resztą

Dla każdej pary liczb całkowitych a i b , różnych od 0, istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych t i r taka, że $a = tb + r$, gdzie $0 < r < |b|$.

Liczbę naturalną nazywamy **liczbą pierwszą**, gdy ma dwa dzielniki – liczbę 1 i samą siebie.

Liczbę naturalną, większą od 1, nazywamy **złożoną**, gdy ma więcej niż dwa dzielniki.

Liczby 0 i 1 to **liczby ani pierwsze, ani złożone**.

Aby określić, czy liczba całkowita zapisana za pomocą wyrażenia arytmetycznego jest złożona, nie zawsze trzeba wykonywać pracochłonne obliczenia. W niektórych przypadkach można skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 1

Uzasadnimy, że liczba $K = 212^2 - 127^2$ jest złożona i dzieli się przez 3.

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, zapisujemy wyrażenie określające liczbę K w postaci iloczynu.

$$K = 212^2 - 127^2$$

$$K = (212 - 127)(212 + 127)$$

Każda z liczb $212 - 127$ i $212 + 127$ jest dzielnikiem liczby K . Zatem liczba K ma co najmniej 4 dzielniki naturalne (dzielnikami liczby K są również: liczba 1 i K), jest więc liczbą złożoną.

Liczbę K można zapisać też w postaci

$$K = 85 \cdot 339$$

Ponieważ suma cyfr liczby 339 jest równa 15, więc liczba 339 dzieli się przez 3, a co za tym idzie i liczba K dzieli się przez 3, co należało wykazać.

Przykład 2

Wykażemy, że liczba $M = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ jest liczbą parzystą.

Przedstawimy każdy z ułamków sumy określającej liczbę M , bez użycia niewymierności w mianowniku. Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$M = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$
$$M = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

Teraz korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy i upraszczamy otrzymane wyrażenie.

$$M = \frac{7+5+2\sqrt{35}}{7-5} + \frac{7+5-2\sqrt{35}}{7-5}$$
$$M = \frac{24}{2} = 12$$

Liczba 12 dzieli się przez 2, więc liczba M jest liczbą parzystą, co należało wykazać.

Pokażemy teraz, jak łatwo uzasadnić podzielność danej liczby, za pomocą wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń.

Przykład 3

Wykażemy, że liczba $A = 17^2 + 29^2 + 986$ jest podzielna przez 23.

Zauważmy, że wyrażenie $17^2 + 29^2 + 986$ można zapisać w postaci kwadratu sumy liczb 17 i 29.

Zatem

$$A = (17 + 29)^2 = 46^2$$

Liczba 46 jest iloczynem liczby 2 i liczby 23.

$$A = (2 \cdot 23)^2 = 23 \cdot (23 \cdot 2^2) = 23 \cdot 92$$

Zatem liczbę A można zapisać w postaci iloczynu liczby 23 i liczby całkowitej 92, co oznacza, że liczba A jest podzielna przez 23.

Podzielność liczb zapisanych za pomocą wyrażeń algebraicznych

Przypomnijmy:

- liczbę naturalną parzystą można zapisać w postaci $2n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$;
- liczbę naturalną nieparzystą można zapisać w postaci $2n + 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$;
- liczba 0 jest liczbą parzystą;
- najmniejsza liczba naturalna nieparzysta to 1;
- kolejne liczby naturalne, z których najmniejszą jest n to: $n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots$

Przykład 4

Wykażemy, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych w dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

Oznaczmy:

$n, n + 1, n + 2$, gdy $n \in \mathbb{N}$ - kolejne liczby naturalne.

Chcemy wykazać, że sumę kwadratów 3 kolejnych liczb naturalnych można zapisać w postaci sumy iloczynu liczby 3 i liczby naturalnej oraz liczby 2.

Zapisujemy i przekształcamy sumę kwadratów 3 kolejnych liczb całkowitych, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

$$\begin{aligned}n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \\ &= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2\end{aligned}$$

Ponieważ liczba $n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną, zatem suma kwadratów 3 kolejnych liczb naturalnych w dzieleniu przez 3 daje resztę 2, co należało wykazać.

Przykład 5

Wykażemy, że różnica czwartych potęg dwóch liczb naturalnych, z których pierwsza przy dzieleniu przez 10 daje resztę 1, a druga przy dzieleniu przez 10 daje resztę 3, dzieli

się przez 10.

Pierwszą z liczb możemy zapisać w postaci $10t + 1$, gdzie $t \in \mathbb{N}$, a drugą w postaci $10k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Wtedy $(10t + 1)^4 - (10k + 3)^4$ to różnica czwartych potęg tych liczb.

Przekształcamy otrzymane wyrażenie (oznaczymy je W), stosując dwukrotnie wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

$$\begin{aligned} W &= (10t + 1)^4 - (10k + 3)^4 = \\ &= \left[(10t + 1)^2 - (10k + 3)^2 \right] \cdot \left[(10t + 1)^2 + (10k + 3)^2 \right] \\ W &= [(10t + 1 - 10k - 3)(10t + 1 + 10k + 3)] \cdot \\ &\quad \cdot [100t^2 + 20t + 1 + 100k^2 + 60k + 9] \\ W &= (10t - 10k - 2) \cdot (10t + 10k + 4) \cdot (100t^2 + 100k^2 + 20t + 60k + 10) \end{aligned}$$

W ostatnim iloczynie wspólny czynnik to 10, wyłączamy go przed nawias.

$$W = 10 \cdot (10t - 10k - 2) \cdot (10t + 10k + 4) \cdot (10t^2 + 10k^2 + 2t + 6k + 1)$$

Różnicę czwartych potęg dwóch liczb naturalnych, z których pierwsza przy dzieleniu przez 10 daje resztę 1, a druga przy dzieleniu przez 10 daje resztę 3, przedstawiliśmy w postaci iloczynu liczby 10 i liczby całkowitej

$$(10t - 10k - 2) \cdot (10t + 10k + 4) \cdot (10t^2 + 10k^2 + 2t + 6k + 1),$$

zatem różnica ta dzieli się przez 10, co należało wykazać.

Słownik

liczba pierwsza

liczba naturalna n , która ma tylko dwa dzielniki 1 i n

liczba złożona

liczba naturalna, większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki

liczby ani pierwsze, ani złożone

liczby 0 i 1

Animacja

Polecenie 1

Nim zapoznasz się z animacją, przypomnij sobie wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i korzystając z tego wzoru, rozłóż na czynniki różnicę $a^4 - b^4$.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dc9HKIE7b>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zastosowania wzorów skróconego mnożenia w teorii podzielności liczb.

Polecenie 2

Wykaż, że różnica czwartych potęg dwóch liczb naturalnych różniących się o 2 jest podzielna przez 8.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Wykaż, że jeśli n jest liczbą naturalną dodatnią, to liczba

$$M = (3n + 1)(3n - 1) + (3n + 1)^2 + (3n - 1)^2$$

w dzieleniu przez 9 daje resztę 1.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że liczba $\left(\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{7}}\right) \cdot (773^2 - 529^2)$ jest podzielna przez 122.

Ćwiczenie 9



Wykaż, że różnica kwadratów dwóch liczb niepodzielnych przez 3 dzieli się przez 3.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w teorii podzielności liczb

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wzory skróconego mnożenia w dowodzeniu podzielności liczb całkowitych
- rozpoznaje liczby złożone, nie wykonując pracochłonnych obliczeń
- uzasadnia poprawność prowadzonych rozumowań
- analizuje problemy arytmetyczne i wybiera najdogodniejszą strategię ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- ale kino

- rybi szkielet

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Uczniowie wspólnie tworzą „rybi szkielet” ze wzorów skróconego mnożenia – na „ościach” zapisują wzory i przykłady ich zastosowania.

Jeden z uczniów, wyznaczony wcześniej przez nauczyciela, przypomina pojęcia i twierdzenia związane z podzielnością liczb naturalnych (materiał przygotował w domu).

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie zapoznają się z przykładami 1 – 3, a następnie metodą „ale kino” rozwiązują w grupach przykłady 4 – 5. Ich zadaniem jest poukładanie w odpowiedniej kolejności kroków rozwiązań, przygotowanych na kartkach przez nauczyciela (na każdej kartce jeden krok).

Nauczyciel w tej fazie lekcji pełni rolę doradcy, mentora.

Uczniowie w parach wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

Dwaj wskazani przez nauczyciela uczniowie podsumowują zajęcia – omawiają pracę swoich grup, przedstawiają trudności napotkane w czasie pracy.

Nauczyciel ocenia pracę grup i poszczególnych par uczniów, zwraca uwagę na efektywność i skuteczność pracy.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Czy liczby pierwsze zdradzą swoje tajemnice?

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na zajęciach poświęconych przekształcaniu wyrażeń algebraicznych.