Ogólna definicja prawdopodobieństwa

Przykład na potoczny sposób szacowania prawdopodobieństwa zdarzenia.

Przykłady na określanie zdarzeń elementarnych i na tej podstawie określanie zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych i liczby jego elementów.

Zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu. Zbiór pusty. Zdarzenie pewne. Twierdzenie o klasycznej definicji prawdopodobieństwa. Przykładowe zdarzenia w doświadczeniu losowym, polegającym na dwukrotnym rzucie symetryczną monetą. Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń z wykorzystaniem definicji klasycznej.

Przykład zdarzenia przeciwnego. Definicja zdarzenia przeciwnego. Twierdzenie o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego. Przykłady na wykorzystanie twierdzenia o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego. Twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy dwóch zdarzeń. Przykłady na zastosowanie twierdzenia o prawdopodobieństwie sumy dwóch zdarzeń.

Obliczanie prawdopodobieństwa w doświadczeniu dwuetapowym. Przykład na wykorzystanie metody drzewka do obliczania prawdopodobieństwa.

Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść podstawowa). Zadania interaktywne zamknięte na obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia.

Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść podstawowa). Zadania otwarte na obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia. Wyjaśnienia i rozwiązania do zadań.

Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść podstawowa). Zadania otwarte na obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia. Wyjaśnienia i rozwiązania do zadań.

Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść podstawowa). Zadania otwarte na obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia. Wyjaśnienia i rozwiązania do zadań.

Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść podstawowa). Zadania na obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia. Wyjaśnienia i rozwiązania do zadań.

Ogólna definicja prawdopodobieństwa

W tym materiale zapoznasz się z definicjami i twierdzeniami związanymi z prawdopodobieństwem. Nauczysz się stosować metodę drzewa do analizy doświadczeń dwuetapowych. Dowiesz się, jak obliczać prawdopodobieństwo w sytuacjach praktycznych.

Przykład 1

Zdarza się, że w wypowiedziach dotyczących przewidywania wyniku jakiegoś zdarzenia szacowany jest wynik tego zdarzenia. Spotykamy się więc z następującymi sformułowaniami „po pierwszym meczu nasze szanse na awans oceniam na 75 procent” czy „sądzę, że moje szanse na pierwszą nagrodę są mniejsze niż jeden do dziesięciu”, czy też „jestem przekonany, że zachwyt przy ocenie naszej oferty wyrazi co najmniej dwóch na trzech klientów naszego sklepu”.

Podając liczby: $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{3}$ oceniamy, na ile zajście zdarzenia, którego wynik nie jest znany, jest zbliżone do prawdy (prawdopodobne).

W tym materiale wprowadzimy umowy, które pozwolą nam obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń w pewnych nieskomplikowanych sytuacjach przy zastosowaniu formalnie opisanych metod. W przykładach będziemy analizować wyniki doświadczeń losowych.

Przykład 2

Każdy z nas spotkał się z sytuacją, w której przy podjęciu pewnej decyzji wybieramy wynik losowania. Na przykład w amerykańskiej zawodowej lidze koszykówki NBA nabór nowych zawodników odbywa się w tak zwanej loterii draftowej. Według obowiązujących przepisów przystępuje do niej 14 zespołów z najgorszym bilansem zwycięstw z poprzedniego sezonu, przy czym zespoły te są ustawiane w kolejności od najgorszego bilansu do najlepszego. W tej loterii losuje się spośród 1000 kul, przy czym 250 z nich przydzielonych jest pierwszemu zespołowi z tego zestawienia, 199 – drugiemu, a 138 – trzeciemu itd. W ten sposób najgorszy zespół ma 25% szans na wylosowanie pierwszego numeru. Powiemy więc, że prawdopodobieństwo, że najgorszy zespół wylosuje pierwszy numer w loterii draftowej jest równe $\frac{1}{4}$.

Jednak największe szanse nie gwarantują pierwszego numeru w takiej loterii. W 2008 roku pierwszy numer w drafcie wylosowała drużyna Chicago Bulls, która w losowaniu miała przydzielone 17 kul. Zatem przed losowaniem ocenilibyśmy prawdopodobieństwo, że właśnie ta drużyna wylosuje pierwszy numer jako równe $\frac{17}{1000}$.

Pojęcie prawdopodobieństwa

Przykład 3

W pewnej szóstej klasie dawno temu spotkali się trzej uczniowie: Janek, Piotrek i Andrzej. Zdarzyło się, że wszyscy korzystali z obiadów w szkolnej stołówce. Do każdego obiadu był tam serwowany deser. Na początku roku szkolnego Janek zaproponował Piotrkowi następującą zabawę: „Do końca roku szkolnego będziemy przychodzili na obiady. Niech w tym czasie o podziale naszych deserów zdecyduje los. Codziennie przed obiadem Andrzej rzuci dwa razy monetą. Jeśli raz wypadnie orzeł i raz wypadnie reszka, to ja zjem dwa desery: twój i mój. Jeśli dwa razy wypadnie orzeł, to Ty zjesz te dwa desery. Natomiast jeśli wypadnie dwa razy reszka, to każdy zje swój deser. Jak widzisz, umowa jest uczciwa, bo poza tymi trzema przypadkami innego wyniku dwóch rzutów monetą nie ma, a patrząc na te przypadki łącznie, każdy z nas ma równe szanse. Ja w jednym przypadku dostanę dwa desery, w drugim – żadnego, a w trzecim – jeden. I ty także: w jednym przypadku dostaniesz dwa desery, w innym – żadnego, a w jeszcze innym – jeden. Nie pomyśl sobie, że w zmowie z Andrzejem szykujemy jakąś sztuczkę z monetą. Gdybyś chciał, to możemy się umówić, że monetę do rzucania będziemy wybierali wspólnie, a przy rzucaniu będziemy się zmieniali. To jak, zgadzasz się na taki układ? Mielibyśmy niezłą zabawę przed obiadem.”

Piotrek chwilę pomyślał, a następnie odmówił. Od razu też wytłumaczył Jankowi, dlaczego uważa, że taka umowa wcale nie jest uczciwa.

Podamy argumenty, które przemawiają za tym, że Piotrek powinien odrzucić pomysł Janka.

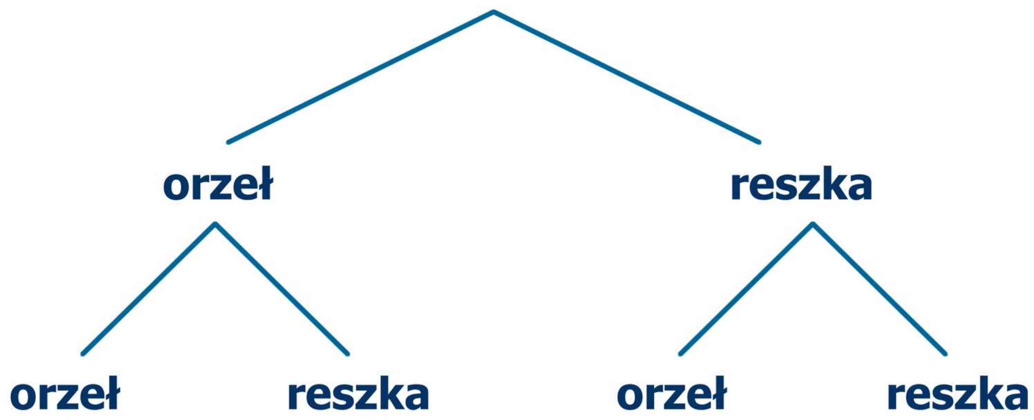
Dwukrotny rzut monetą to doświadczenie, które polega na wykonaniu po kolei dwóch czynności. Każda z nich może skończyć się na jeden z dwóch sposobów: albo wypadnie orzeł, albo wypadnie reszka. Na podstawie reguły mnożenia stwierdzamy, że liczba wszystkich możliwych wyników dwukrotnego rzutu monetą jest równa

$$2 \cdot 2 = 4.$$

Wszystkie wyniki takiego doświadczenia można przedstawić w tabeli.

I **rzut/**II **rzuty**	**Orzeł**	**Reszka**
Orzeł	(orzeł, orzeł)	(orzeł, reszka)
Reszka	(reszka, orzeł)	(reszka, reszka)

Lub za pomocą drzewa:



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z tabeli możemy też odczytać dwuelementowe ciągi, które opisują wszystkie możliwe wyniki dwukrotnego rzutu monetą:

(orzeł, orzeł), (orzeł, reszka), (reszka, orzeł), (reszka, reszka).

Są więc dokładnie cztery możliwe wyniki dwukrotnego rzutu monetą. Pewnie i bez powyższego opisu potrafi to uzasadnić każdy, kto zrozumiał podstawowe zasady obowiązujące w kombinatoryce.

Typowa moneta znajdująca się w obiegu może być uznana za symetryczną. Oznacza to, że przy dużej liczbie rzutów taką monetą średnio połowa z nich skończy się wyrzuceniem orła, a połowa – reszki. Zatem i każdy z czterech wyników dwukrotnego rzutu monetą będzie wypadał średnio tak samo często, jak każdy z pozostałych.

Wracamy do zabawy opisanej w poprzednim przykładzie. Jak już zauważyliśmy: wbrew sugestiom Janka mamy do rozpatrzenia nie trzy, a cztery przypadki. Popatrzmy na rozdział deserów w każdym z tych przypadków:

- (orzeł, orzeł) – Piotrek zje dwa desery, Janek – żadnego,
- (orzeł, reszka) – Piotrek nie zje żadnego deseru, a Janek zje dwa,
- (reszka, orzeł) – Piotrek nie zje żadnego deseru, a Janek zje dwa,
- (reszka, reszka) – Piotrek zje jeden deser i Janek zje jeden deser.

Wobec tego w ciągu kolejnych czterech dni, kiedy chłopcy mają do rozdzielenia 8 deserów, 5 deserów zje Janek, a tylko trzy – Piotrek. Zatem kontynuowanie przez dłuższy czas losowego wyboru deserów metodą zaproponowaną przez Janka jest dla Piotrka zdecydowanie niekorzystne.

Podając te wartości, oceniliśmy jedynie szanse każdego z chłopców na otrzymanie deseru. Nie należy się jednak spodziewać, że w ciągu dowolnie wybranych czterech dni, przy takiej metodzie losowego rozdziału deserów, Piotrek dostanie dokładnie 3 z ośmiu możliwych do otrzymania. Natomiast przy przeprowadzeniu większej liczby powtórzeń tego doświadczenia liczba deserów przeznaczonych dla Piotrka będzie zbliżała się do pewnej wartości, którą nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia, że w wyniku podanej metody przydziału deser dostanie Piotrek.

Można formalnie wykazać, że 3 to oczekiwana liczba deserów, które w ciągu czterech dni otrzyma Piotrek, gdyby zastosował się do metody zaproponowanej przez Janka. Metody matematyczne, których do tego celu należałoby użyć, stosowane są w rachunku prawdopodobieństwa.

Przykład 4

1. Każdy oficjalny mecz piłki nożnej zaczyna się od losowania drużyny, która rozpocznie rozgrywkę. Sędzia rzuca wtedy monetą, przy czym robi to w taki sposób, żeby nikt nie miał wątpliwości, że wynik takiego losowania będzie przypadkowy. Przed takim losowaniem jesteśmy przekonani, że obie zainteresowane drużyny mają równe szanse rozpoczęcia gry od środka boiska.
   Za każdym razem takie losowanie uznamy więc za doświadczenie losowe.
2. Kilkuosobową grę w karty rozpoczyna się od wyboru osoby rozdającej. Chcemy, aby metoda wyboru dawała równe szanse każdemu z graczy. Jednym ze sposobów jest losowanie przez każdego z graczy jednej karty z pełnej talii. Zazwyczaj rozdającym zostaje ta osoba, która wylosuje kartę najniższą według rangi w danej grze.
   Taki wybór osoby rozdającej uznamy także za doświadczenie losowe.
3. Przypuśćmy, że o wyborze kapitana w przypadkowo dobranej pięcioosobowej drużynie koszykówki chcemy zadecydować losowo – możemy to zrobić, przygotowując wcześniej losy. Wystarczy w tym celu wziąć pięć takich samych kartek papieru, cztery pozostawić puste, a na jednej z nich postawić umówiony znak lub napisać słowo „kapitan”. Następnie złożyć kartki w podobny sposób i wrzucić do takiego pojemnika, z którego gracze losują po jednej kartce, nie widząc wybieranego przedmiotu.
   Kapitanem zostaje ten z nich, który wylosuje wyróżnioną kartkę.

W prezentowanych w tym materiale przykładach będziemy zajmować się doświadczeniami, które (podobnie jak przywołane powyżej) możemy uznać za losowe. Przedmioty używane w opisywanych doświadczeniach są powszechnie dostępne, więc każdy może samodzielnie takie doświadczenie przeprowadzić tyle razy, ile tylko uzna za stosowne. Naszym głównym zadaniem będzie jednak takie opisanie modelu przeprowadzanego doświadczenia, aby dla ustalenia prawdopodobieństwa otrzymania konkretnego wyniku wystarczyło zrozumienie podstawowych zasad rządzących rachunkiem prawdopodobieństwa.

Wprowadzimy podstawowe pojęcia, którymi będziemy się posługiwać przy obliczaniu prawdopodobieństw.

Każdy możliwy wynik, który może pojawić się w doświadczeniu losowym, będziemy nazywać **zdarzeniem elementarnym**.

Przykład 5

W doświadczeniu losowym, polegającym na dwukrotnym rzucie symetryczną monetą, rozróżnimy cztery zdarzenia elementarne:

- „za pierwszym razem wypadł orzeł, a za drugim razem wypadł orzeł”, co w skrócie zapiszemy jako dwuelementowy ciąg wyników (orzeł, orzeł),
- „za pierwszym razem wypadł orzeł, a za drugim razem wypadła reszka”, co w skrócie zapiszemy jako (orzeł, reszka),
- „za pierwszym razem wypadła reszka i za drugim razem wypadł orzeł”, co w skrócie zapiszemy jako (reszka, orzeł),
- „za pierwszym razem wypadła reszka i za drugim razem wypadła reszka”, co w skrócie zapiszemy jako (reszka, reszka).

W omawianym doświadczeniu używaliśmy monety symetrycznej, więc spodziewamy się, że przy dużej liczbie powtórzeń każde z wypisanych powyżej zdarzeń elementarnych pojawi się z podobną średnią częstością. Uznajemy zatem, że wszystkie te zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych będziemy oznaczali za pomocą dużej greckiej litery Ω (omega).

Fakt, że w rozpatrywanym doświadczeniu zbiór zdarzeń elementarnych
$\Omega = \{(\text{orzeł, orzeł}), (\text{orzeł, reszka}), (\text{reszka, orzeł}), (\text{reszka, reszka})\}$,
liczy cztery elementy, zapiszemy symbolicznie $|\Omega| = 4$.

W rozwiązaniach kilku kolejnych przykładowych zadań będziemy wypisywali zdarzenia elementarne i na tej podstawie określali zbiór Ω wszystkich zdarzeń elementarnych i liczbę jego elementów.

Definicja: Zdarzenie

Dowolny podzbiór zbioru Ω będziemy nazywać zdarzeniem, a elementy takiego podzbioru będziemy nazywać **zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi temu zdarzeniu**.

Zbiór pusty, czyli zdarzenie, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne, nazywamy zdarzeniem niemożliwym.

Zbiór Ω, czyli zdarzenie, któremu sprzyja każde zdarzenie elementarne, nazywamy zdarzeniem pewnym.

Przykład 6

Ponieważ w doświadczeniu rozpatrywanym w poprzednim przykładzie zbiór Ω ma cztery elementy, to różnych zdarzeń w tym doświadczeniu jest $2^4 = 16$ (tyle jest bowiem wszystkich podzbiorów czteroelementowego zbioru Ω).

Przykładowymi zdarzeniami w doświadczeniu losowym, polegającym na dwukrotnym rzucie symetryczną monetą są:

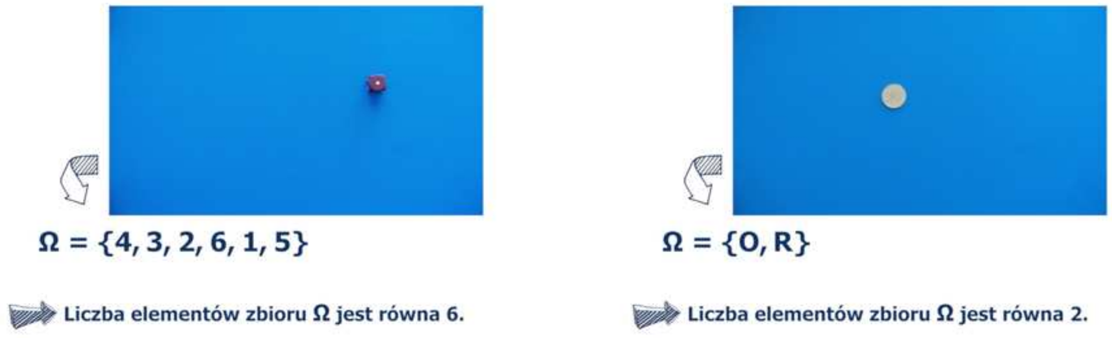
- $A = \{$(orzeł, reszka), (reszka, orzeł)$\}$. Takiemu zdarzeniu sprzyjają dwa zdarzenia elementarne, więc zapiszemy, że $|A| = 2$. Zdarzenie to można byłoby opisać słownie, np. tak: A – zdarzenie polegające na tym, że wypadło tyle samo orłów, co reszek.
- $B = \{$(orzeł, orzeł), (orzeł, reszka), (reszka, orzeł)$\}$. Temu zdarzeniu sprzyjają trzy zdarzenia elementarne, zatem $|B| = 3$. Zdarzenie to można byłoby opisać słownie, np. tak: B – zdarzenie polegające na tym, że wypadł co najmniej jeden orzeł.
- $C = \{$(reszka, reszka)$\}$. Temu zdarzeniu sprzyja jedno zdarzenie elementarne, stąd $|C| = 1$. Zdarzenie to można byłoby opisać słownie, np. tak: C – zdarzenie polegające na tym, że wypadło mniej orłów niż reszek.

Rozpatrzmy zdarzenia opisane słownie:

- D – zdarzenie polegające na tym, że wypadło trzy razy więcej orłów niż reszek. Zbiór D jest pusty – nie ma zdarzeń elementarnych, które sprzyjają temu zdarzeniu. Zdarzenie D jest więc niemożliwe.
- E – zdarzenie polagające na tym, że wypadły dwa orły lub dwie reszki. Zdarzeniu E sprzyjają dwa zdarzenie elementarne: (orzeł, orzeł), (reszka, reszka), zatem zapiszemy $E = \{$(orzeł, orzeł), (reszka, reszka)$\}$, a co za tym idzie: $|E| = 2$.
- F – zdarzenie, że wypadły co najwyżej dwie reszki. Zdarzeniu F sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, zatem zapiszemy $F = \Omega$. Oznacza to, że F jest zdarzeniem pewnym.

Fakt, że zdarzenie A jest podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych Ω zapisujemy też, używając symbolu zawierania zbiorów: $A \subset \Omega$.

Zapoznaj się z poniższymi animacjami.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RlG7Kv9meRn2L

atrapa:opis animacji

Animacja przedstawia jak wyglądają zbiory zdarzeń elementarnych w dwóch podstawowych doświadczeniach losowych: rzucie kostką do gry oraz rzucie monetą.

Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1UhGalPSBl5X

atrapa:opis animacji

Animacja przedstawia jak wygląda zbiór zdarzeń elementarnych w doświadczeniu losowym polegającym na jednoczesnym rzucie kostką i rzucie monetą.

Określimy teraz, jak będziemy obliczać prawdopodobieństwo w tak zwanym schemacie klasycznym.

Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Rozpatrzmy doświadczenie losowe, w którym wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, a Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem $P(A)$ zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy wówczas iloraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

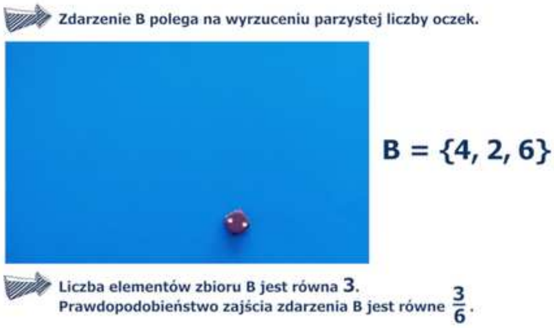
Przykład 7

W doświadczeniu losowym polegającym na dwukrotnym rzucie symetryczną monetą wszystkie zdarzenie elementarne są jednakowo prawdopodobne. Zatem obliczając prawdopodobieństwa zdarzeń, możemy skorzystać z definicji klasycznej. Obliczymy w ten sposób prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń opisanych w poprzednim przykładzie.

Przypomnijmy, że w tym doświadczeniu $|\Omega| = 4$. Oznacza to, że:

- jeżeli $A = \{$(orzeł, reszka), (reszka, orzeł)$\}$, to $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,
- jeżeli $B = \{$(orzeł, orzeł), (orzeł, reszka), (reszka, orzeł)$\}$, to $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$,
- jeżeli $C = \{$(reszka, reszka)$\}$, to $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$,
- jeżeli D to zdarzenie, że wypadło trzy razy więcej orłów niż reszek, to $D = \emptyset$, stąd $P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{0}{4} = 0$,
- jeżeli E to zdarzenie, że wypadły dwa orły lub dwie reszki, to $E = \{$(orzeł, orzeł), (reszka, reszka)$\}$, stąd $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,
- jeżeli F to zdarzenie, że wypadły co najwyżej dwie reszki, to $F = \Omega$, stąd $P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{4}{4} = 1$.

Zapoznaj się z poniższą animacją.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RKQhugWJXZppG

atrapa:opis animacji

Animacja przedstawia w jaki sposób obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia określonego zdarzenia losowego w doświadczeniu losowym polegającym na rzucie kostką do gry w dwóch przypadkach.

Ważne!

Warto zapamiętać dwa wnioski wynikające z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

1. $P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = \frac{0}{|\Omega|} = 0$, co oznacza, że prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0,
2. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$, co oznacza, że prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1.

Własności prawdopodobieństwa

Przykład 8

W kopercie znajduje się 11 kartek, ponumerowanych od 1 do 11. Z tej koperty wybieramy losowo jedną kartkę. Obliczymy prawdopodobieństwo otrzymania:

1. liczby podzielnej przez 4,
2. liczby niepodzielnej przez 4.

Za zdarzenie elementarne w takim doświadczeniu przyjmujemy wylosowanie jednej spośród 11 kartek. Ponieważ wylosowana kartka jest jednoznacznie przypisana do zapisanego na niej numeru, więc nie doprowadzimy do żadnych nieporozumień, kiedy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych zapiszemy skrótowo

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

Mamy więc $|\Omega| = 11$.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że wylosowano liczbę podzielną przez 4,

B – zdarzenie polegające na tym, że wylosowano liczbę niepodzielną przez 4.

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, wobec tego przy obliczaniu prawdopodobieństw zdarzeń A, B, C skorzystamy z definicji klasycznej.

1. Wśród liczb ze zbioru Ω znajdujemy liczby podzielne przez 4 – są to 4 oraz 8, zatem możemy zapisać skrótowo, że $A = \{4, 8\}$.
   Oznacza to, że są dwa zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A, więc $|A| = 2$.
   Stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{11}$.
2. Wśród liczb ze zbioru Ω znajdujemy wszystkie liczby niepodzielne przez 4.
   Zapisujemy zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B:
   $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$.
   Stąd $|B| = 9$, a więc

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{9}{11}.$$

   Zauważmy, że do opisanego zbioru B należą wszystkie zdarzenia elementarne, które nie sprzyjają zdarzeniu A (możemy też powiedzieć, że zbiór B jest dopełnieniem zbioru A do zbioru Ω).
   Taką zależność między dwoma zdarzeniami opisuje się za pomocą pojęcia zdarzenia przeciwnego.

Definicja: Zdarzenie przeciwne

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A, należącego do zbioru zdarzeń elementarnych Ω, nazywamy takie zdarzenie A' należące do Ω, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, które nie sprzyjają zdarzeniu A.

Z tej definicji wynika, że również zdarzenie A jest zdarzeniem przeciwnym do A'.

Zauważmy, że ponieważ zdarzenia A i A' są rozłączne ($A \cap A' = \emptyset$) oraz ich sumą jest zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω ($A \cup A' = \Omega$), więc liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest sumą liczb zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A oraz zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A'.

$$|\Omega| = |A| + |A'|.$$

Jeśli obie strony otrzymanej równości podzielimy przez liczbę dodatnią $|\Omega|$, to otrzymamy

$$\frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|A'|}{|\Omega|}.$$

Ponieważ A oraz A' są zdarzeniami ze zbioru Ω, więc liczba $\frac{|A|}{|\Omega|}$ to prawdopodobieństwo zdarzenia A, natomiast liczba $\frac{|A'|}{|\Omega|}$ to prawdopodobieństwo zdarzenia A'. Stąd

$$P(A) + P(A') = 1.$$

Prawdziwe jest zatem twierdzenie.

Twierdzenie: o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego

Załóżmy, że A jest zdarzeniem ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia A', przeciwnego do A, wyraża się wzorem

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Przykład 9

W pewnym doświadczeniu losowym dane jest zdarzenie A oraz zachodzi równość $3 \cdot P(A) = 7 \cdot P(A')$, gdzie A' jest zdarzeniem przeciwnym do A. Obliczymy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

Przekształcamy równość daną w treści zadania, korzystając z zależności między $P(A')$ i $P(A)$

$$3 \cdot P(A) = 7 \cdot (1 - P(A)),$$

$$3 \cdot P(A) = 7 - 7 \cdot P(A),$$

$$10 \cdot P(A) = 7.$$

Stąd wynika, że:

$$P(A) = \frac{7}{10}.$$

Przykład 10

Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wybieramy losowo jedną liczbę. Obliczymy prawdopodobieństwo, że otrzymana liczba jest podzielna przez 6 lub przez 10.

Za zdarzenie elementarne w takim doświadczeniu przyjmujemy wylosowanie jednej spośród 90 dwucyfrowych liczb naturalnych. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych zapiszemy

$$\Omega = \{10, 11, 12, \ldots, 99\}.$$

- sposób I:

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu „otrzymana liczba jest podzielna przez 6 lub przez 10”:

$\{10, 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 50, 54, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 90, 96\}$.

Jest ich 21.

Korzystając z definicji klasycznej, stwierdzamy więc, że szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{21}{90} = \frac{7}{30}$.

- sposób II:

Oznaczmy:
A – zdarzenie, że wylosowano liczbę podzielną przez 6,

B – zdarzenie, że wylosowano liczbę podzielną przez 10.

Zatem

$A = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$,

$B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$.

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo mamy obliczyć: „otrzymana liczba jest podzielna przez 6 lub przez 10”, to suma zdarzeń A oraz B.

Zdarzenia A i B nie są rozłączne, a ich część wspólna to zdarzenie

$$A \cap B = \{30, 60, 90\}.$$

Przy obliczeniu zadanego prawdopodobieństwa skorzystamy ze wzoru na liczbę elementów sumy dwóch zbiorów

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Ponieważ $|A| = 15$, $|B| = 9$ i $|A \cap B| = 3$, to

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 15 + 9 - 3 = 21.$

Oznacza to, że prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cup B$ jest równe

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}.$$

Zauważmy, że dla dowolnych zdarzeń A, B ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω ze wzoru na liczbę elementów sumy dwóch zbiorów

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

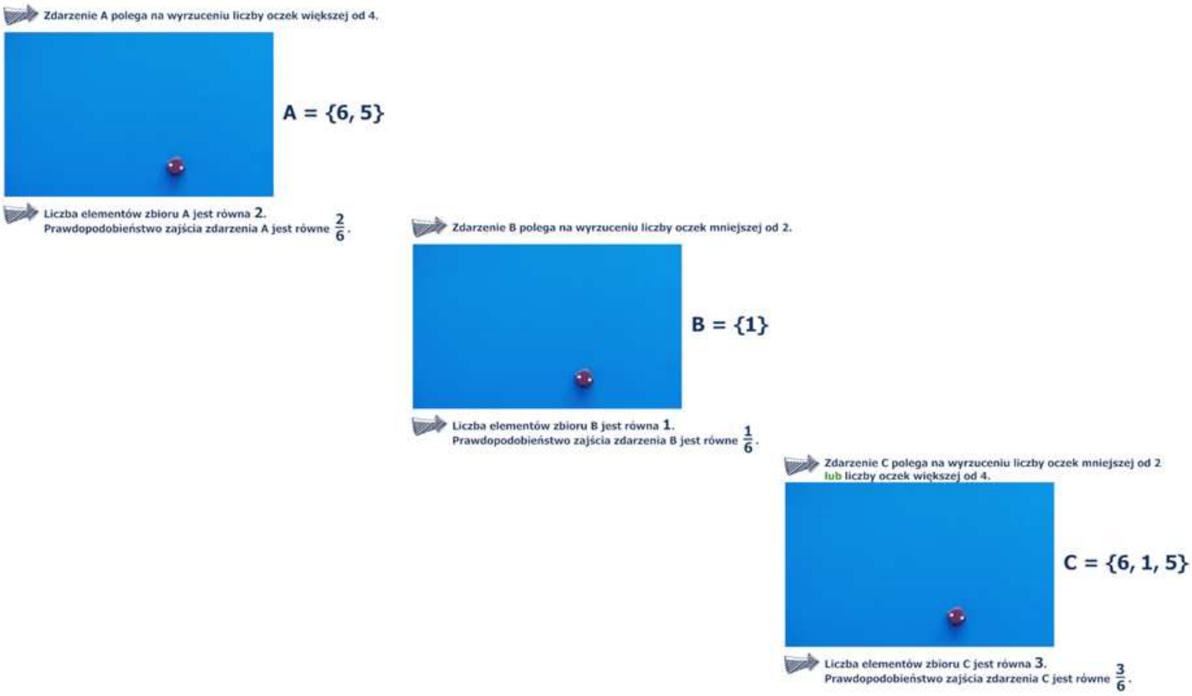
wynika, że

$$\frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} - \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}.$$

Ponieważ $A \cup B$ oraz $A \cap B$ są również zdarzeniami ze zbioru Ω, więc na mocy definicji klasycznej otrzymujemy zależność

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

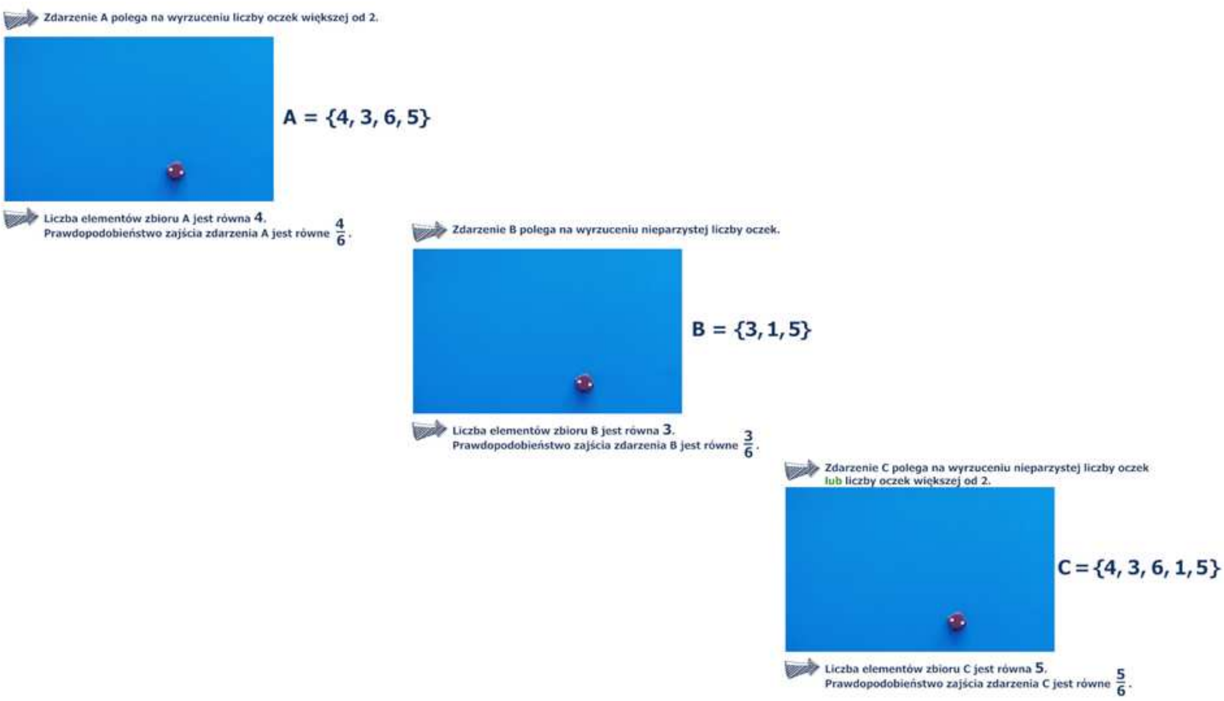
Zapoznaj się z poniższymi animacjami.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RK8tdS93N5abW

atrapa:opis animacji

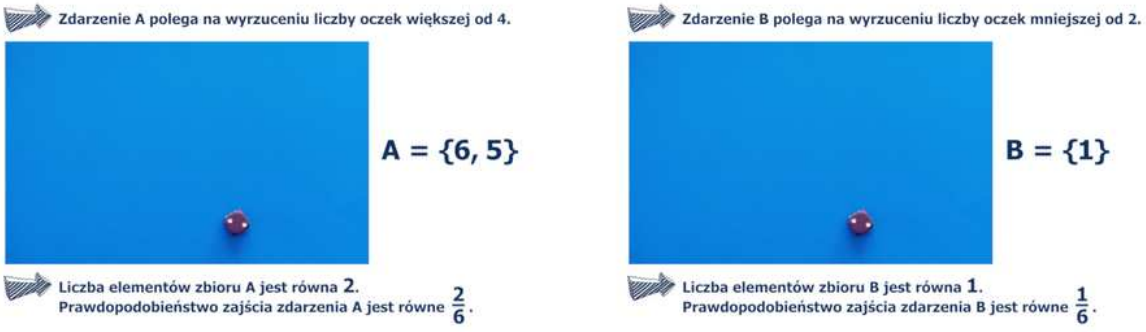
Animacja pokazuje, że prawdopodobieństwo sumy dwóch niezależnych zdarzeń losowych jest równe sumie prawdopodobieństw zajścia tych dwóch zdarzeń.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RsWyBMNnrtUBK

atrapa:opis animacji

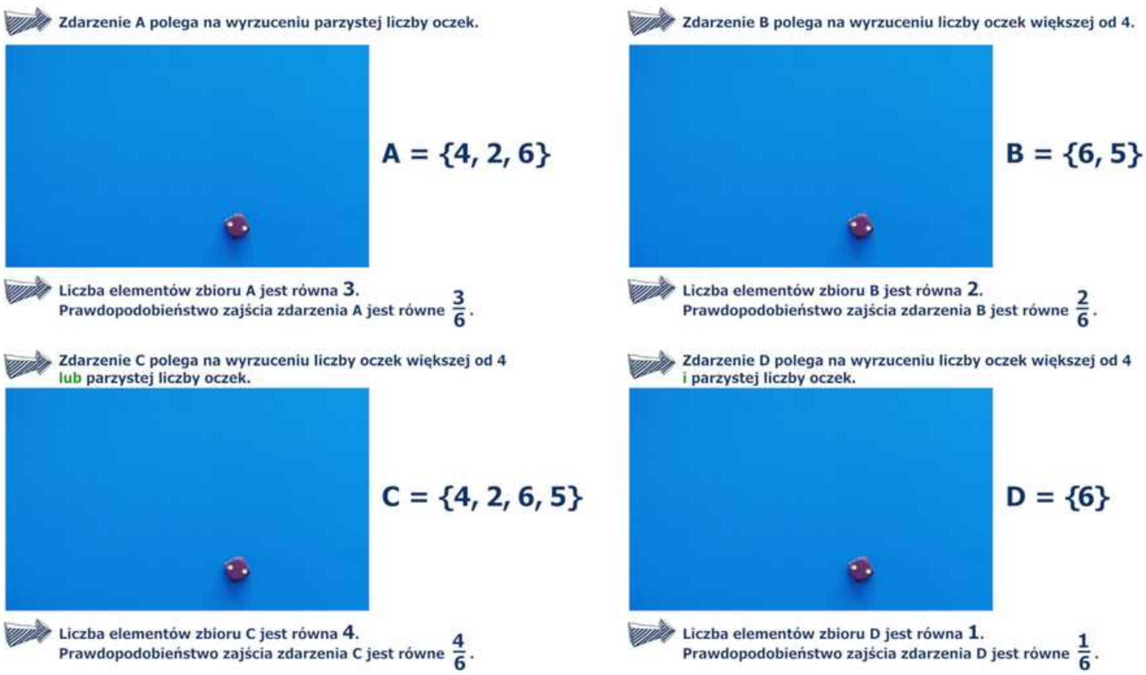
Animacja pokazuje, że prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń losowych nie zawsze jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1ErVkVxk3uM1

atrapa:opis animacji

Animacja przedstawia jakie zdarzenia nazywamy rozłącznymi.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RRd6T88vHwowG

atrapa:opis animacji

Animacja przedstawia w jaki sposób wygląda suma oraz iloczyn dwóch zdarzeń losowych.

Otrzymujemy zatem, że prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: o prawdopodobieństwie sumy dwóch zdarzeń

Załóżmy, że A oraz B są zdarzeniami ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω. Wtedy prawdopodobieństwo sumy $A \cup B$ zdarzeń A oraz B wyraża się wzorem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

gdzie $A \cap B$ to zdarzenie, które jest iloczynem (częścią wspólną) zdarzeń A, B.

Przykład 11

Załóżmy, że w pewnym doświadczeniu dane są zdarzenia A i B, przy czym ich prawdopodobieństwa są równe odpowiednio $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{11}$. W tym doświadczeniu pewne jest zdarzenie, że zajdzie zdarzenie A' lub zdarzenie B' (gdzie A' oraz B' oznaczają zdarzenia przeciwne do zdarzeń odpowiednio A i B). Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia, że zajdzie jednocześnie zdarzenie A' i zdarzenie B'.

Obliczamy

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

oraz

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}.$$

Z treści zadania wiemy, że $P(A' \cup B') = 1$, a mamy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $A' \cap B'$.

Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie sumy, zapisujemy $P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B')$.

Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia, że zajdzie jednocześnie zdarzenie A' i zdarzenie B' jest równe

$$P(A' \cap B') = P(A') + P(B') - P(A' \cup B') = \frac{5}{7} + \frac{8}{11} - 1 = \frac{34}{77}.$$

Przykład 12

Wśród 216 uczniów klas maturalnych pewnej szkoły ponadpodstawowej przeprowadzono sondaż na temat poczytności dwóch tygodników: „Widoki” oraz „Rokowania”. Okazało się, że tygodnik „Widoki” czytają 144 osoby, tygodnik „Rokowania” czytają 132 osoby, a oba te tygodniki czyta 80 osób.

Obliczymy prawdopodobieństwo p zdarzenia, że osoba wybrana losowo z tej grupy nie czyta żadnego z tych tygodników.

Za zdarzenie elementarne przyjmujemy wylosowanie jednej osoby z grupy ankietowanych uczniów. Zatem $|\Omega| = 216$.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba czyta tygodnik „Widoki”,

B – zdarzenie, że wylosowana osoba czyta tygodnik „Rokowania”.

Z treści zadania wynika, że $|A| = 144$, $|B| = 132$ oraz $|A \cap B| = 80$, zatem liczba $|A \cup B|$ osób, które czytają jeden lub drugi tygodnik jest równa

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 144 + 132 - 80 = 196.$$

Stąd

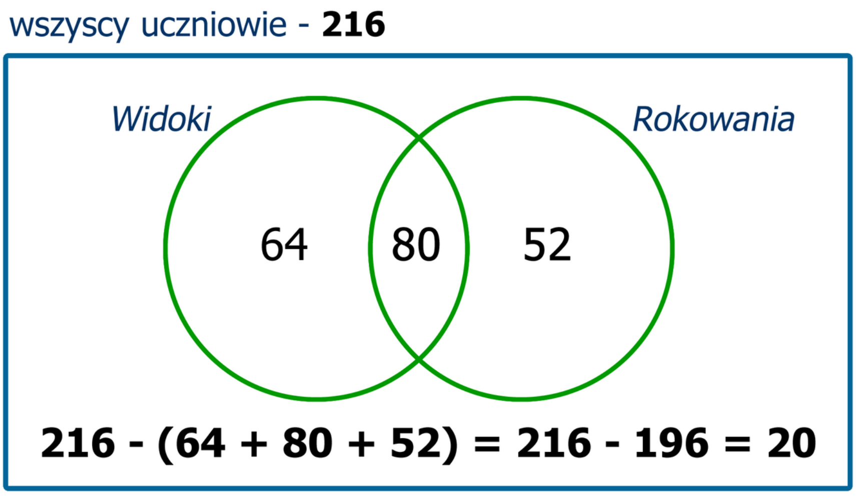
$$|\Omega| - |A \cup B| = 216 - 196 = 20.$$

to liczba osób, które nie czytają żadnego z tych tygodników.

Oznacza to, że szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$p = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}.$$

Zależności między liczbami uczniów w tym zadaniu można przedstawić schematycznie za pomocą diagramu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wpisaliśmy w nim po kolei

- liczbę uczniów, którzy czytają oba tygodniki: 80,
- liczbę uczniów, którzy czytają tygodnik „Widoki” i nie czytają tygodnika „Rokowania”: $144 - 80 = 64$,
- liczbę uczniów, którzy czytają tygodnik „Rokowania” i nie czytają tygodnika „Widoki”: $132 - 80 = 52$,
- liczbę uczniów, którzy nie czytają żadnego z tych dwóch tygodników: $216 - (64 + 80 + 52) = 20$.

Przykład 13

Z pudełka zawierającego 8 kul ponumerowanych od 1 do 8 losujemy jednocześnie dwie kule. Obliczymy prawdopodobieństwo zajścia takiego zdarzenia A, że suma wylosowanych liczb jest równa 11.

Przedstawimy dwa sposoby opisu zbioru zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

- sposób I:

Ponieważ z pudełka zawierającego 8 kul losujemy jednocześnie dwie kule, więc zdarzenie elementarne zapisujemy jako dwuelementowy podzbiór $\{a, b\}$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Zatem zdarzeń elementarnych jest tyle, ile dwuelementowych podzbiorów zbioru ośmioelementowego, stąd

$$|\Omega| = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Zdarzeniu, że suma wylosowanych liczb jest równa 11, sprzyjają następujące 3 zdarzenia elementarne: $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$. Wobec tego $|A| = 3$, co oznacza, że

$$P(A) = \frac{3}{28}.$$

- sposób II:

Ponieważ dodawanie jest przemienne, więc suma nie zmieni się, kiedy rozróżnimy kule ze względu na kolejność, w której zostały wylosowane. Każde zdarzenie elementarne zapisujemy wtedy jako dwuelementowy ciąg (a, b), gdzie a, b są różnymi elementami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ numerów kul znajdujących się w pudełku. Wszystkich zdarzeń elementarnych jest więc

$$|\Omega| = 8 \cdot 7 = 56.$$

Zdarzeniu, że suma wylosowanych liczb jest równa 11 sprzyjają następujące zdarzenia elementarne: $(3, 8)$, $(4, 7)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(7, 4)$, $(8, 3)$. Stąd $|A| = 6$, co oznacza, że

$$P(A) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}.$$

Doświadczenia dwuetapowe – metoda drzewa

Przykład 14

Uczniowie trzeciej klasy otrzymali do rozwiązania zestaw 50 zadań powtórzeniowych z matematyki. Zadania były ponumerowane od 1 do 50. Pewna ich część to zadania kodowane, a pozostałe to zadania zamknięte.

Ania rozwiązała wszystkie te zadania w ciągu dwóch dni. Pierwszego dnia rozwiązała 60% zadań zestawu, przy czym połowę tych zadań stanowiły zadania kodowane. Wśród zadań rozwiązanych przez Anię drugiego dnia co piąte było kodowane.
Obliczymy, jakie jest prawdopodobieństwo p zdarzenia, że przy losowaniu zadania z tego zestawu otrzymamy zadanie kodowane.

- sposób I:

Za zdarzenie elementarne w opisanym doświadczeniu przyjmujemy wylosowanie jednego spośród 50 zadań.

Obliczenia liczby zadań kodowanych przeprowadzimy w dwóch etapach.

1. Obliczymy liczbę zadań rozwiązanych w każdym dniu przez Anię: w pierwszym dniu Ania rozwiązała $60\% \cdot 50 = 30$ zadań, a więc w drugim dniu Ania rozwiązała 20

zadań (to jest 40% wszystkich).

2. Obliczymy liczbę zadań kodowanych rozwiązanych przez dziewczynkę pierwszego dnia oraz drugiego dnia.

Pierwszego dnia dziewczynka rozwiązała 15 zadań kodowanych (jest to połowa z 30 zadań rozwiązanych w tym dniu), natomiast drugiego dnia Ania rozwiązała $\frac{1}{5} \cdot 20 = 4$ zadania kodowane.

Wobec tego wszystkich zadań kodowanych jest w tym zestawie $15 + 4 = 19$.

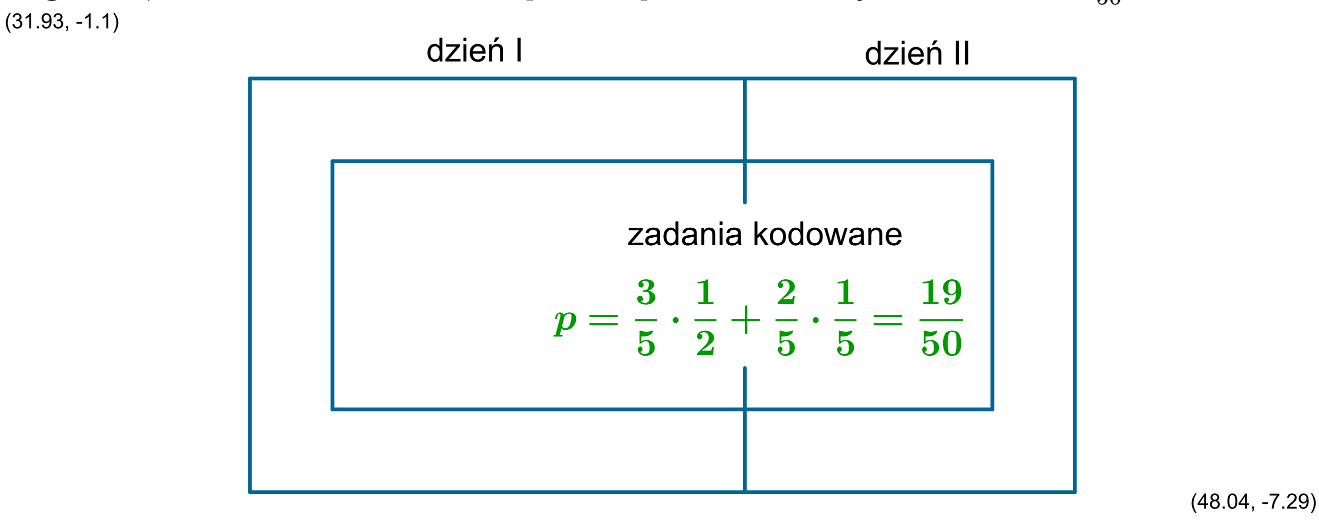
Mamy model klasyczny (zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne), co oznacza, że szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$p = \frac{19}{50}.$$

- sposób II:

Zauważmy, że połowa z $\frac{3}{5}$ wszystkich zadań to zadania kodowane rozwiązane przez Anię pierwszego dnia, a $\frac{1}{5}$ z $\frac{2}{5}$ wszystkich zadań to zadania kodowane rozwiązane przez Anię drugiego dnia.

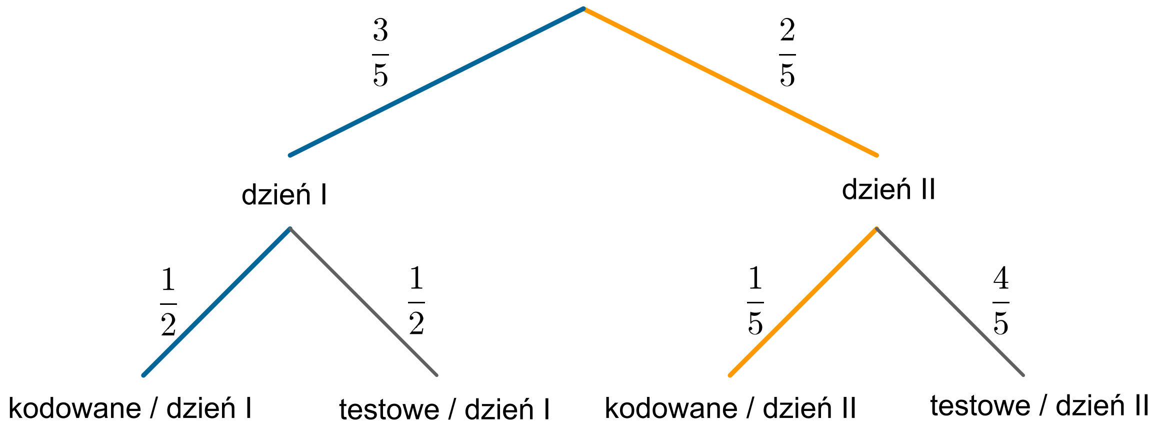
Zatem zadania kodowane stanowią $\frac{19}{50}$ wszystkich zadań (jak to jest pokazane na diagramie), co oznacza, że szukane prawdopodobieństwo jest równe $p = \frac{19}{50}$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przebieg omawianego doświadczenia można też przedstawić schematycznie w postaci drzewa. Rozróżnimy dwa etapy: (1) wybór dnia, w którym zadanie zostało rozwiązane, (2) wybór typu zadania rozwiązanego w danym dniu.

Na rysunku poniżej pogrubioną linią zaznaczyliśmy gałęzie odpowiadające wynikom: wylosowano zadanie kodowane rozwiązane pierwszego dnia (na niebiesko), wylosowano zadanie kodowane rozwiązane drugiego dnia (na pomarańczowo).



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na każdej gałęzi zapisaliśmy też, jakie jest prawdopodobieństwo wyboru danej opcji na konkretnym etapie doświadczenia.

Zbierając te informacje, zauważymy zasadę, według której obliczamy szukane prawdopodobieństwo, idąc po każdej z pogrubionych gałęzi. Obliczamy iloczyn prawdopodobieństw zdarzeń z kolejnych etapów, a następnie obliczamy sumę uzyskanych iloczynów:

$$p = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}.$$

Stąd

$$p = \frac{19}{50}.$$

W kolejnym przykładzie pokażemy, jak umiejętności związane z obliczaniem prawdopodobieństwa można wykorzystać do analizowania informacji, jakimi jesteśmy zasypywani przez media wykorzystywane przez reklamodawców.

Przykład 15

Statystyki pokazują, że w pewnym kraju 1 osoba na 1000 jest nosicielem pewnego groźnego wirusa. Firma XMed ogłosiła, że opracowała badanie pozwalające skutecznie rozpoznać nosicielstwo tego wirusa. Przedstawiciele tej firmy przypominają, że nosiciel wirusa może stać się źródłem zakażenia dla osób przebywających w jego otoczeniu i wrażliwych na infekcje, dlatego też wykrywanie oraz leczenie nosicieli wirusów jest społecznie pożądane. Podano przy tym, że po przeprowadzeniu badania opracowanego przez XMed wirus zostanie prawidłowo wykryty u nosiciela w $99,9\%$ przypadków, a w 99% przypadków da się jednoznacznie określić, że badana osoba nie jest nosicielem wirusa.

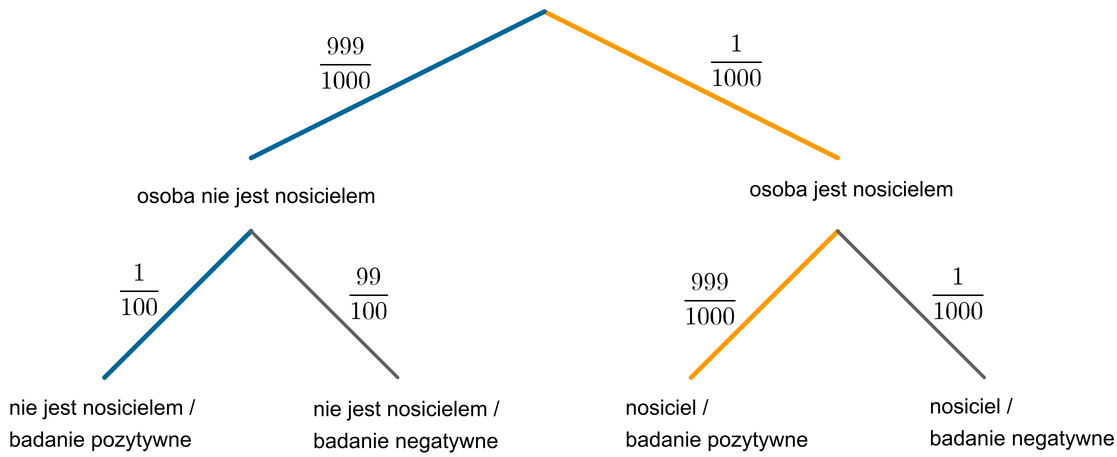
Ustalimy, czy na podstawie tych danych jesteśmy w stanie ocenić skuteczność badania opracowanego przez XMed.

W tym celu obliczymy najpierw, jakie jest prawdopodobieństwo, że badanie opracowane przez XMed wykryje nosicielstwo.

Załóżmy, że wybieramy losowo obywatela tego kraju. Z treści zadania wynika, że

- prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy nosiciela wirusa, jest równe $\frac{1}{1000}$,
- prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy osobę, która nie jest nosicielem wirusa, jest równe $\frac{999}{1000}$,
- prawdopodobieństwo tego, że w wyniku badania wirus zostanie wykryty u nosiciela, jest równe $\frac{999}{1000}$,
- prawdopodobieństwo tego, że w wyniku badania wirus zostanie wykryty u osoby, która nie jest nosicielem, jest równe $\frac{1}{100}$.

Zapiszmy te prawdopodobieństwa na drzewku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wobec tego prawdopodobieństwo p zdarzenia, że badanie wykryje nosicielstwo, jest równe

$$p = \frac{1}{1000} \cdot \frac{999}{1000} + \frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{999}{1000} + \frac{999}{1000} \cdot \frac{10}{1000} = \frac{999 \cdot (1+10)}{1000 \cdot 1000} =$$

$$= \frac{999 \cdot 11}{1000 \cdot 1000} = 0,01098\ldots \approx 0,011.$$

Zatem o nosicielstwie dowiaduje się po badaniu średnio jedenaście osób na tysiąc.

Postawmy się w sytuacji osoby, która po badaniu otrzymała informację, że jest nosicielem wirusa. Ustalimy, na ile ta informacja jest wiarygodna – w tym celu obliczymy, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że osoba, która na podstawie badania została uznana za nosiciela, jest rzeczywiście nosicielem wirusa.

Załóżmy, że kraj opisany w treści zadania ma milion mieszkańców. Wtedy na podstawie danych z treści zadania 1000 z nich to nosiciele wirusa, a 999000 to osoby, które nie są nosicielami.

W wyniku badania przeprowadzonego przez XMed:

999 z 1000 nosicieli dowie się o tym fakcie (wirus zostanie prawidłowo wykryty u nosiciela w $99,9\%$ przypadków),

9990 spośród 999000 pozostałych osób również zostanie zdiagnozowanych jako nosiciele wirusa (w 99% przypadków da się jednoznacznie określić, że badana osoba nie jest nosicielem wirusa), a przecież żadna z nich nosicielem nie jest.

Dyskwalifikująca dla skuteczności tego badania jest jednak proporcja tych dwóch grup osób, które otrzymały informację o nosicielstwie: jest wśród nich 10 razy więcej osób, które nie są nosicielami wirusa!

Wobec tego prawdopodobieństwo zdarzenia, że osoba, która w wyniku badania firmy XMed dowie się o nosicielstwie jest rzeczywiście nosicielem wirusa, jest równe $\frac{1}{11}$. To zdecydowanie za mało, żeby uznać to badanie za skuteczne.

Ćwiczenie 1

W pewnej klasie jest 3 razy więcej chłopców niż dziewcząt. Losujemy jedną osobę z tej klasy. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dziewczynki. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $\frac{3}{7}$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{3}{4}$
- $\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo p otrzymania liczby podzielnej przez 5. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $p < \frac{1}{6}$
- $p > \frac{1}{5}$
- $p = \frac{1}{5}$
- $p = \frac{1}{6}$

Ćwiczenie 3

Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby o sumie cyfr równej 16. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $\frac{3}{89}$
- $\frac{1}{30}$
- $\frac{1}{16}$
- $\frac{16}{90}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym dwukrotnie otrzymamy liczbę oczek mniejszą od 3. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $\frac{1}{9}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{18}$
- $\frac{2}{9}$

Ćwiczenie 5

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo p wylosowania pary liczb, których iloczyn jest podzielny przez 7. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $p = \frac{1}{4}$
- $p = \frac{15}{64}$
- $p = \frac{7}{64}$
- $p = \frac{7}{32}$

Ćwiczenie 6

Rzucamy 3 razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo p zajścia zdarzenia, w którym dokładnie raz wyrzucimy orła. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $p = \frac{1}{3}$
- $p = \frac{1}{8}$
- $p = \frac{3}{8}$
- $p = \frac{1}{4}$

Ćwiczenie 7

Załóżmy, że w pewnym doświadczeniu losowym dane jest zdarzenie A, ponadto A' jest zdarzeniem przeciwnym do A oraz zachodzi równość $2 \cdot P(A) = 3 \cdot P(A')$. Oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $\frac{2}{3}$
- $\frac{2}{5}$
- $\frac{3}{5}$
- $\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 8

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia, w którym otrzymamy sumę oczek podzielną przez 7 lub przez 11. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{18}$
- $\frac{1}{9}$
- $\frac{2}{9}$

Ćwiczenie 9

W każdym z dziewięciu pojemników znajduje się para kul: jedna biała, a druga – czerwona. Z każdego z tych dziewięciu pojemników losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo p wylosowania takiej samej ilości kul białych i czerwonych. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $p = \frac{5}{32}$
- $p > \frac{5}{32}$
- $p = \frac{1}{5}$
- $p < \frac{1}{5}$

Ćwiczenie 10

W pewnej klasie stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy $7 : 11$. Losujemy osiem osób z tej klasy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwie z nich urodziły się w tym samym dniu tygodnia?

- więcej od $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$
- mniej od $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 11

W pudełku znajduje się 17 kul, ponumerowanych od 1 do 17. Z tego pudełka losujemy jedną kulę. Przeciągnij liczbę w puste pole, aby otrzymać prawdziwe zdanie.

Prawdopodobieństwo otrzymania kuli z numerem podzielnym przez 5 wynosi _____.

Prawdopodobieństwo otrzymania kuli z nieparzystym numerem dwucyfrowym wynosi _____.

$\frac{4}{17}$ $\frac{10}{17}$ $\frac{11}{17}$ $\frac{5}{17}$ $\frac{14}{17}$ $\frac{8}{17}$ $\frac{13}{17}$ $\frac{7}{17}$ $\frac{1}{17}$ $\frac{6}{17}$ $\frac{16}{17}$ $\frac{9}{17}$ $\frac{2}{17}$ $\frac{15}{17}$ $\frac{17}{17}$ $\frac{3}{17}$ $\frac{12}{17}$

Ćwiczenie 12

W pudełku znajduje się 130 losów, wśród których jest pewna liczba wygrywających. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierając z tego pudełka jeden los, wyciągniemy los wygrywający, jest równe $\frac{1}{26}$. Ile losów pustych jest w tym pudełku? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- 25
- 125
- 105
- 5

Ćwiczenie 13

Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 39, 40\}$ dodatnich liczb całkowitych, które nie są większe od 40, wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo p dla podanych przypadków. Połącz w pary zdanie z odpowiednim prawdopodobieństwem p.

Prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 7.	$p = \frac{29}{40}$
Prawdopodobieństwo otrzymania liczby, która nie dzieli się przez 4.	$p = \frac{31}{40}$
Prawdopodobieństwo otrzymania liczby mniejszej od 30.	$p = \frac{1}{8}$
Prawdopodobieństwo otrzymania liczby dwucyfrowej.	$p = \frac{3}{4}$

Ćwiczenie 14

W auli pewnej szkoły wszyscy uczniowie klas trzecich będą pisać próbny egzamin maturalny. Na liście egzaminowanych jest: 36 uczniów klasy $3a$, w tym 16 dziewczynek, 35 uczniów klasy $3b$, w tym 14 dziewczynek, 31 uczniów klasy $3c$, w tym 12 dziewczynek oraz 38 uczniów klasy $3d$, w tym 35 dziewczynek. Dla każdego ucznia przygotowano jeden stolik, a stoliki ponumerowano kolejnymi liczbami, zaczynając od 1. Przed wejściem do auli uczniowie mają losować numer stolika, przy którym będą pisali ten próbny egzamin. Przeciągnij liczbę w puste pole, aby otrzymać prawdziwe zdanie.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że numer 1 wylosuje:

- osoba z klasy $3a$ wynosi ____.
- osoba z klasy $3b$ lub z klasy $3c$ wynosi ____.
- dziewczynka z klasy $3d$ wynosi ____.
- chłopiec wynosi ____.

$\frac{9}{20}$ $\frac{26}{35}$ $\frac{9}{35}$ $\frac{33}{70}$ $\frac{11}{20}$ $\frac{37}{70}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

Ćwiczenie 15

Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo p dla podanych przypadków. Połącz w pary zdanie z odpowiednim prawdopodobieństwem p.

Prawdopodobieństwo wylosowania liczby, której suma cyfr jest parzysta.	$p = \frac{1}{2}$
Prawdopodobieństwo wylosowania liczby, której suma cyfr jest mniejsza niż 17.	$p = \frac{13}{18}$
Prawdopodobieństwo wylosowania liczby, której iloczyn cyfr jest parzysty.	$p = \frac{2}{45}$
Prawdopodobieństwo wylosowania liczby, której iloczyn cyfr jest równy 24.	$p = \frac{29}{30}$

Ćwiczenie 16

100 uczniów klas trzecich brało udział w balu studniówkowym. Na początku tej imprezy zaplanowane były dwa tańce: polonez i walc. Poloneza zatańczyło 60 osób, natomiast walca zatańczyło 90 osób. Wiadomo też, że oba te tańce klasyczne zatańczyły 53 osoby. Jaką wartość przyjmuje prawdopodobieństwo p zdarzenia, polegającego na tym, że osoba wybrana losowo spośród uczestników balu nie zatańczyła żadnego z tych dwóch tańców? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- ◯ $p = \frac{37}{100}$
- ◯ $p = \frac{3}{100}$
- ◯ $p = \frac{10}{100}$
- ◯ $p = \frac{7}{100}$

Ćwiczenie 17

W klasie trzeciej jest 35 uczniów. W każdy piątek, w dodatkowych zajęciach z matematyki bierze udział 30 z nich, a w każdy wtorek 17 uczniów tej klasy bierze udział w dodatkowych zajęciach z geografii. Wiadomo też, że 4 spośród uczniów tej klasy nie bierze udziału w żadnym z tych dwóch dodatkowych rodzajów zajęć. Jaką wartość przyjmuje prawdopodobieństwo p zdarzenia, polegającego na tym, że osoba wybrana losowo spośród uczniów tej klasy bierze udział zarówno w dodatkowych zajęciach z geografii, jak i z matematyki? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- ◯ $p = \frac{17}{35}$
- ◯ $p = \frac{14}{31}$
- ◯ $p = \frac{16}{35}$
- ◯ $p = \frac{13}{31}$

Ćwiczenie 18

W pewnym doświadczeniu losowym dane jest zdarzenie A, natomiast A' jest zdarzeniem przeciwnym do A. Przeciągnij liczbę w puste pole, aby otrzymać prawdziwe zdanie.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A dla $P(A) = 4 \cdot P(A')$ wynosi $P(A) =$ ______.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A dla $2 \cdot P(A') = 7 \cdot P(A)$ wynosi $P(A) =$ ______.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A dla $P(A) = P(A') + \frac{3}{17}$ wynosi $P(A) =$ ______.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A dla $3 \cdot P(A) + 7 \cdot P(A') = 5\frac{2}{5}$ wynosi $P(A) =$ ______

.

$\frac{7}{17}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{4}{17}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{10}{17}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{9}$

Ćwiczenie 19

W pewnym doświadczeniu losowym A i B są zdarzeniami, A’ jest zdarzeniem przeciwnym do A, B’ jest zdarzeniem przeciwnym do B.

1. Jaka wartość prawdopodobieństwa odpowiada $P(A \cup B)$, wiedząc, że zdarzenia A i B są rozłączne oraz $P(A') = \frac{3}{4}$, $P('B) = 0,61$? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $P(A \cup B) = 0,39$
- $P(A \cup B) = 0,64$
- $P(A \cup B) = 0,25$
- $P(A \cup B) = 0,36$

2. Jaka wartość prawdopodobieństwa odpowiada $P(A \cap B)$, jeśli $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A') = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{3}{4}$? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $P(A \cup B) = \frac{4}{12}$
- $P(A \cup B) = \frac{3}{12}$
- $P(A \cup B) = \frac{1}{12}$
- $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$

Ćwiczenie 20

W kopercie znajduje się 10 kartek, ponumerowanych od 1 do 10. Z tej koperty losujemy dwa razy po jednej kartce ze zwracaniem. Przeciągnij liczbę w puste pole, aby otrzymać prawdziwe zdanie.

Prawdopodobieństwo otrzymania dwóch kartek o różnych numerach wynosi ______.

Prawdopodobieństwo otrzymania takich dwóch kartek, że iloraz numeru na pierwszej kartce przez numer na drugiej kartce jest liczbą całkowitą wynosi ______.

$\frac{27}{100}$ $\frac{9}{100}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{81}{100}$ $\frac{81}{100}$

Ćwiczenie 21

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Przeciągnij liczbę w puste pole, aby otrzymać prawdziwe zdanie.

Prawdopodobieństwo p zdarzenia, że:

- największa wyrzucona liczba oczek jest równa 1 lub 2, lub 3 wynosi ______.
- największa wyrzucona liczba oczek jest równa 5 wynosi ______.

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{6}$

Ćwiczenie 22

Losujemy dwa wierzchołki spośród wszystkich wierzchołków siedmiokąta foremnego. Jaką wartość przyjmuje prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy w ten sposób końce pewnej przekątnej tego wielokąta? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- ◯ $p = \frac{3}{7}$
- ◯ $p = \frac{2}{3}$
- ◯ $p = \frac{1}{3}$
- ◯ $p = \frac{2}{7}$

Ćwiczenie 23

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo dla podanych przypadków. Połącz w pary zdanie z odpowiednim prawdopodobieństwem.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest o 2 lub o 3 mniejsza od drugiej.	$P(A) = \frac{29}{121}$
Prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, których suma kwadratów jest podzielna przez 3.	$P(A) = \frac{17}{121}$
Prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, których iloczyn jest podzielny przez 10.	$P(A) = \frac{9}{121}$
Prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, których suma jest podzielna przez 7.	$P(A) = \frac{17}{121}$

Ćwiczenie 24

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo takiego zdarzenia A, że w pierwszym rzucie wypadnie liczba oczek większa niż w drugim i iloczyn liczb wyrzuconych oczek będzie podzielny przez 4? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $\frac{3}{6}$
- $\frac{4}{6}$
- $\frac{2}{6}$
- $\frac{1}{6}$

Ćwiczenie 25

Z pojemnika, w którym jest 20 losów: 3 wygrywające oraz 17 pustych, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo p zdarzenia, w którym oba wylosowane losy będą wygrywające. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $p = \frac{2}{19}$
- $p = \frac{3}{19}$
- $p = \frac{2}{20}$
- $p = \frac{3}{190}$

Ćwiczenie 26

W kopercie jest 15 kartek ponumerowanych liczbami od 1 do 15. Z tej koperty losujemy jednocześnie dwie kartki. Oblicz prawdopodobieństwo dla podanych przypadków. Przeciągnij liczbę w puste pole, aby otrzymać prawdziwe zdanie.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A, że iloczyn liczb na wylosowanych kartkach jest nieparzysty wynosi ______.

Prawdopodobieństwo zdarzenia B, że suma liczb na wylosowanych kartkach jest nieparzysta wynosi ______.

$\frac{2}{15}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{8}{15}$ $\frac{5}{15}$ $\frac{7}{15}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{6}{15}$

Ćwiczenie 27

W klasie jest 35 uczniów, przy czym chłopców jest o 3 mniej niż dziewczynek. Losujemy dwie osoby z tej klasy. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród wylosowanych osób będzie co najmniej jedna dziewczynka? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $p = \frac{24}{35}$
- $p = \frac{152}{595}$
- $p = \frac{24}{119}$
- $p = \frac{95}{119}$

Ćwiczenie 28

W talii 52 kart do brydża jest po 13 kart w każdym z czterech kolorów: trefl, karo, kier, pik. W każdym kolorze jest jeden as, a także trzy figury: król, dama, walet oraz kart numerowanych od 2 do 10. Z takiej talii 52 kart losujemy dwa razy po jednej karcie bez zwracania. Jaki jest prawdopodobieństwo p zdarzenia, że obie wylosowane karty będą figurami? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $p = \frac{43}{221}$
- $p = \frac{57}{221}$
- $p = \frac{28}{221}$
- $p = \frac{11}{221}$

Ćwiczenie 29

W pudełku znajdują się kule, przy czym co dziesiąta z nich jest biała, a każda z pozostałych ma kolor czerwony lub kolor zielony. Przy losowaniu jednej kuli z tego pudełka prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej lub zielonej jest trzy razy większe niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej lub białej. Jaką wartość przyjmie prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że przy losowaniu jednej kuli z tego pudełka wylosujemy kulę zieloną? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $p = \frac{1}{10}$
- $p = \frac{3}{10}$
- $p = \frac{7}{10}$
- $p = \frac{7}{10}$

Ćwiczenie 30

Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A – dokładnie raz wypadnie szóstka? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- ◯ $P(A) = \frac{3}{216}$
- ◯ $P(A) = \frac{1}{3}$
- ◯ $P(A) = \frac{25}{72}$
- ◯ $P(A) = \frac{1}{216}$

Ćwiczenie 31

W kopercie jest 5 kartek ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do 5. Losujemy z tej koperty po kolei 5 kartek, a wyniki kolejnych losowań notujemy jeden za drugim, zapisując w ten sposób liczbę pięciocyfrową. Przeciągnij liczbę w puste pole, aby otrzymać prawdziwe zdanie.

Prawdopodobieństwo, że w wyniku takiego postępowania zapiszemy liczbę, w której:

1. suma każdych dwóch sąsiednich cyfr będzie nieparzysta wynosi ______.
2. cyfry 1 oraz 2 będą zapisane na sąsiednich miejscach wynosi ______.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{5}$

Ćwiczenie 32

Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Rozstrzygnij, które zdarzenie jest wtedy bardziej prawdopodobne: A – wypadła suma oczek równa 11 czy B – wypadła suma oczek równa 12. Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- ◯ Zdarzenie B jest bardziej prawdopodobne.
- ◯ Zdarzenie A jest bardziej prawdopodobne.

Ćwiczenie 33

W pewnej grze losowej zakreślamy 6 liczb wybranych ze zbioru $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 49\}$. Wybrane liczby są następnie porównywane z sześcioma wylosowanymi z tego samego zbioru przez maszynę losującą. Ile wynosi prawdopodobieństwo p tego, że zakreślając 6 liczb trafisz główną wygraną, czyli prawidłowo wytypujesz wszystkie 6 wylosowanych numerów? Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- $p=\frac{1}{12683827}$
- $p=\frac{1}{14733824}$
- $p=\frac{1}{13983816}$
- $p=\frac{1}{12404451}$