



Ekstremum funkcji kwadratowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: 132369, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Znajdowanie ekstremów funkcji już od dziesięcioleci jest istotną częścią pracy naukowców z różnych dziedzin, m.in. z ekonomii, fizyki czy statystyki.

Teoria ekstremów okazuje się być bardzo przydatnym narzędziem w technice i statystyce, a także w odniesieniu do zagadnień optymalizacyjnych. Większość problemów, z którymi borykają się współcześni badacze prędzej czy później sprowadza się do znalezienia ekstremum funkcji istotnej dla zadania. Maksymalizowanie pola przy zadanym obwodzie danej figury płaskiej (np. prostokąta) jest przykładem problemu, który rozwiązujemy przy wykorzystaniu ekstremum funkcji kwadratowej.

Twoje cele

- Wyznaczysz ekstremum funkcji kwadratowej.
- Zastosujesz postać kanoniczną funkcji kwadratowej do określania współrzędnych wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji.
- Określisz zależność między znakiem współczynnika a w postaci ogólnej funkcji kwadratowej, a charakterem ekstremum.

Przeczytaj

Ekstrema, czyli maksima i minima, to pewne wartości przyjmowane przez rozpatrywaną funkcję. Intuicyjnie łatwo zrozumieć, czym jest minimalna i maksymalna wartość danej funkcji, jednak sformalizowanie tego pojęcia nie jest aż tak proste.

Funkcja kwadratowa posiada dokładnie jedno ekstremum w punkcie, który jest wierzchołkiem wykresu funkcji kwadratowej. Oznacza to, że nie musimy szukać ekstremum lokalnego, możemy od razu przejść do wyznaczania ekstremum globalnego funkcji.

Definicja: Maksimum, minimum globalne

Niech dana będzie funkcja rzeczywista $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Powiemy, że funkcja f osiąga **maksimum globalne** w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego punktu $x \in X$ spełniona jest nierówność

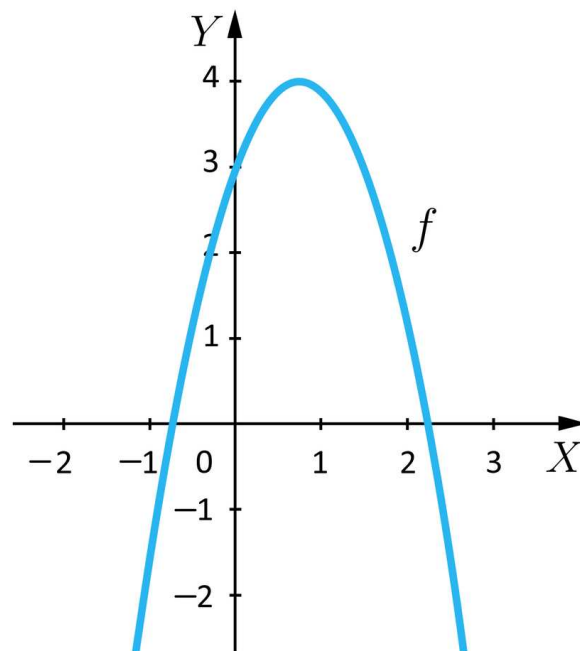
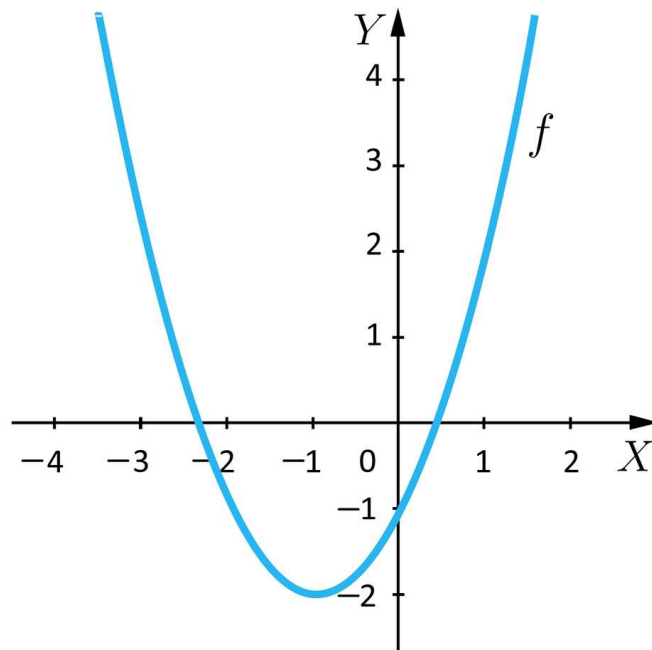
$$f(x_0) \geq f(x)$$

Analogicznie, powiemy, że funkcja f osiąga **minimum globalne** w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego punktu $x \in X$ zachodzi nierówność

$$f(x_0) \leq f(x)$$

Liczbę $f(x_0)$ nazywamy wówczas (odpowiednio) **największą** lub **najmniejszą wartością** funkcji f w zbiorze X .

Ekstrema pojawiają się w wielu problemach współczesnej nauki. W niektórych przypadkach wyznaczenie minimalnej i maksymalnej wartości dla danej funkcji jest zadaniem trudnym. W przypadku funkcji kwadratowej jest jednak inaczej, co wynika z kształtu jej wykresu tj. paraboli. Przypatrzmy się poniższym wykresom.



Każda parabola (opisywana równaniem $y = ax^2 + bx + c$) ma dokładnie jeden wierzchołek. Wierzchołek ten odpowiada największej lub najmniejszej wartości przyjmowanej przez zadaną funkcję kwadratową – charakter tego ekstremum zależy od znaku współczynnika a przy wyrażeniu x^2 .

Jak obserwujemy na wykresach, skierowane ku górze ramiona paraboli (czyli dodatni współczynnik a) przekładają się na istnienie minimum globalnego funkcji kwadratowej. W takiej sytuacji funkcja nie jest ograniczona z góry, więc nie możemy mówić o jej maksimum globalnym.

Z kolei w przypadku, gdy a ma wartość mniejszą od zera, minimum globalne nie istnieje, ale za to parabola posiada maksimum globalne. Możemy więc sformułować następującą obserwację.

Ważne!

Zwróćmy teraz uwagę na ważną obserwację.

Funkcja kwadratowa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dokładnie jedno ekstremum globalne. Jest to minimum, w sytuacji gdy $a > 0$, zaś maksimum, gdy $a < 0$.

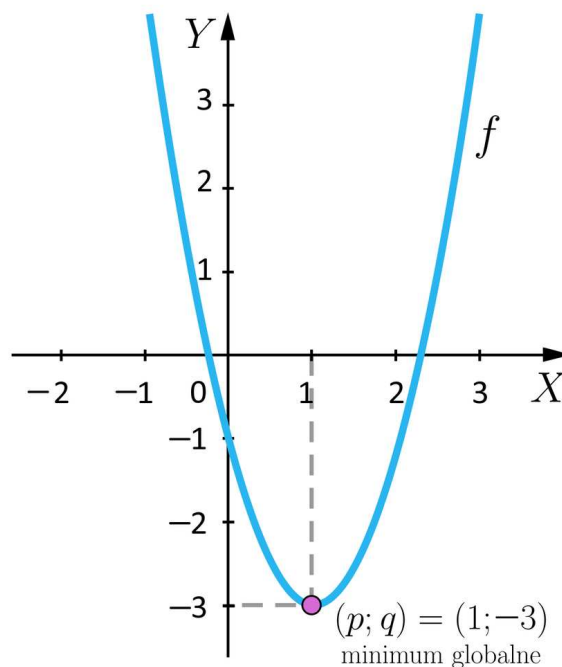
Współrzędne takiego ekstremum można wyznaczyć z postaci [kanonicznej funkcji kwadratowej](#), czyli dla $f(x) = a(x - p)^2 + q$ wierzchołek paraboli opisywanej przez wzór funkcji f znajduje się w punkcie o współrzędnych (p, q) . Oznacza to, że funkcja kwadratowa ma ekstremum globalne w punkcie p o wartości q .

Przykład 1

Wyznamy ekstremum globalne funkcji $f(x) = 2 \cdot (x - 1)^2 - 3$.

Rozwiązanie

Ponieważ $a = 2 > 0$, to funkcja ma minimum globalne w punkcie $p = 1$, wynoszące $q = f(p) = -3$.



Jeżeli wzór funkcji kwadratowej jest zapisany w [postaci iloczynowej](#), to argument, w którym znajduje się minimum (lub maksimum) globalne, jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych tej funkcji.

Twierdzenie: Ekstremum globalne

Niech dana będzie funkcja kwadratowa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem w postaci iloczynowej $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Wówczas funkcja f posiada ekstremum globalne w punkcie

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Przykład 2

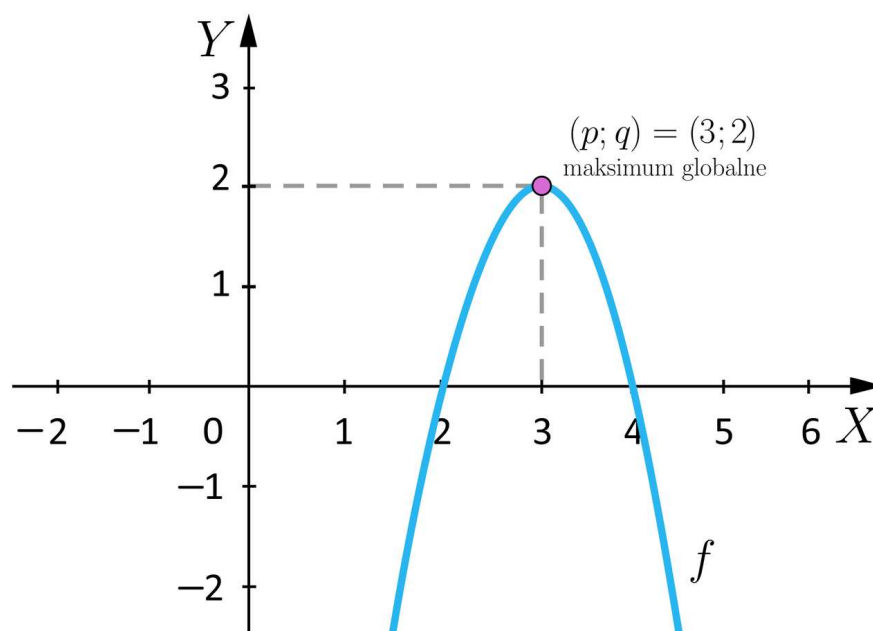
Wyznamy ekstremum globalne funkcji kwadratowej: $f(x) = -2 \cdot (x - 2)(x - 4)$.

Rozwiązanie

Ponieważ $a = -2 < 0$, to funkcja ma maksimum globalne w punkcie $p = \frac{4+2}{2} = 3$.

Największa wartość przyjmowana przez tę funkcję wynosi więc

$$q = f(3) = -2 \cdot (3 - 2)(3 - 4) = -2 \cdot 1 \cdot (-1) = 2.$$



W przypadku gdy funkcja kwadratowa jest podana w postaci ogólnej, zagadnienie znajdowania ekstremum funkcji kwadratowej sprowadza się do wyznaczenia wierzchołka opisywanej przez nią paraboli.

Twierdzenie: Wierzchołek paraboli

Niech dana będzie funkcja kwadratowa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w postaci ogólnej

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Wówczas wierzchołek paraboli opisywanej przez funkcję f znajduje się w punkcie (p, q) , gdzie p i q opisane są wzorami

$$p = \frac{-b}{2a},$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a}.$$

Przykład 3

Wyznamy ekstremum globalne funkcji $f(x) = x^2 + 4x - 2$.

Rozwiązanie

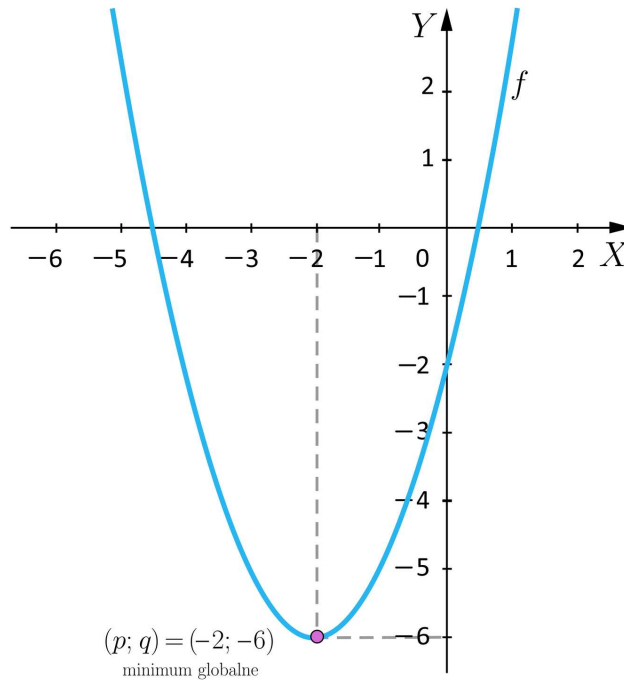
Ponieważ $a = 1 > 0$, to funkcja ma minimum lokalne w punkcie $p = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$.

Najmniejszą wartość osiąganą przez tę funkcję możemy obliczyć następująco:

$$q = f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 2 = 4 - 8 - 2 = -6$$

lub z podanego wyżej wzoru

$$q = \frac{-4^2+4 \cdot 1 \cdot (-2)}{4 \cdot 1} = \frac{-16-8}{4} = \frac{-24}{4} = -6.$$



Przykład 4

Wyznamy dla jakiej wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ funkcja f określona wzorem $f(x) = mx^2 - (m + 2)x + 5$ osiąga ekstremum dla $x = 1$. Czy jest to maksimum czy minimum?

Rozwiązanie

Zauważmy, że funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie $x = 1$ oznacza to, że

$$1 = \frac{m+2}{2m}$$

$$2m = m + 2$$

$$m = 2.$$

Wzór szukanej funkcji, to $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Ponieważ $a = 2 > 0$, to funkcja w punkcie $x = 1$ osiąga minimum lokalne.

Najmniejszą wartość osiąganą przez tą funkcję możemy obliczyć następująco:

$$f(1) = 2 - 4 + 5 = 3.$$

Do czego można wykorzystać umiejętność wyznaczania ekstremów funkcji kwadratowej?

Wyjaśniamy to na praktycznym przykładzie.

Przykład 5

Wyznamy maksymalne pole prostokąta, którego obwód wynosi 48 cm. Podamy też długości boków, przy których osiągnęto to maksymalne pole.

Rozwiązanie

Przypomnijmy wzory na pole i obwód prostokąta o bokach, których długości oznaczmy przez x i y .

$$P = x \cdot y$$

$$L = 2x + 2y$$

Podstawiamy znaną nam wartość obwodu do wzoru.

$$48 = 2x + 2y$$

Dzielimy obie strony równości przez 2.

$$24 = x + y$$

Przekształcamy równość, wyznaczając z niej wartość y .

$$y = 24 - x, x \in (0, 24)$$

Podstawiamy tak przedstawioną długość boku y do wzoru na pole prostokąta.

$$P = x \cdot (24 - x), x \in (0, 24)$$

Wartość pola rozważanego prostokąta, w zależności od długości boku x , jest wyrażona przez następującą funkcję kwadratową:

$$P = -x^2 + 24x, x \in (0, 24)$$

Ponieważ $a = -1 < 0$, to funkcja w wierzchołku osiąga największą wartość.

Wypiszemy współczynniki powyższej funkcji kwadratowej.

$$a = -1, b = 24, c = 0$$

Maksymalną wartość pola prostokąta wyznaczamy, korzystając ze wzoru na współrzędną q wierzchołka paraboli.

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-24^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = \frac{-576}{-4} = 144$$

Uzyskany wynik to 144 cm^2 . Jest to największe pole, jakie może mieć prostokąt o obwodzie 48 cm.

Obliczymy teraz długości boków prostokąta o maksymalnym polu. W tym celu wykorzystujemy wzór na współrzędną p punktu opisującego wierzchołek paraboli.

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{2 \cdot (-1)} = 12$$

Zatem $x = 12 \text{ cm}$ i $x \in (0, 24)$ jest długością boku, dla której obliczone wcześniej maksymalne pole jest osiągnięte. Długość boku y wyliczamy z zależności:

$$y = 24 - x$$

co daje:

$$y = 12$$

Wiedząc więc, że $x = y = 12 \text{ cm}$ możemy stwierdzić, że maksymalne pole powierzchni dla prostokąta o obwodzie 48 cm wynosi 144 cm^2 i jest osiągnięte przez kwadrat o boku 12 cm.

Przykład 6

Na bokach prostokąta o obwodzie 20 cm oparto cztery trójkąty równoboczne.

Wyznamy jakie powinny być długości boków trójkąta, aby pole całej figury złożonej z prostokąta i trójkątów było najmniejsze.

Rozwiązanie

Korzystając z poprzedniego przykładu wiemy, że wzory na pole i obwód prostokąta o bokach, których długości oznaczymy przez x i y , to

$$P = x \cdot y,$$

$$L = 2x + 2y.$$

Podstawiamy znaną nam wartość obwodu do wzoru.

$$20 = 2x + 2y$$

Dzielimy obie strony równości przez 2.

$$10 = x + y$$

Przekształcamy równość, wyznaczając z niej wartość x .

$$x = 10 - y, y \in (0, 10).$$

Podstawiamy tak przedstawioną długość boku x do wzoru na pole trójkąta równobocznego.

Oznaczmy:

P_1 – pole trójkąta o boku x ,

P_2 – pole trójkąta o boku y .

$$P_1 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(y-10)^2\sqrt{3}}{4},$$

$$P_2 = \frac{y^2\sqrt{3}}{4}.$$

Zatem pole całej figury będzie równe:

$$P_c = (10 - y)y + 2 \cdot \frac{y^2\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{(y-10)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_c = 10y - y^2 + \frac{1}{2} \left(y^2\sqrt{3} + (y - 10)^2\sqrt{3} \right)$$

$$P_c = (\sqrt{3} - 1)y^2 + (10 - 10\sqrt{3})y + 50\sqrt{3}, y \in (0, 10).$$

Ponieważ $a = \sqrt{3} - 1 > 0$, to funkcja w wierzchołku osiąga najmniejszą wartość.

Obliczymy długości boków prostokąta, tak aby otrzymana figura miała najmniejsze pole. W tym celu wykorzystujemy wzór na współrzędną p punktu opisującego wierzchołek paraboli.

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(10-10\sqrt{3})}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{5\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{10}{2} = 5$$

Zatem $y = 5$ cm i $y \in (0, 10)$ jest długością boku, dla którego obliczone wcześniej minimalne pole jest osiągane. Długość boku x wyliczamy z zależności:

$$x = 10 - y$$

co daje:

$$x = 5.$$

Widzimy, że boki prostokąta, dla których pole całej figury złożonej z prostokąta i trójkątów było najmniejsze, mają długości: $x = y = 5$ cm.

Słownik

wyróżnik wielomianu stopnia drugiego

liczba charakterystyczna dla funkcji kwadratowej oznaczana przez Δ ; przy zapisie funkcji w postaci:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ to wyróżnik ten zadany jest wzorem } \Delta = b^2 - 4ac$$

postać iloczynowa funkcji kwadratowej

zapis wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynu czynników liniowych; korzystanie z niego jest możliwe, gdy wyróżnik trójmianu kwadratowego jest nieujemny; dla takich funkcji zapis ten ma postać:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2), \text{ gdy } \Delta > 0, \text{ gdzie } x_1, x_2 \text{ są miejscami zerowymi funkcji } f$$

$$f(x) = a \cdot (x - x_0)^2, \text{ gdy } \Delta = 0, \text{ wówczas } x_0 \text{ jest miejscem zerowym funkcji } f$$

postać kanoniczna funkcji kwadratowej

zapis wzoru funkcji kwadratowej, w którym wyeksponowany jest wierzchołek paraboli będącej jej wykresem; funkcja przedstawiona w tej postaci opisana jest wzorem:

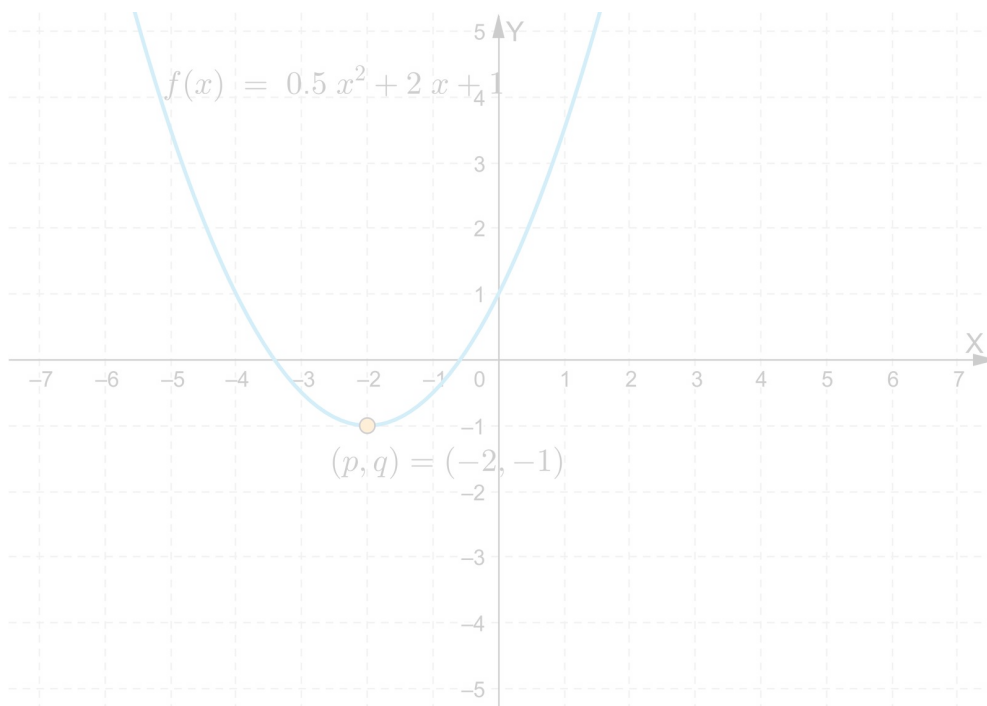
$$f(x) = a \cdot (x - p)^2 + q, \text{ gdzie } (p, q) \text{ są współrzędnymi wierzchołka paraboli;}$$

w przeciwieństwie do postaci iloczynowej, postać kanoniczna istnieje zawsze, niezależnie od wartości [wyróżnika trójmianu kwadratowego](#)

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zmieniaj wartości współczynników funkcji kwadratowej opisanej równaniem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Obserwuj, które z parametrów wpływają na położenie ekstremum, a które jedynie modyfikują przyjmowaną w tym ekstremum wartość funkcji f .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/De5QdAPEN>

Polecenie 2

Wykorzystaj symulację. Ustaw wartości współczynników a , b , c w taki sposób, by otrzymany przez Ciebie wykres odpowiadał opisanym w tabeli funkcjom kwadratowym. Następnie odczytaj współrzędne punktów, w których podane funkcje mają swoje ekstrema i wpisz w tabelę poprawne liczby.

Wzór funkcji f	Położenie ekstremum (współrzędna p wierzchołka paraboli)	Wartość ekstremum (współrzędna q wierzchołka paraboli)
$f(x) = 2x^2 + 3$		
$f(x) = -x^2 + 4x$		
$f(x) = x^2 + 2x - 2$		
$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$		
$f(x) = -x^2 - 6x - 6$		

Polecenie 3

Dla podanych funkcji kwadratowych określ, czy posiadają one minimum czy maksimum globalne. Przecignij poprawne wartości w odpowiednie miejsca.

$f(x) = 2x^2 + 4x + 1$, $f(x) = -5x^2 + 2x + 2$, $f(x) = 2 \cdot (x - 6)^2 + 4$,
 $f(x) = -(x + 7)^2 - 7$, maksimum globalne, minimum globalne, maksimum globalne,
minimum globalne

Funkcja	Ekstreмум globalne
$f(x) = 2x^2 + 4x + 1$	
$f(x) = -5x^2 + 2x + 2$	
$f(x) = 2 \cdot (x - 6)^2 + 4$	
$f(x) = -(x + 7)^2 - 7$	

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Funkcja kwadratowa zadana wzorem $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

☐ osiąga maksimum globalne dla $x = -3$.

☐ osiąga minimum globalne dla $x = -4$.

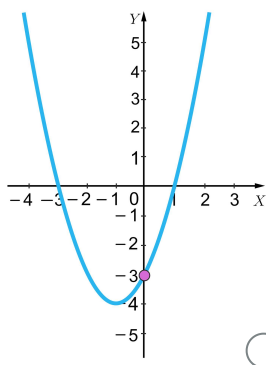
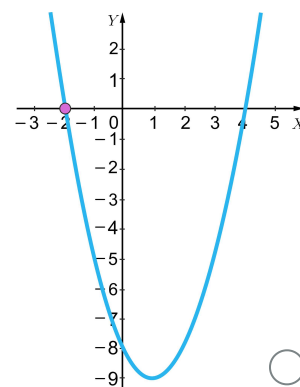
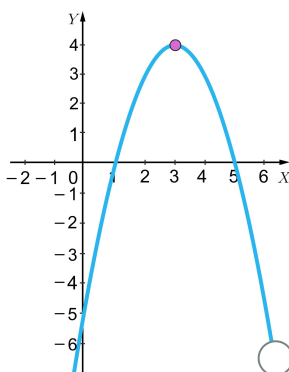
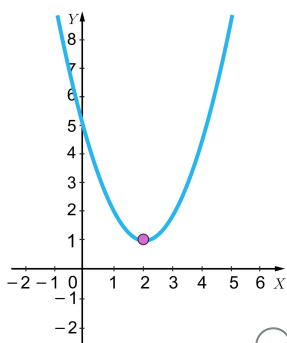
☐ osiąga minimum globalne dla $x = 3$.

☐ osiąga maksimum globalne dla $x = 3$.

Ćwiczenie 2



Który z poniższych wykresów przedstawia funkcję kwadratową z zaznaczonym jej minimum?



Ćwiczenie 3



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Jaką największą wartość może osiągnąć funkcja $f(x) = 2x^2 + 5x$?

☐ Funkcja f nie posiada maksimum.

☐ 5

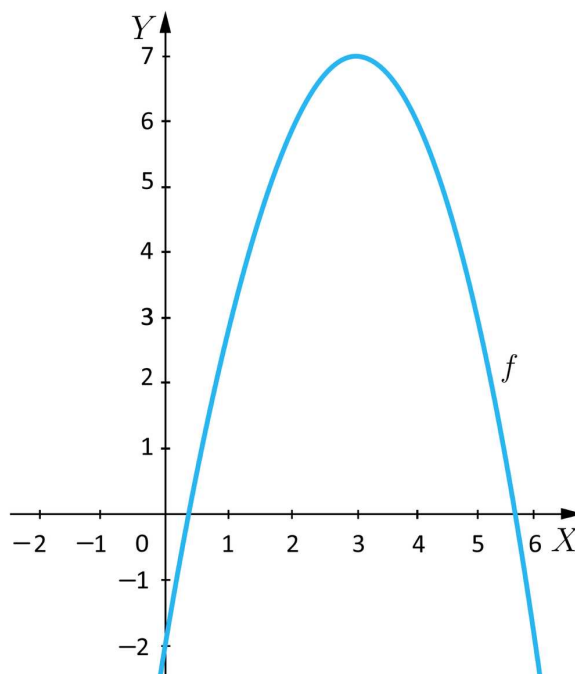
☐ 7

☐ -5

Ćwiczenie 4



Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej określ charakter jej ekstremum i wartość w nim osiąganą.



Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Maksimum, wartość 3.

☐ Minimum, wartość 7.

☐ Minimum, wartość 3.

☐ Maksimum, wartość 7.

Ćwiczenie 5



Zaznacz poprawną odpowiedź. Charakter ekstremum (tj. czy jest to minimum, czy maksimum) funkcji kwadratowej zależy od:

- ☐ wyrazu wolnego.
- ☐ znaków jej miejsc zerowych.
- ☐ delty, tj. wyróżnika tego trójmianu kwadratowego.
- ☐ liczby jej miejsc zerowych.
- ☐ współczynnika przy x^2 .

Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi. Wiadomo, że funkcja kwadratowa f ma ekstremum w punkcie $x_0 = 4$, w którym przyjmuje wartość $f(x_0) = -8$. Wówczas funkcja f może wyrażać się wzorem

- ☐ $f(x) = x^2 - 8x + 24$
- ☐ $f(x) = -x^2 + 8x - 24$
- ☐ $f(x) = (x - 4)^2 - 8$
- ☐ $f(x) = (x + 4)^2 + 8$

Ćwiczenie 7



Dla jakiej wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ funkcja f określona wzorem $f(x) = mx^2 - (m + 1)x + 7$ osiąga ekstremum dla $x = 3$?

☐ $m = \frac{3}{7}$

☐ $m = 7$

☐ $m = \frac{1}{5}$

☐ $m = 3$

Ćwiczenie 8



Trajektorię lotu piłki można opisać za pomocą wykresu funkcji $y = 2 + 4x - \frac{1}{2}x^2$. Wyznacz najwyższą wysokość, na jakiej może znaleźć się piłka w trakcie lotu.

Ćwiczenie 9



Ile wynosi największe pole, jakie może mieć prostokąt o obwodzie równym 60 dm?

Dla nauczyciela

Autor: Filip Turoboś

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ekstremum funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- znajduje ekstremum funkcji kwadratowej,
- stosuje postać kanoniczną funkcji kwadratowej do określania współrzędnych wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji,
- analizuje zależność między znakiem współczynnika a postaci ogólnej funkcji kwadratowej, a charakterem ekstremu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- praca z ekspertem.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Ekstremum funkcji kwadratowej”, przypomina podstawowe pojęcia dotyczące tematu.
2. Nauczyciel wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu i przechodzi do weryfikacji wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Eksperci przedstawiają pozostałym uczniom symulację interaktywną. Nauczyciel uzupełnia informacje i wyjaśnia wątpliwości.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-6 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych), uczniowie uzasadnienia wskazanych odpowiedzi notują w zeszytach. Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Ekstrema funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

„Symulację interaktywną” można również wykorzystać w realizacji lekcji „Ekstremum funkcji”.