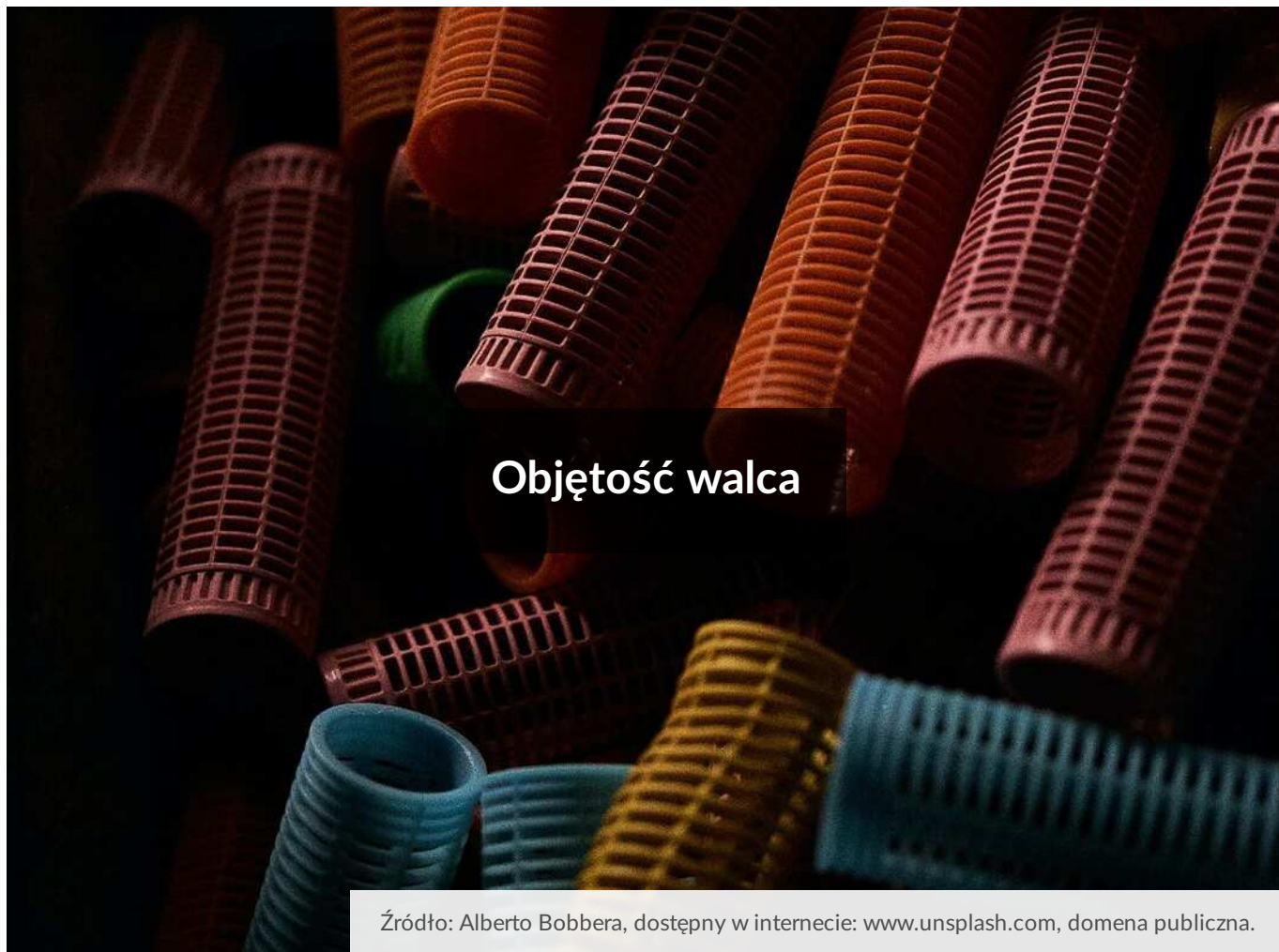




Objętość walca

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Objętość walca

Źródło: Alberto Bobbera, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Wiele przedmiotów codziennego użytku ma kształt walca. W przepisach kulinarnych często odmierzamy odpowiednie ilości składników, używając do tego szklanki w kształcie walca. Właściwa ilość dodanych składników jest ściśle powiązana z objętością takiej szklanki. W materiale omówimy, jak obliczyć objętość walca. Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Twoje cele

- Określisz wzór na objętość walca.
- Obliczysz promień podstawy walca, gdy dana jest jego objętość oraz wysokość.
- Wyznaczysz wysokość walca, gdy dana jest jego objętość oraz promień podstawy.
- Wykorzystasz poznany wzór do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję walca.

Definicja: Walec

Walcem nazywamy bryłę obrotową, która powstaje przez obrót prostokąta wokół osi zawierającej jeden z jego boków.

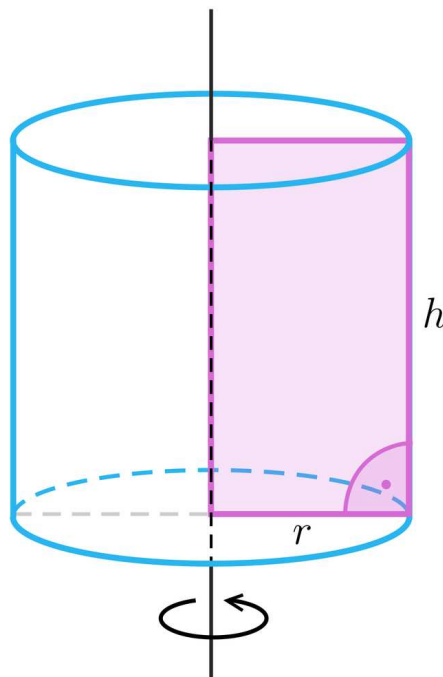
Już wiesz

Pole powierzchni całkowitej walca o promieniu podstawy r i wysokości h obliczamy ze wzoru

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Objętość walca

Niech r będzie długością promienia podstawy walca, a h jego wysokością.



Wówczas objętość **walca** obliczamy ze wzoru

$$V = P_p \cdot h.$$

Ponieważ podstawa walca jest kołem, zatem objętość walca obliczamy ze wzoru

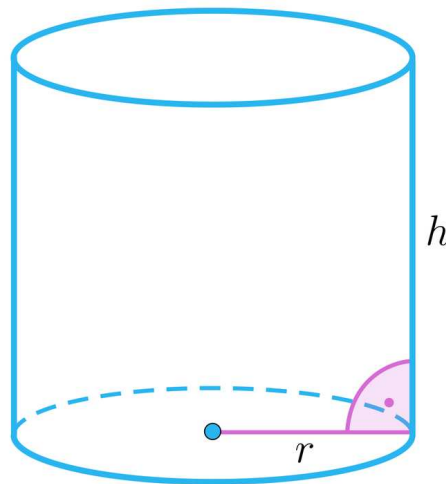
$$V = \pi r^2 \cdot h.$$

Przykład 1

Wiadomo, że pole powierzchni całkowitej walca wynosi $24\pi + 16\sqrt{3}\pi$, a promień podstawy walca ma długość $2\sqrt{3}$. Obliczmy objętość tego walca.

Rozwiązanie

Narysujmy walec i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Ponieważ promień podstawy walca $r = 2\sqrt{3}$ a pole powierzchni całkowitej walca obliczamy ze wzoru $P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, to do wyznaczenia długości wysokości h walca rozwiązujemy równanie:

$$24\pi + 16\sqrt{3}\pi = 2\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 + 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot h$$

$$24 + 16\sqrt{3} = 2 \cdot 12 + 4\sqrt{3} \cdot h$$

$$16\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot h, \text{ czyli } h = 4.$$

Wobec tego objętość walca wynosi:

$$V = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 48\pi.$$

Przykład 2

Obliczmy, o ile procent zwiększyła się objętość walca, w którym promień podstawy oraz wysokość zwiększono o 10%.

Rozwiązanie

Jeżeli r jest długością promienia podstawy walca a h jego wysokością, to objętość walca wyraża się wzorem:

$$V = \pi r^2 \cdot h.$$

Jeżeli długości promienia podstawy oraz wysokości walca zwiększymy o 10%, wówczas wielkości te będą wynosiły odpowiednio $1,1r$ oraz $1,1h$.

Zatem objętość walca będzie wynosiła

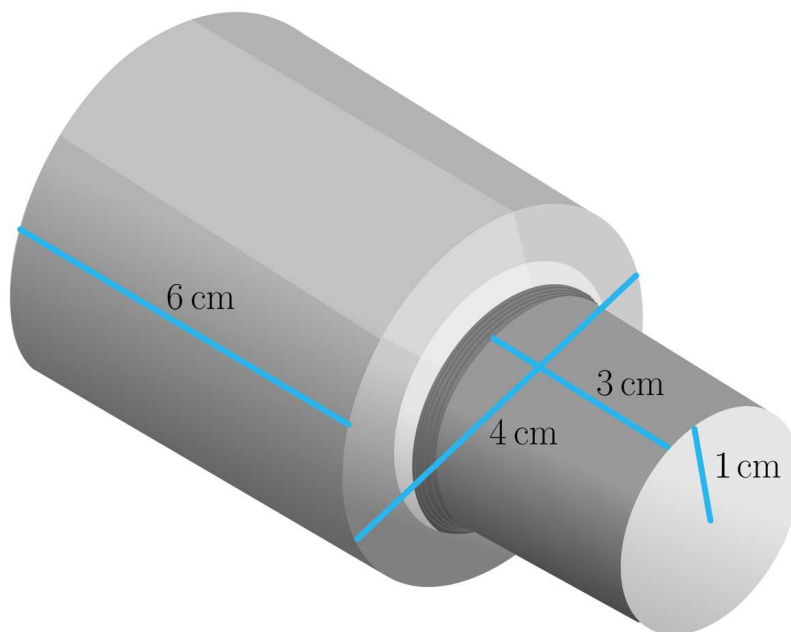
$$V = \pi \cdot (1,1r)^2 \cdot 1,1h = 1,331\pi r^2 \cdot h = 133,1\% \cdot \pi r^2 \cdot h.$$

Wobec tego objętość walca zwiększyła się o:

$$133,1\% - 100\% = 33,1\%.$$

Przykład 3

Śruba wykonana z mosiądzu ma kształt bryły przedstawionej na poniższym rysunku. Obliczymy masę tej śruby, jeżeli wiadomo, że 1 cm^3 stopu waży 8,5 g. W obliczeniach przyjmujemy, że $\pi = 3,14$.



Rozwiązanie

Zauważmy, że bryła z rysunku zbudowana jest z dwóch walców.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

r_1 – długość promienia mniejszego walca,

r_2 – długość promienia większego walca,

h_1 – długość wysokości mniejszego walca,
 h_2 – długość wysokości większego walca.

Z rysunku odczytujemy, że:

$$r_1 = 1 \text{ cm},$$

$$h_1 = 3 \text{ cm},$$

$$r_2 = 2 \text{ cm},$$

$$h_2 = 6 \text{ cm}.$$

Zatem **objętość bryły** wynosi:

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 + \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 3\pi + 24\pi = 27\pi = 27 \cdot 3,14 = 84,78 \text{ cm}^3.$$

Zatem masa tej śruby wynosi:

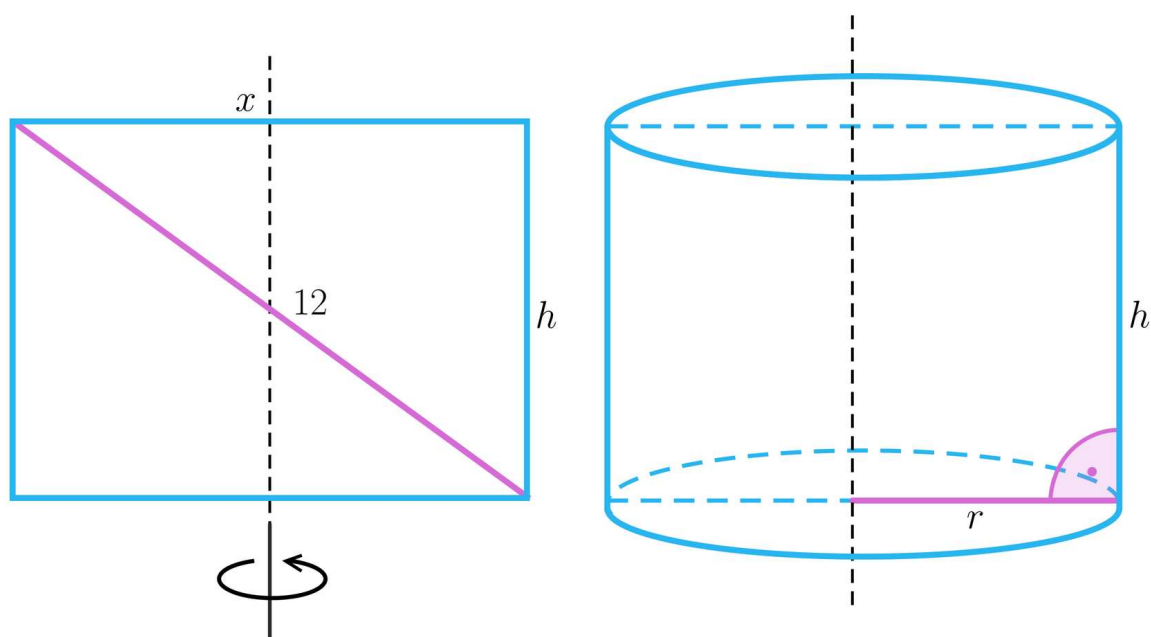
$$84,78 \text{ g} \cdot 8,5 \text{ g} = 720,63 \text{ g}.$$

Przykład 4

Prostokąt o boku długości 6 i przekątnej długości 12 obracamy wokół osi przechodzącej przez środki dłuższych boków. Obliczymy objętość otrzymanego walca.

Rozwiązanie

Narysujmy prostokąt oraz otrzymany **walec**, jak na poniższych rysunkach.



Jeżeli przez x oznaczymy długość drugiego boku prostokąta, to do wyznaczenia wartości x rozwiązujemy równanie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 + 6^2 = 12^2$$

$$x^2 + 36 = 144$$

$$x^2 = 108$$

$$x = 6\sqrt{3}.$$

Jeżeli r jest długością promienia podstawy walca, to $r = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, a wysokość walca $h = 6$.

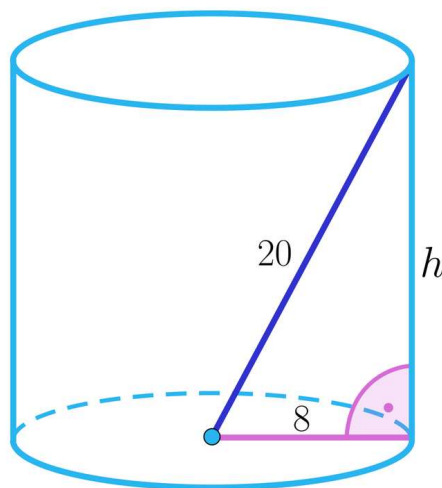
Zatem objętość walca jest równa:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot (3\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 162\pi.$$

Przykład 5

Obliczmy objętość walca z poniższego rysunku.



Rozwiązanie

Z rysunku odczytujemy, że promień podstawy $r = 8$.

Do wyznaczenia długości wysokości h wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa:

$$8^2 + h^2 = 20^2$$

$$64 + h^2 = 400$$

$$h^2 = 336$$

$$h = 4\sqrt{21}.$$

Wobec tego objętość bryły z rysunku wynosi:

$$V = \pi \cdot 8^2 \cdot 4\sqrt{21} = 256\pi\sqrt{21}.$$

Słownik

walec

bryła obrotowa, która powstaje przez obrót prostokąta wokół osi zawierającej jeden z jego boków

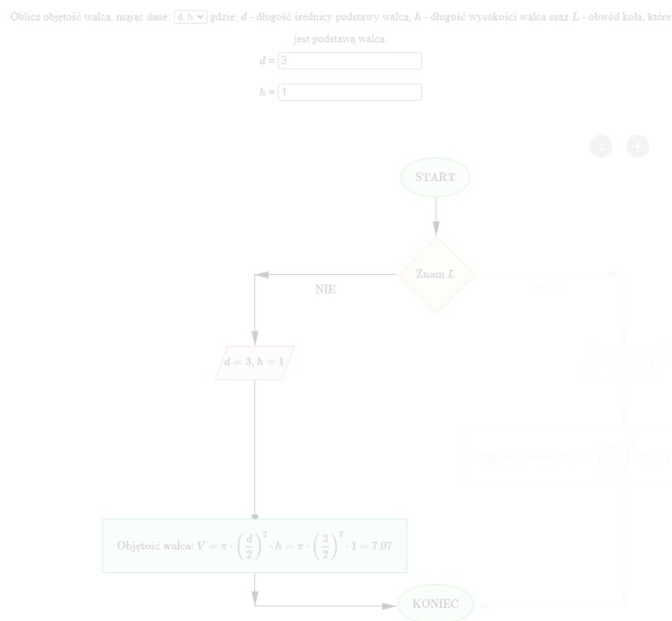
objętość bryły

ilość sześciątów jednostkowych, jakimi można wypełnić daną bryłę

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Zapoznaj się ze schematem interaktywnym, a następnie wykonaj poniższe polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DTtRtgN6s>

Polecenie 2

Oblicz objętość walca, otrzymanego w wyniku obrotu prostokąta wokół krótszego boku, jeżeli długości boków oraz przekątna tego prostokąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 3.

Polecenie 3

Zbuduj algorytm obliczający objętość walca, mając dane: d – długość średnicy podstawy walca i h – długość wysokości walca lub L – obwód koła, które jest podstawą walca i h – długość wysokości walca.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Jeżeli objętość walca V obliczamy ze wzoru $V = \pi r^2 h$, gdzie r jest długością promienia podstawy walca, a h jego wysokością, to:

☐ $h = \sqrt{\frac{V}{\pi r}}$

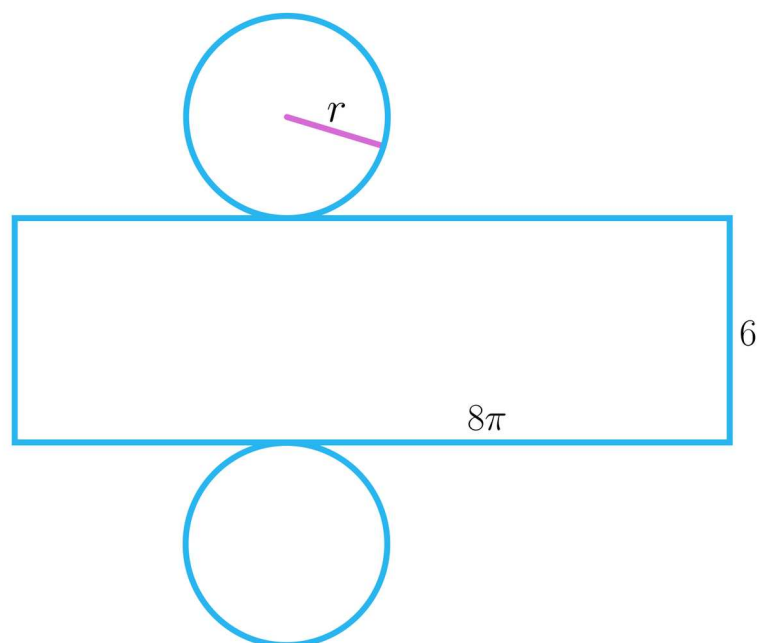
☐ $r = \sqrt{\frac{\pi h}{V}}$

☐ $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono siatkę pewnego walca. Zaznacz zdania, które są prawdziwe.



☐ Objętość walca wynosi 96π .

☐ Pole podstawy walca wynosi 16π .

☐ Pole podstawy walca wynosi 8π .

☐ Objętość walca wynosi 48π .

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Wiadomo, że średnica podstawy walca i wysokość walca pozostają w stosunku 3 : 2 a iloczyn ich długości wynosi 30.

Promień podstawy walca jest równy .

Wysokość walca ma długość .

Pole podstawy walca wynosi .

Objętość walca jest równa .

$11,25\pi$

$45\sqrt{5}\pi$

$22,5\sqrt{5}\pi$

$3\sqrt{5}$

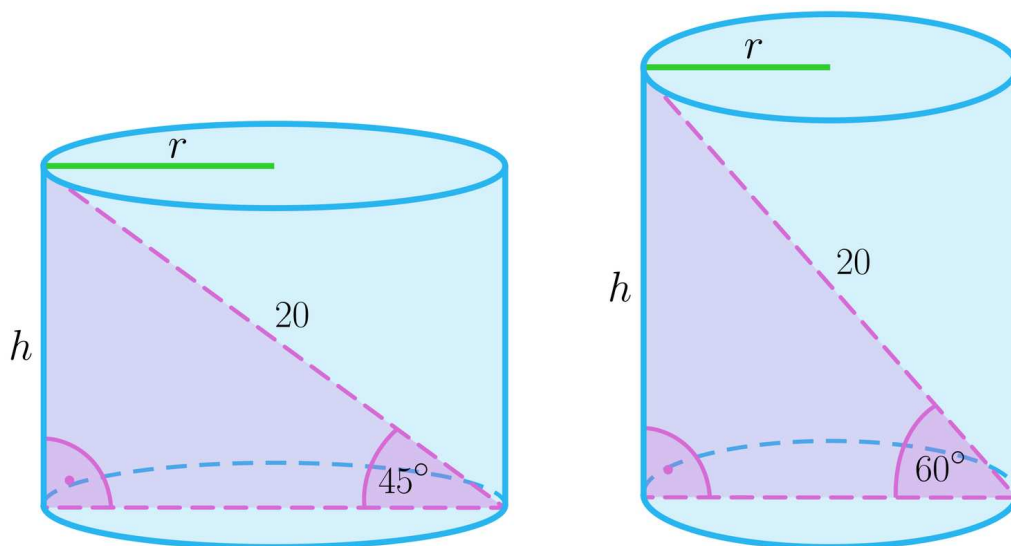
$2\sqrt{5}$

$1,5\sqrt{5}$

Ćwiczenie 5



Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono walce.



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Własności walca z rysunku 1:

Własności walca z rysunku 2:

pole podstawy walca wynosi
 25π

wysokość walca ma długość
 $10\sqrt{3}$

objętość walca wynosi $250\pi\sqrt{3}$

wysokość walca ma długość
 $10\sqrt{2}$

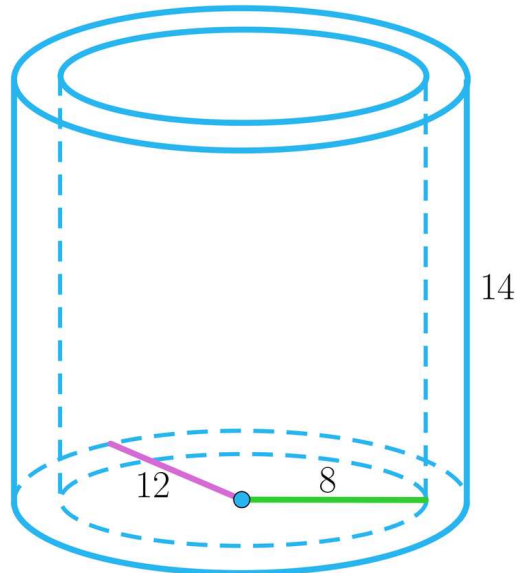
objętość walca wynosi $500\pi\sqrt{2}$

pole podstawy walca wynosi
 50π

Ćwiczenie 6



Z walca o promieniu podstawy 12 wycięto walec o promieniu podstawy 8 i tej samej wysokości, jak na rysunku. Oblicz objętość powstałej bryły.



Ćwiczenie 7



W sześcian o polu powierzchni całkowitej równym 96 wpisano walec. Oblicz objętość tego walca.

Ćwiczenie 8



Wyznacz promień podstawy walca o objętości równej V , jeżeli powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość walca

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
- 6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastopów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wzór na objętość walca;
- oblicza promień podstawy walca, gdy dana jest jego objętość oraz wysokość;
- wyznacza wysokość walca, gdy dana jest jego objętość oraz promień podstawy;
- wykorzystuje poznany wzór do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- metoda krokodyla;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat zajęć: „Objętość walca” i ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują samodzielnie ćwiczenia numer 1 i 2 w sekcji „Sprawdź się”. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Uczeń, który poprawnie rozwiąże ćwiczenie jako pierwszy, otrzymuje ocenę za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

5. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8 w sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia z uczniami ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć uczniowie rozwijają zdanie: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Objętość walca”).

Materiały pomocnicze:

- [Bryły obrotowe - walec](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Schemat interaktywny” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące obliczania objętości walca.