



Znajdowanie współczynników liczbowych występujących we wzorze funkcji liniowej, na podstawie położenia jej wykresu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Znajdowanie współczynników liczbowych występujących we wzorze funkcji liniowej, na podstawie położenia jej wykresu

Źródło: Margaret Stokman, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Funkcję liniową opisujemy za pomocą wzoru $y = ax + b$. Wykresem tej funkcji jest prosta, której położenie w układzie współrzędnych zależy od wartości współczynników a i b . W materiale omówimy, jak znajdować wartości tych współczynników, w zależności od tego, jak położony jest wykres funkcji liniowej. Opierając się na materiale teoretycznym i omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Wyznaczysz wzór funkcji liniowej na podstawie zadanych warunków.
- Obliczysz współczynniki liczbowe występujące we wzorze funkcji liniowej.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Definicja: funkcja liniowa

Funkcję f określoną na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem

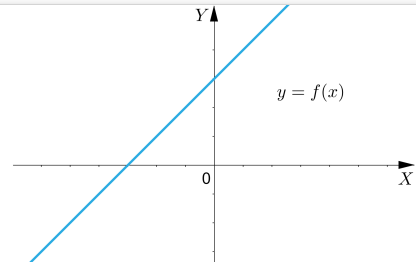
$$f(x) = ax + b,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcją liniową.

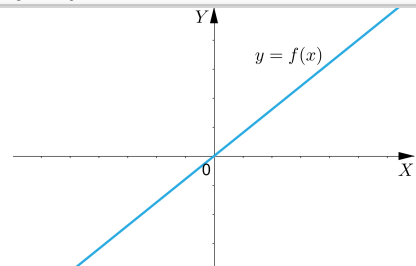
Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, a b wyrazem wolnym.

Wykresem funkcji liniowej jest **prosta**.

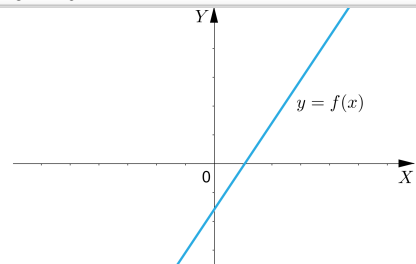
Wartości współczynników a i b w zależności od położenia prostej, będącej wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$ w prostokątnym układzie współrzędnych



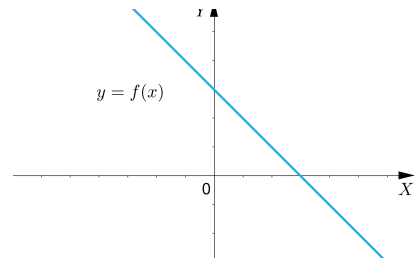
$a > 0$ i $b > 0$ Wykres funkcji znajduje się w I, II i III ćwiartce układu współrzędnych.



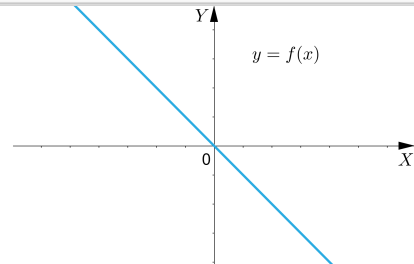
$a > 0$ i $b = 0$ Wykres funkcji znajduje się w I i III ćwiartce układu współrzędnych, przechodzi przez początek układu współrzędnych.



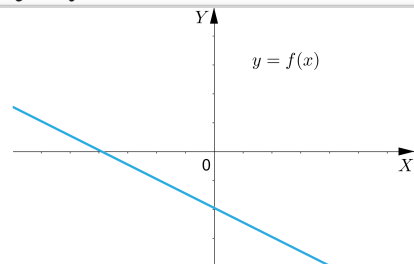
$a > 0$ i $b < 0$ Wykres funkcji znajduje się w I, III i IV ćwiartce układu współrzędnych.



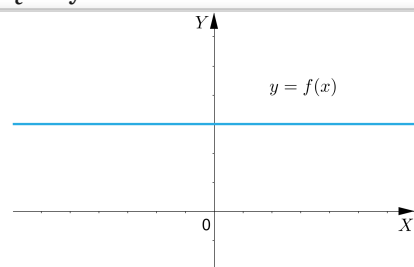
$a < 0$ i $b > 0$ Wykres funkcji znajduje się w I, II i IV ćwiartce układu współrzędnych.



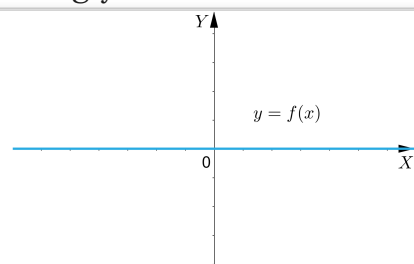
$a < 0$ i $b = 0$ Wykres funkcji znajduje się w II i IV ćwiartce układu współrzędnych, przechodzi przez początek układu współrzędnych.



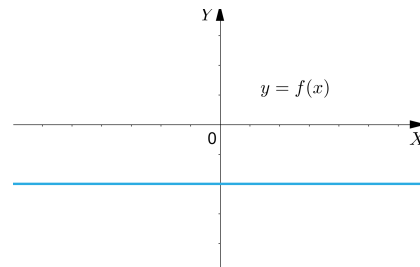
$a < 0$ i $b < 0$ Wykres funkcji znajduje się w II, III i IV ćwiartce układu współrzędnych.



$a = 0$ i $b > 0$ Wykres funkcji znajduje się w I i II ćwiartce układu współrzędnych, jest równoległy do osi X .



$a = 0$ i $b = 0$ Wykres funkcji jest zawarty w osi X .



$a = 0$ i $b < 0$ Wykres funkcji znajduje się w III i IV ćwiartce układu współrzędnych, jest równoległy do osi X .

Znajdowanie wartości współczynników liczbowych a i b

Jeżeli dana jest prosta, będąca wykresem **funkcji liniowej** w prostokątnym układzie współrzędnych, to:

- wartość współczynnika a obliczamy ze wzoru:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

gdzie:

(x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) są współrzędnymi dowolnych dwóch punktów, które należą do prostej, będącej wykresem funkcji liniowej,

- wartość współczynnika b jest równa drugiej współrzędnej punktu przecięcia prostej, będącej wykresem funkcji liniowej z osią Y .

Ważne!

Jeżeli funkcja liniowa jest określona wzorem $f(x) = ax + b$, to do prostej, będącej wykresem tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(0, b)$.

Przykład 1

Określimy wartości współczynników liczbowych funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$, jeżeli wiadomo, że do prostej, będącej wykresem tej funkcji należą punkty o współrzędnych $(0, 4)$ oraz $(2, 5)$.

Rozwiązanie:

Jeżeli punkt o współrzędnych $(0, 4)$ należy do prostej, będącej wykresem tej funkcji, to $b = 4$.

Obliczamy wartość współczynnika a , korzystając ze wzoru.

Zatem:

$$a = \frac{5-4}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Przykład 2

Wyznamy, dla jakich wartości parametru m prosta, będąca wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (m + 2)x + (m^2 - m)$ należy do I, II i IV ćwiartki układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Wartości współczynników a i b ze wzoru funkcji wynoszą odpowiednio:

$$a = m + 2,$$

$$b = m^2 - m.$$

Jeżeli prosta, będąca wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (m + 2)x + (m^2 - m)$ należy do I, II i IV ćwiartki układu współrzędnych, to zachodzą następujące warunki:

$$a < 0 \text{ i } b > 0.$$

Zatem do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy nierówności:

$$m + 2 < 0, \text{ więc } m < -2, \text{ zatem } m \in (-\infty, -2),$$

$$m^2 - m > 0, \text{ więc } m(m - 1) > 0, \text{ zatem } m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Wobec tego oba warunki są spełnione, gdy $m \in (-\infty, -2)$.

Przykład 3

Wyznamy, dla jakich wartości parametru m wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (m^3 - 4m^2 + m - 4)x + 2$ jest prosta, która jest równoległa do osi X układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Jeżeli prosta, będąca wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest równoległa do osi X , to $a = 0$ i $b \in \mathbb{R}$.

Zatem do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy równanie, wykorzystując metodę grupowania wyrazów:

$$m^3 - 4m^2 + m - 4 = 0$$

$$m^2 \cdot (m - 4) + 1 \cdot (m - 4) = 0$$

$$(m - 4) \cdot (m^2 + 1) = 0$$

$$m - 4 = 0, \text{ czyli } m = 4,$$

$$m^2 + 1 = 0, \text{ czyli } m \in \emptyset.$$

Wobec tego $m = 4$.

Sprawdzenie:

$$4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 - 4 = 64 - 64 = 0$$

Zatem funkcja liniowa jest określona wzorem:

$$f(x) = 2$$

Ponieważ $a = 0$ i $b \in \mathbb{R}$, to prosta, będąca wykresem funkcji f jest równoległa do osi X układu współrzędnych.

Przykład 4

Sprawdzimy, czy prosta, będąca wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (3m^2 - 4)x + (m + 3)$ należy do I, II i III ćwiartki układu współrzędnych, jeżeli do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(-1, 3)$.

Rozwiązanie:

Jeżeli do prostej, będącej wykresem funkcji f należy punkt o współrzędnych $(-1, 3)$, to do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy równanie:

$$3 = (3m^2 - 4) \cdot (-1) + (m + 3)$$

$$-3m^2 + m + 4 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 4 = 49$$

$$m_1 = \frac{-1-7}{-6} = \frac{4}{3}$$

$$m_2 = \frac{-1+7}{-6} = \frac{6}{-6} = -1.$$

Dla $m = \frac{4}{3}$ mamy:

$$f(x) = \left(3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\right)x + \left(\frac{4}{3} + 3\right) = \frac{4}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Ponieważ $a = \frac{4}{3}$ i $b = \frac{13}{3}$, to prosta, będąca wykresem tej funkcji znajduje się w I, II i III ćwiartce układu współrzędnych.

Dla $m = -1$ mamy:

$$f(x) = (3 \cdot (-1)^2 - 4)x + (-1 + 3) = -x + 2$$

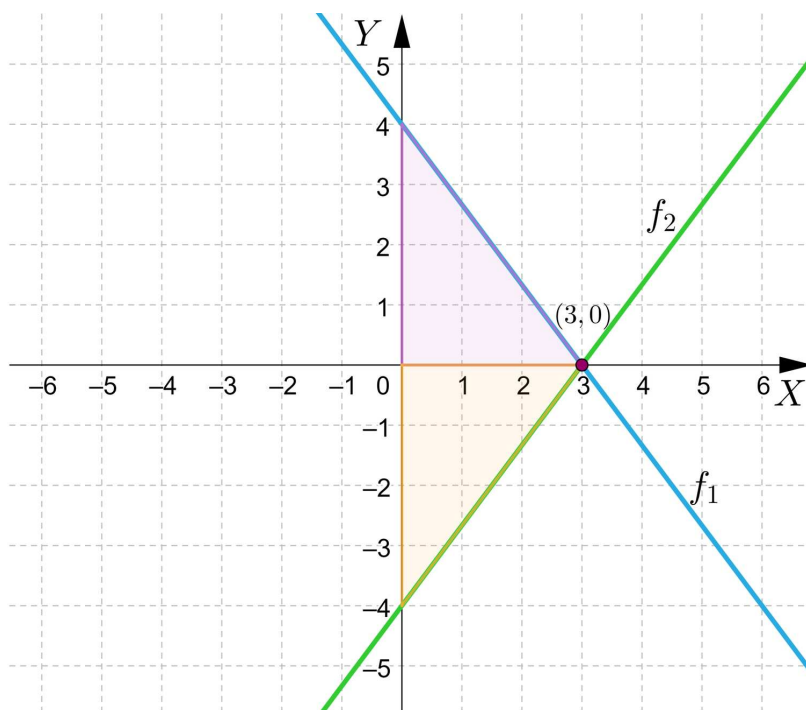
Ponieważ $a = -1$ oraz $b = 2$, to prosta, będąca wykresem tej funkcji znajduje się w I, II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Przykład 5

Określmy wartości współczynników liczbowych a i b we wzorze funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jeżeli wiadomo, że prosta, będąca wykresem tej funkcji przechodzi przez punkt o współrzędnych $(3, 0)$ i wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu równym 6.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy do zadania. Zauważmy, że istnieją takie dwie proste, będące wykresami funkcji liniowych, które spełniają warunki określone w zadaniu.



Ponieważ pole trójkąta ograniczonego przez prostą, będącą wykresem funkcji liniowej oraz osie układu współrzędnych wynosi 6, to do wyznaczenia wartości b rozwiązujemy równanie:

$$6 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot b$$

$$6 = \frac{3}{2}b$$

$$b = 4$$

Zauważmy, że wartość współczynnika b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ może też wynosić -4 .

Zatem funkcja liniowa, której wykres ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych podany trójkąt jest określona za pomocą wzoru:

$$f(x) = ax + 4 \text{ lub } f(x) = ax - 4$$

Ponieważ punkt o współrzędnych $(3, 0)$ należy do prostej, będącej wykresem funkcji f , zatem:

- $0 = a \cdot 3 + 4$, wtedy $a = \frac{-4}{3}$, czyli $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$
- $0 = a \cdot 3 - 4$, wtedy $a = \frac{4}{3}$, czyli $f(x) = \frac{4}{3}x - 4$

Przykład 6

Uzasadnimy, że jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to równanie prostej $y = ax + b$, będącej wykresem funkcji liniowej można zapisać w postaci $\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{b} = 1$.

Rozwiązanie:

Dana jest prosta o równaniu $y = ax + b$, będąca wykresem funkcji liniowej.

Przekształcamy równanie tej prostej do postaci:

$$y - ax = b$$

Po podzieleniu obu stron równania przez b otrzymujemy:

$$\frac{y}{b} - \frac{ax}{b} = 1$$

Równanie zapisujemy w szukanej postaci:

$$\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{b} = 1$$

Słownik

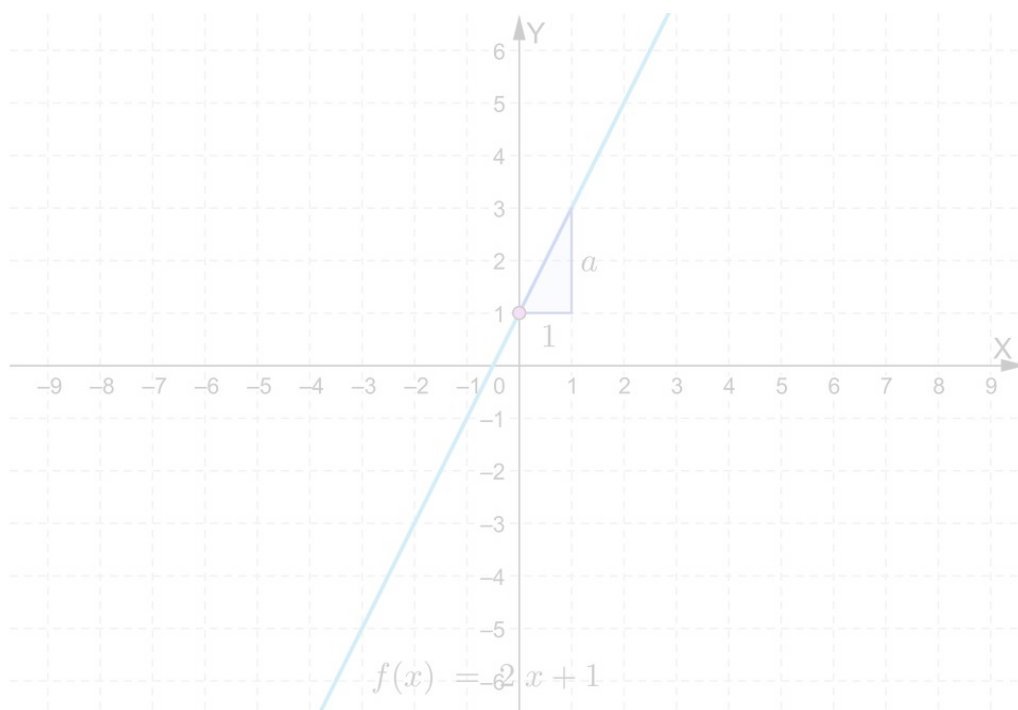
funkcja liniowa

funkcja f określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$

Aplet

Polecenie 1

Zmieniaj wartości współczynników a i b , a następnie zaobserwuj, w których ćwiartkach układu współrzędnych znajduje się prosta, będąca wykresem funkcji liniowej.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D18lHv9tm>

Polecenie 2

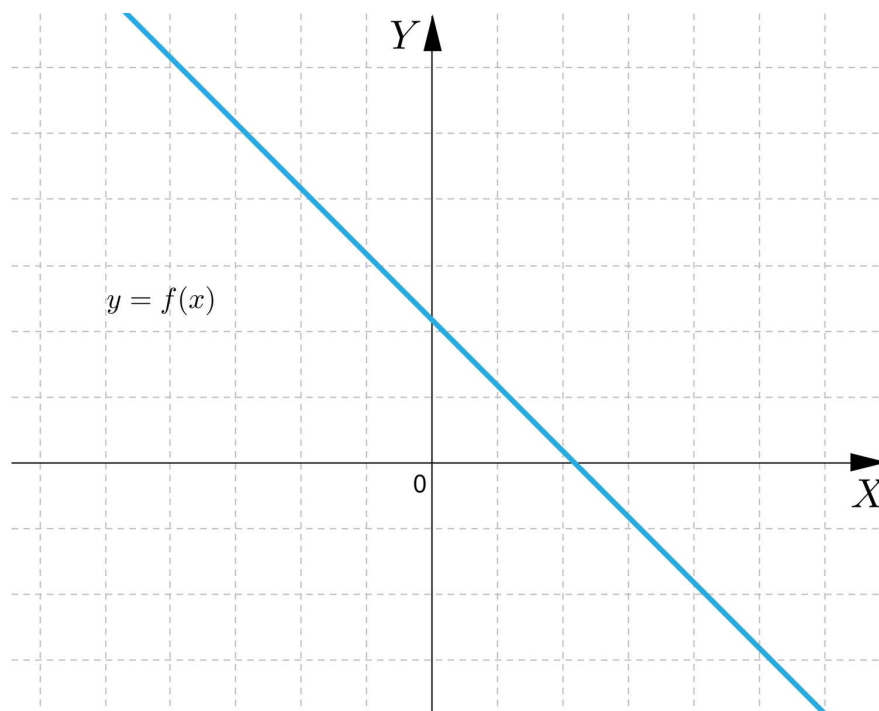
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na rysunku przedstawiono prostą, będącą wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$.



Wobec tego:

☐ $a \cdot b > 0$

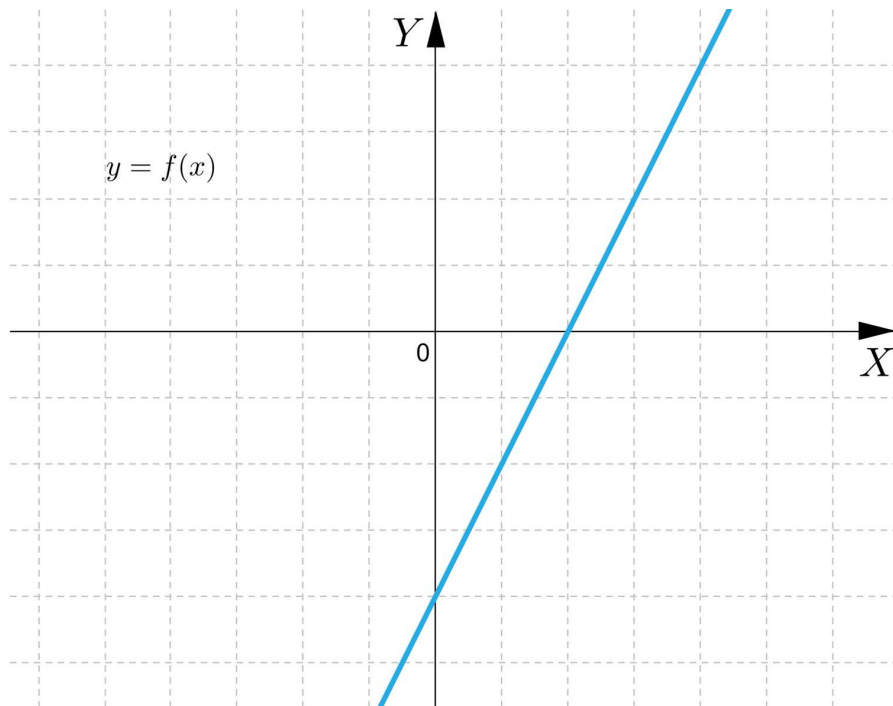
☐ $a \cdot b = 0$

☐ $a \cdot b < 0$

Ćwiczenie 2



Na podstawie rysunku zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐

Współczynnik a ze wzoru funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku jest ujemny.

☐

Prosta, będąca wykresem tej funkcji znajduje się w I, III i IV ćwiartce układu współrzędnych.

☐

Współczynnik b ze wzoru funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku jest ujemny.

☐

Wartość $a \cdot b = 8$.

Ćwiczenie 3



Funkcja liniowa jest określona wzorem $f(x) = (-m + 2)x + (m - 1)$. Połącz w pary wartość parametru m z numerami ćwiartek układu współrzędnych, w których położona jest prosta, będąca wykresem tej funkcji.

$$m = 0$$

I, III

$$m = 1$$

I, III, IV

$$m = 4$$

I, II, IV

$$m = -1$$

I, III, IV

Ćwiczenie 4



Oblicz, dla jakich wartości parametrów m i n prosta, będąca wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = (4m - 3)x + (-2n + 1)$ znajduje się w II, III, IV ćwiartce układu współrzędnych.

Ćwiczenie 5



Wyznacz, dla jakich wartości parametru m prosta, będąca wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (5m^3 - 10m^2 + 2m - 4)x - 3$ jest równoległa do osi X układu współrzędnych.

Ćwiczenie 6



Uzupełnij tekst wpisując odpowiednie znaki: $>$, $<$ lub $=$.

Jeżeli funkcja liniowa jest określona wzorem $f(x) = ax + b$, to:

- dla a 0 i b 0 prosta, będąca wykresem tej funkcji znajduje się w II, III, IV ćwiartce układu współrzędnych,

- dla a 0 i b 0 prosta, będąca wykresem tej funkcji znajduje się w III, IV ćwiartce układu współrzędnych,

- dla a 0 i b 0 prosta, będąca wykresem tej funkcji znajduje się w I, III, IV ćwiartce układu współrzędnych,

- dla a 0 i b 0 prosta, będąca wykresem tej funkcji znajduje się w I, III ćwiartce układu współrzędnych.

Ćwiczenie 7

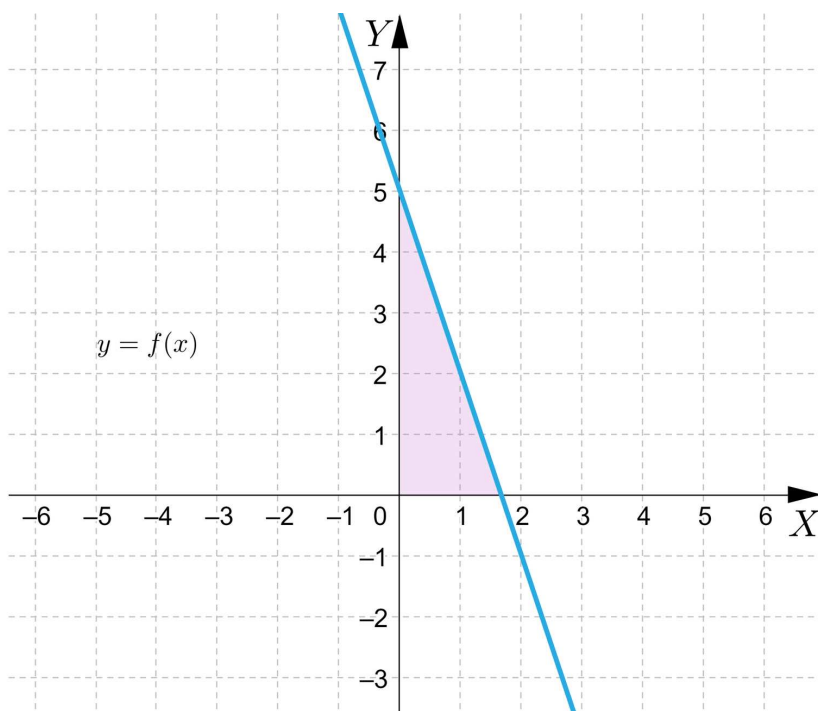


Do prostej, będącej wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$ należą punkty o współrzędnych $(0, -3)$ oraz $(3, 2)$. Wyznacz wartości współczynników a i b we wzorze tej funkcji.

Ćwiczenie 8



Wyznacz wartości współczynników a i b ze wzoru funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, jeżeli prosta, będąca wykresem tej funkcji ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu $4\frac{1}{6}$ tak, jak na poniższym rysunku.



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Znajdowanie współczynników liczbowych występujących we wzorze funkcji liniowej, na podstawie położenia jej wykresu

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie zadanych warunków;
- oblicza współczynniki liczbowe, występujące we wzorze funkcji liniowej;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- burza mózgów;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Znajdowanie współczynników liczbowych występujących we wzorze funkcji liniowej, na podstawie położenia jej wykresu” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Aplet”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 w sekcji „Sprawdź się”. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8 w sekcji „Sprawdź się”, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania. Nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Znajdowanie współczynników liczbowych występujących we wzorze funkcji liniowej, na podstawie położenia jej wykresu”).

Materiały pomocnicze:

- [Definicja funkcji liniowej.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Aplet” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w zakresie znajdowania współczynników liczbowych występujących we wzorze funkcji liniowej, na podstawie położenia jej wykresu.
- „Aplet” można wykorzystać do wyznaczania kąta nachylenia prostej, będącej wykresem funkcji liniowej do osi odciętych układu współrzędnych.