



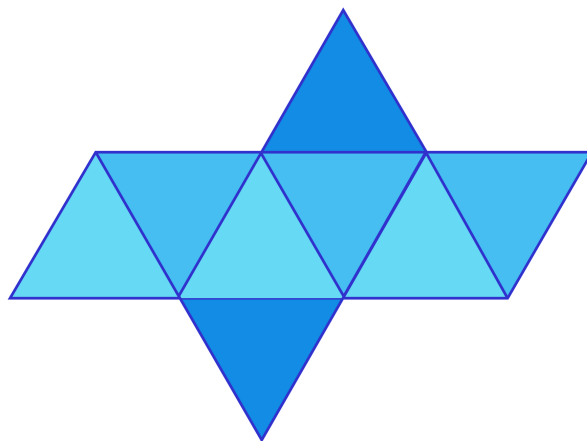
Pole powierzchni i objętość ośmiościanu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Pole powierzchni i objętość ośmiościanu

Źródło: Daniele Levis Pelusi, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

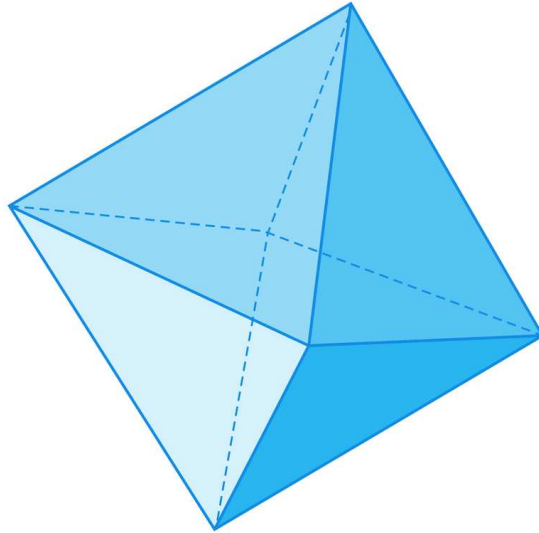
Platon uznaje, że materia jest zbudowana z całości i na nie jest podzielna, ale te całości mają charakter idealny. Nie są bowiem ciałami stałymi, lecz figurami geometrycznymi. Idealną najprostszą figurą geometryczną jest trójkąt, czyli płaszczyzna ograniczona najmniejszą liczbą linii prostych. To trójkąty są maksymalnym uproszczeniem, najprostszym elementem budulcowym, podstawową cegiełką, z której buduje się Kosmos. Z trójkątów można oczywiście budować płaszczyzny, ale i bryły. To trójkąty są nieredukowalnymi elementami ścian brył wielościanów. Z trójkątów równobocznych złożyć można trzy bryły idealne -tetraedr (czworościan), oktaedr (ośmiościan), ikosaedr (dwudziestościan). Platon uznał, że cała rzeczywistość jest zorganizowana jako odbicie owych podstawowych figur geometrycznych (trójkątów i wielościanów foremnych), czyli form najdoskonalszych, zarówno z punktu widzenia estetyki, jak i wzajemnych związków. W tym materiale dowiesz się jeszcze więcej o ośmiościanie foremnym.



- Poznasz wzór na pole i objętość ośmiościanu.
- Rozwiążesz zadania dotyczące ośmiościanu.

Przeczytaj

Ośmiościan foremny (inaczej oktaedr) to **wielościan** foremny o 8 ścianach w kształcie **przystających** trójkątów równobocznych.



Wzór na pole powierzchni całkowitej ośmiościanu foremnego

$$P_c = 2a^2\sqrt{3}$$

Wzór na objętość ośmiościanu foremnego

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

Wzór na długość promienia kuli wpisanej w ośmiościan foremny

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Wzór na długość promienia kuli opisanej na ośmiościanie foremnym

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Przykład 1

Obliczmy pole i objętość ośmiościanu foremnego o krawędzi długości 6 cm oraz pole kuli opisanej na tym ośmiościanie.

Rozwiązanie

$$P_c = 2a^2\sqrt{3} = 2 \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3} = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{6^3\sqrt{2}}{3} = 72\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

Obliczymy długość promienia kuli opisanego na wielościanie:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Zatem pole kuli wynosi:

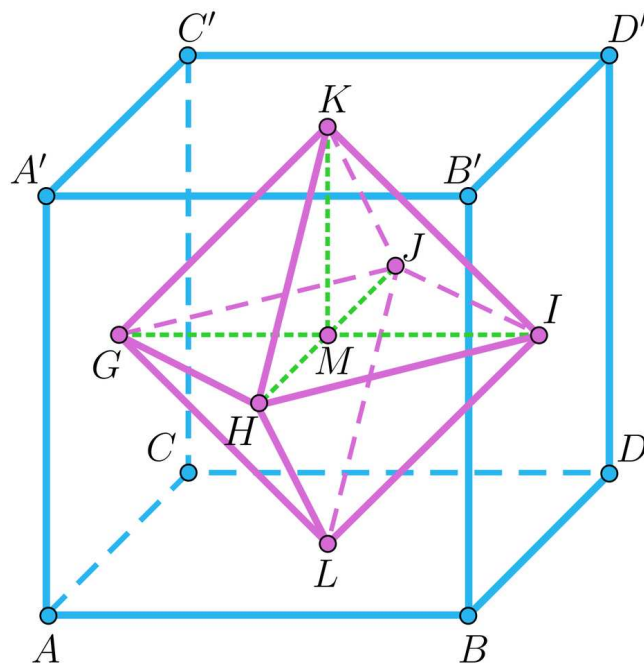
$$P = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (3\sqrt{2})^2 = 72\pi \text{ cm}^2$$

Przykład 2

Środki ścian sześcianu są wierzchołkami ośmiościanu. Obliczymy objętość tego ośmiościanu, jeśli objętość sześcianu wynosi 512.

Rozwiązanie

Wykonajmy rysunek pomocniczy:



Niech a - długość krawędzi sześcianu. Wówczas $a^3 = 512$, zatem $a = 8$.

Zauważmy też, że $|HJ| = 8$. Odcinek ten jest przekątną kwadratu $GHIJ$. Możemy więc obliczyć długość krawędzi ośmiościanu foremnego. Oznaczmy ją jako x .

$$x\sqrt{2} = 8$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

Możemy więc policzyć objętość ośmiościanu:

$$V = \frac{(4\sqrt{2})^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{128\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{256}{3}$$

Przykład 3

Przekątna ośmiościanu ma długość s . Obliczmy jego pole i objętość.

Rozwiązanie

Wykorzystamy wzór na przekątną ośmiościanu o krawędzi długości a : $d = a\sqrt{2}$.

Zatem powstaje równanie:

$$s = a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{s\sqrt{2}}{2}$$

Możemy więc policzyć pole i objętość ośmiościanu:

$$P_C = 2a^2\sqrt{3} = 2 \cdot \left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{3} = 2 \cdot \frac{2s^2}{4} \sqrt{3} = s^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{\frac{2\sqrt{2}s^3}{8} \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{s^3}{6}$$

Przykład 4

Promień kuli wpisanej w ośmiościan foremny jest o $\sqrt{6}$ krótszy od promienia kuli opisanego na ośmiościanie foremnym. Obliczmy pole powierzchni całkowitej i objętość bryły.

Rozwiązanie

Oznaczmy jako a długość krawędzi ośmiościanu. Możemy więc ułożyć równanie:

$$\frac{a\sqrt{6}}{6} + \sqrt{6} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$a\sqrt{6} + 6\sqrt{6} = 3a\sqrt{2}$$

$$6\sqrt{6} = a(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

$$a = \frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

Usuńmy niewymierność z mianownika:

$$a = \frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}} \cdot \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{18 - 6} = \frac{18\sqrt{12} + 36}{12} = \frac{36\sqrt{3} + 36}{12} = 3\sqrt{3} + 3$$

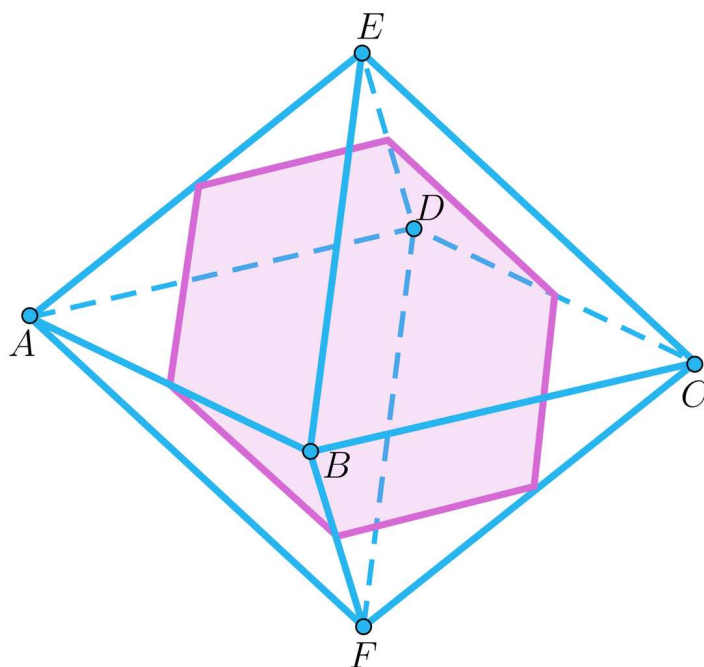
Obliczmy więc pole i objętość ośmiościanu:

$$P_c = 2a^2\sqrt{3} = 2 \cdot (3\sqrt{3} + 3)^2 \sqrt{3} = 72\sqrt{3} + 108$$

$$V = \frac{(3\sqrt{3}+3)^3 \sqrt{2}}{3} = 54\sqrt{6} + 90\sqrt{2}$$

Przykład 5

Ośmiościan $ABCDEF$ o krawędzi a przecięto płaszczyzną równoległą do płaszczyzn trójkątów BCE i AFD oraz przechodzącą przez środki pozostałych krawędzi (zobacz rysunek). Obliczmy pole otrzymanego przekroju.



Rozwiązanie

Przekrojem jest sześciokąt foremny o krawędzi dwa razy krótszej od krawędzi ośmiościanu. Pole przekroju jest zatem równe:

$$P = \frac{6 \cdot (\frac{1}{2}a)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6a^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{8}$$

Słownik

wielościan

bryła geometryczna, ograniczona przez tak zwaną powierzchnię wielościenne, czyli powierzchnię utworzoną z wielokątów o rozłącznych wnętrzach i każdym boku wspólnym dla dwóch wielokątów; każdy wielościan utworzony jest ze ścian – wielokątów, które razem tworzą powierzchnię wielościanu

figury przystające

wszystkie figury, które mają taką samą liczbą boków, o takiej samej długości oraz kąty między tymi bokami mają takie same wartości; figury przystające mają więc takie samo pole powierzchni i idealnie się na siebie nakładają

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z treścią animacji 3D. Zwróć uwagę, jak wyprowadzone są wzory na pole i objętość ośmiościanu foremnego.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DVi0qkBuu>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej pola powierzchni i objętości ośmiościanu.

Polecenie 2

Oblicz objętość ośmiościanu foremnego o polu powierzchni całkowitej $64\sqrt{3}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Objętość ośmiościanu foremnego wynosi $243\sqrt{2}$. Jaką długość ma promień kuli wpisanej w ten wielościan? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

☐ $\frac{3}{2}\sqrt{6}$

☐ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 2



Środki ścian sześcianu o krawędzi długości 10 cm są wierzchołkami ośmiościanu. O ile procent objętość sześcianu jest większa od objętości ośmiościanu? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ o 600%

☐ o 500%

☐ o 300%

Ćwiczenie 3



Pole ośmiościanu foremnego wynosi S .

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

	Prawda	Fałsz
Krawędź wielościanu ma długość $\sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{6}}$.	☐	☐
Przekątna ośmiościanu foremnego jest 2 razy dłuższa od długości jego krawędzi.	☐	☐
Promień kuli wpisanej w ten ośmiościan ma długość $\frac{1}{6}\sqrt{S\sqrt{3}}$.	☐	☐
Objętość kuli opisanej na ośmiościanie wynosi $\frac{4}{3}\pi S^3$.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Pole kuli wpisanej w ośmiościan foremny wynosi 24π .

Połącz w pary opisy liczb z wynikami.

promień kuli opisanej na ośmiościanie	$72\sqrt{2}$
pole ośmiościanu	$72\sqrt{3}$
promień kuli wpisanej w ośmiościan	$3\sqrt{2}$
objętość ośmiościanu	$\sqrt{6}$

Ćwiczenie 5



Dwudziestościan foremny o krawędzi długości 4 ma pole 3 razy mniejsze od pola ośmiościanu foremnego. Dokończ zdanie, przeciągając prawidłową odpowiedź w puste pole.

1. Pole powierzchni dwudziestościanu foremnego wynosi .
2. Pole powierzchni ośmiościanu foremnego wynosi .
3. Krawędź ośmiościanu ma długość .
4. Objętość kuli wpisanej w ośmiościan foremny wynosi .

☐ $32\sqrt{3}$

☐ $\frac{32}{3}\pi$

☐ $80\sqrt{3}$

☐ $96\sqrt{3}$

☐ $2\sqrt{6}$

☐ $240\sqrt{3}$

☐ $\frac{160\sqrt{5}}{3}\pi$

☐ $2\sqrt{30}$

Ćwiczenie 6



Łączymy odpowiednio środki ciężkości ścian ośmiościanu foremnego o krawędzi długości 4 cm i otrzymujemy sześcián. Ile wynosi objętość tego sześciánu? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{128\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

☐ $\frac{128\sqrt{2}}{27} \text{ cm}^3$

☐ $\frac{64\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

Ćwiczenie 7



Wykaż, że objętość ośmiościanu foremnego, którego wierzchołki znajdują się na środkach ścian sześciánu, jest sześć razy mniejsza od objętości tego sześciánu.

Ćwiczenie 8



Środki ścian ośmiościanu foremnego są wierzchołkami sześciánu. Oblicz stosunek objętości obu brył.

Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kielczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni i objętość ośmiościanu

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje własności ośmiościanu foremnego;
- oblicza pole i objętość ośmiościanu;
- oblicza pole kuli wpisanej i opisanej na ośmiościanie;
- rozwiązuje zadania dotyczące ośmiościanu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja,
- metoda tekstu przewodniego,
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych.

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer, najlepiej w pracowni komputerowej;
- lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji**Faza wprowadzająca:**

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie podstawowych własności ośmiościanu foremnego.
2. Nauczyciel wprowadza wzór na pole i objętość ośmiościanu foremnego.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach metodą tekstu przewodniego analizują przykłady w sekcji Przeczytaj.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby w parach przeanalizowali zadania pokazane w animacji 3D.
3. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne. Wspólnie omawiają wynik.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują polecenie w sekcji Animacja 3D.

Materiały pomocnicze:

[Bryły platońskie](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację 3D można wykorzystać jako element powtórzenia materiału przed sprawdzianem.