Wzrost i zanik wykładniczy

Wzrost i zanik wykładniczy

Źródło: Dawid Chruściak z Pixabay, domena publiczna.

Jedną z bardzo skutecznych metod reklamowania produktów lub usług jest marketing wirusowy. Nazwa nawiązuje do rozpowszechniania informacji o produkcie lub usłudze w błyskawicznym tempie, podobnie do rozprzestrzeniania się wirusa. Viralem, czyli szybko rozprzestrzeniającą się informacją, może być wyzwanie lub nominowanie. Jednym z najgłośniejszych wyzwań było Ice Bucket Challenge. Pomysł polegał na tym, aby wylać na siebie wiadro lodowatej wody i nominować kolejne trzy osoby do wykonania tego zadania. Innym, świetnym przykładem viralu jest klip koreańskiego piosenkarza Psy nakręcony do utworu *Gangnam Style* z charakterystyczną choreografią. Naukowcy zbadali, że liczba wyświetleń teledysku na jednym ze znanych portali w czasie pierwszych dwóch miesięcy rosła wykładniczo. Założenia Ice Bucket Challenge również spełniają założenia wzrostu wykładniczego.

Analizując ten materiał dowiesz się, czym jest wzrost i zanik wykładniczy. Poznasz sytuacje, w których mamy z nimi do czynienia i nauczysz się je opisywać wzorami matematycznymi.

Twoje cele

- Rozpoznasz wzrost i zanik wykładniczy.
- Określisz własności wzrostu i zaniku wykładniczego.
- Zastosujesz wzrost i zanik wykładniczy w sytuacjach z życia codziennego, czyli nauczysz się modelowania matematycznego.

Przeczytaj

Przykład 1

W okresie jesienno–zimowym obserwujemy zwiększoną zachorowalność na przeziębienie – wirusową chorobę zakaźną. Spójrzmy na rozprzestrzenianie się wirusów powodujących przeziębienie z punktu widzenia matematyki.

Na podstawie badań epidemiologów z dobrą dokładnością możemy przyjąć, że:

a) jeden pacjent w czasie trwania choroby zaraża średnio trzy kolejne osoby,

b) przeziębienie trwa zazwyczaj tydzień.

Przesuń suwak na osi czasu i obserwuj liczbę nowych zainfekowanych osób w kolejnych tygodniach.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DReWs6oW

W każdym kolejnym tygodniu liczba nowych osób zainfekowanych wzrastała trzykrotnie.

Początek	1 tydzień	2 tydzień	3 tydzień	4 tydzień
1	$3=3^1$	$9=3^2$	$27=3^3$	$81=3^4$

Liczbę nowych zainfekowanych osób w kolejnych tygodniach możemy opisać więc wzorem:

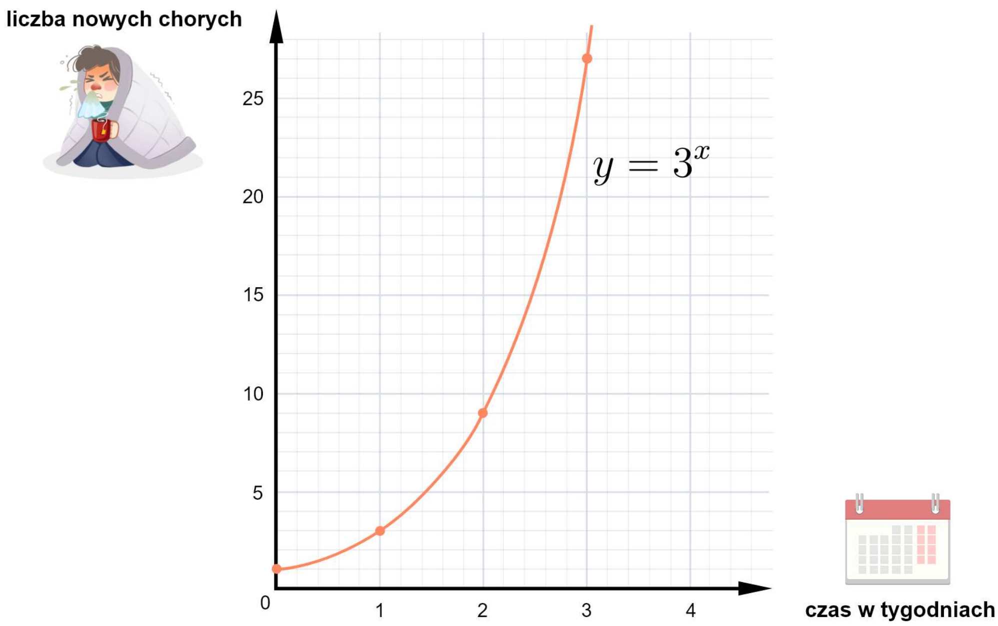
$$y=3^x$$

gdzie:
y – oznacza liczbę nowych chorych,
x – kolejny tydzień.

Otrzymany wzór jest wzorem opisującym funkcję wykładniczą o „zawężonej” dziedzinie, ponieważ x musi być liczbą naturalną.

W opisanej sytuacji przyrost chorych jest więc przykładem **wzrostu wykładniczego**.

Dane w tabeli można przedstawić na wykresie zależności liczby nowych zainfekowanych osób w danym tygodniu od czasu. Punkty leżą na wykresie funkcji opisanej wzorem $y=3^x$.



W naszych rozważaniach przyjęliśmy, że jedna chora osoba zaraża trzy kolejne. W epidemiologii tę liczbę nazywamy podstawową liczbą odtwarzania (*ang. basic reproductive number*). Oznaczamy ją symbolem R_0. Informuje nas ona o tym, ile średnio osób może ulec zakażeniu od jednego chorego w czasie, w którym ten chory zakaża innych. Dotyczy to sytuacji, gdy nikt w populacji nie jest odporny na tę chorobę. Podstawowa liczba odtwarzania zależy od rodzaju wirusa, który się rozprzestrzenia. Można ją zmniejszyć, czyli zmniejszyć liczbę zainfekowanych osób przez jednego chorego, stosując między innymi środki ochrony osobistej lub szczepionki.

Wartości podstawowej liczby odtwarzania dla wybranych chorób zakaźnych

Choroba zakaźna	R_0
gorączka krwotoczna (wirus Ebola)	2
grypa	$1 - 2$
przeziębienie	$2 - 3$
różyczka	$5 - 7$
ospa wietrzna	$10 - 12$
odra	18

Źródło: Wikipedia, Centrum Zapobiegania i Zwalczania Chorobom, Światowa Organizacja Zdrowia

Przykład 2

Pan Marcin otworzył sklep internetowy. W dniu uruchomienia sklepu klienci założyli 7 kont na stronie internetowej.

Informację o tym, jak zmieniała się liczba wszystkich kont założonych w sklepie internetowym w kolejnych miesiącach, zestawiono w tabeli.

Pierwszy dzień	1 **miesiąc**	2 **miesiąc**	3 **miesiąc**	4 **miesiąc**	5 **miesiąc**
7	28	112	448	1792	7168

1) Wykażemy, że liczba kont założonych w sklepie internetowym rosła wykładniczo. Podamy wzór opisujący liczbę wszystkich kont założonych z upływem czasu.

2) Po ilu miesiącach liczba kont będzie większa od 150000?

Ad 1)

Wykonajmy dzielenie:

$\frac{28}{7} = 4$

$\frac{112}{28} = 4$

$\frac{448}{112} = 4$

$\frac{1792}{448} = 4$

$\frac{7168}{1792} = 4$

Możemy więc wyciągnąć wniosek, że liczba założonych kont w sklepie internetowym wzrastała 4 razy w każdym kolejnym miesiącu.

pierwszy dzień	1 miesiąc	2 miesiąc	3 miesiąc	4 miesiąc	5 miesiąc
7	28	112	448	1792	7168

$\cdot 4$ $\cdot 4$ $\cdot 4$ $\cdot 4$ $\cdot 4$

Na tej podstawie ustalimy wzór, za pomocą którego można obliczyć liczbę wszystkich kont w sklepie internetowym w zależności od czasu.

Liczba założonych kont

Liczba założonych kont		
w pierwszym dniu	7	$7 \cdot 4^0 = 4$
w pierwszym miesiącu	$7 \cdot 4 = 28$	$7 \cdot 4^1 = 28$
w czasie dwóch miesięcy	$7 \cdot 4 \cdot 4 = 112$	$7 \cdot 4^2 = 112$
w czasie trzech miesięcy	$7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 448$	$7 \cdot 4^3 = 448$
w czasie czterech miesięcy	$7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1792$	$7 \cdot 4^4 = 1792$
w czasie pięciu miesięcy	$7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 7168$	$7 \cdot 4^5 = 7168$

Na podstawie obliczeń wnioskujemy, że wzór, który opisuje, ile kont zostało założonych w poszczególnych miesiącach, ma postać:

$y = 7 \cdot 4^x$.

Oznacza to, że liczba kont założonych w sklepie internetowym rośnie wykładniczo.

Jak odczytywać wzór?

czas, który upłynął
od pierwszego dnia

$$y = 7 \cdot 4^x$$

liczba kont założonych
pierwszego dnia
(wartość początkowa)

co miesiąc liczba
kont wzrasta 4 razy

Ad 2)

Po ilu miesiącach liczba kont będzie większa od 150000?

Po pięciu miesiącach od uruchomienia sklepu założono 7168 kont. Obliczmy, ile kont zostało założonych po 6, 7 i więcej miesiącach.

Liczba założonych kont	
po sześciu miesiącach	$7 \cdot 4^6 = 28672$
po siedmiu miesiącach	$7 \cdot 4^7 = 114688$
po ośmiu miesiącach	$7 \cdot 4^8 = 458752$

Z obliczeń wynika, że po ośmiu miesiącach liczba założonych w sklepie internetowym kont będzie większa od 150000.

Obserwacja

Zwróć uwagę na różnicę między przykładami 1 i 2.

W przykładzie pierwszym za pomocą wzoru $y = 3^x$ możemy obliczyć, ilu jest nowych chorych w kolejnych tygodniach. Aby obliczyć liczbę zarażonych wirusem w czasie kilku tygodni, musimy ustalić liczbę chorych w każdym tygodniu, a potem dodać te liczby do siebie. Z kolei w przykładzie 2 wzór $y = 7 \cdot 4^x$ pozwala od razu ustalić liczbę wszystkich kont założonych od chwili uruchomienia sklepu internetowego.

Przykład 3

W pierwszym dniu na portalu społecznościowym 17 osób udostępniło ten sam film na swoich kontach. W każdym kolejnym miesiącu liczba nowych użytkowników udostępniających ten film podwajała się, czyli rosła wykładniczo zgodnie ze wzorem:

$y = 17 \cdot 2^x$

gdzie;
y – liczba użytkowników,
x – liczba miesięcy, która upłynęła od pierwszego udostępnienia filmu.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DReWs6oW

Przykład 4

Popularny zespół muzyczny umieścił w Internecie teledysk do najnowszego singla. Liczbę wyświetleń tego filmu w kolejnych dniach umieszczono w tabeli.

Pierwszy dzień	1 dzień	2 dzień	3 dzień	4 dzień	5 dzień	6 dzień
125	375	1125	3375	9450	24570	73710

Sprawdzimy, czy liczba wyświetleń teledysku w kolejnych dniach rośnie wykładniczo.

Liczba wyświetleń filmu będzie wzrastała wykładniczo, jeżeli w kolejnych dniach liczba wyświetleń będzie rosła tyle samo razy. Aby to sprawdzić, wykonamy dzielenie:

$\frac{375}{125} = 3$

$\frac{1125}{375} = 3$

$\frac{3375}{1125} = 3$

$$\frac{9450}{3375} = 2,8$$

$$\frac{24570}{9450} = 2,6$$

$$\frac{73710}{24570} = 3$$

Zobrazujmy otrzymane wyniki w tabeli.

pierwszy dzień	1 dzień	2 dzień	3 dzień	4 dzień	5 dzień	6 dzień
125	375	1125	3375	9450	24570	73710

·3 ·3 ·3 ·2,8 ·2,6 ·3

Liczba wyświetleń teledysku w kolejnych dniach nie rośnie wykładniczo.

Wniosek

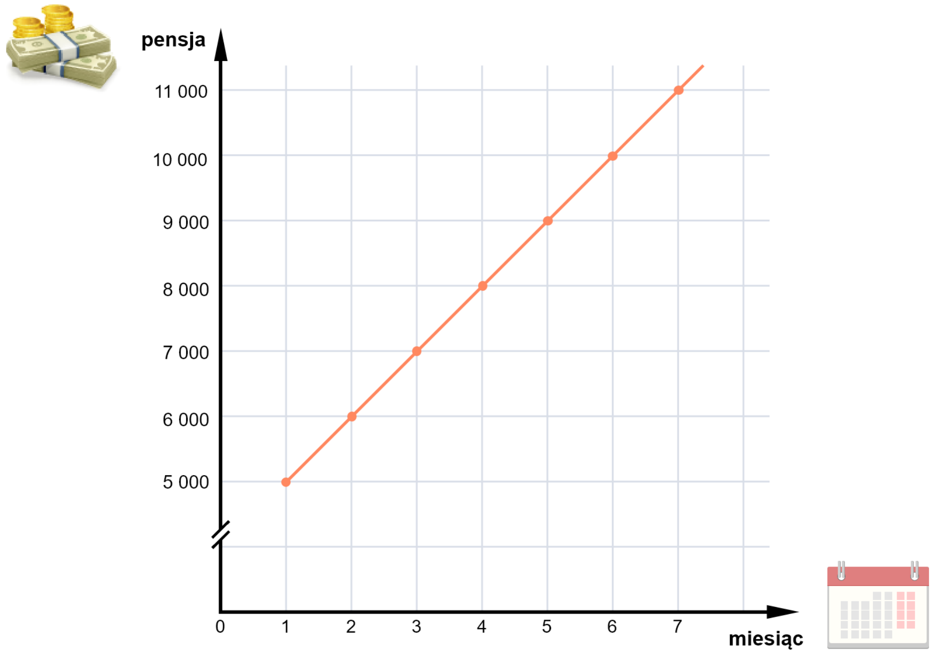
Z tego przykładu wynika bardzo ważny wniosek: aby na podstawie tabeli określić, czy wzrost jest wykładniczy, należy obliczyć, czy każda kolejna liczba rośnie tyle samo razy. Zwracamy na to szczególną uwagę, ponieważ częstym błędem jest sprawdzenie tylko pierwszych $3 - 4$ liczb lub sprawdzanie ich losowo.

Przykład 5

Dwie koleżanki Basia i Monika rozpoczęły pracę nad projektem w tym samym dniu. Basia otrzymała pensję w wysokości 5000 zł i zapewnienie, że pensja będzie rosła o 1000 zł co miesiąc. Monika otrzymała pensję 1000 zł i zapewnienie, że co miesiąc jej pensja będzie rosła o 60%. Obliczymy, po ilu miesiącach pierwszy raz pensja Moniki będzie większa od pensji Basi.

Obserwacja 1

Na wykresie przedstawiono, jak zmienia się pensja Basi z upływem czasu.



Omówione wyżej przykłady dotyczyły wzrostu wykładniczego. Przejdziemy teraz do dwóch przykładów, które będą ilustracją zaniku wykładniczego.

Przykład 6

Kartki papieru formatu A mają taki rozmiar, że jeżeli długość dłuższego boku kartki podzielimy przez długość krótszego boku, to otrzymamy $\sqrt{2}$ (pamiętając o tym, że rozmiary kartki zaokrąglamy do pełnych milimetrów).

W tabeli zestawiono rozmiary i pola powierzchni kartek formatu A.

Format	$A1$	$A2$	$A3$	$A4$	$A5$	$A6$
Wysokość (mm)	841	594	420	297	210	148
Szerokość (mm)	594	420	297	210	148	105
Pole powierzchni (mm^2)	499554	249480	124740	62370	31080	15540

Sprawdzimy, ile razy powierzchnia kartki formatu $A2$ jest mniejsza od powierzchni kartki formatu $A1$. W tym celu wykonamy dzielenie.

$$\frac{499554}{249480} \approx 2,002 \approx 2$$

Kartka formatu $A2$ jest dwa razy mniejsza od kartki formatu $A1$. Przybliżenie wynika z zaokrąglenia rozmiarów kartki do pełnych milimetrów.

Dla pozostałych rozmiarów kartek możemy wykonać podobne obliczenia.

$$\frac{249480}{124740} = 2$$

$$\frac{124740}{62370} = 2$$

$$\frac{62370}{31080} \approx 2,007 \approx 2$$

$$\frac{31080}{15540} = 2$$

Z obliczeń wynika, że kolejna kartka ma dwa razy mniejsze pole powierzchni od poprzedniej.

format	A1	A2	A3	A4	A5	A6
pole powierzchni (mm^2)	499 554	249 480	124 740	62 370	31 080	15 540
		:2	:2	:2	:2	:2

Dzielenie przez 2 można zastąpić mnożeniem przez $\frac{1}{2}$.

Format	Pole powierzchni
$A1$	499554
$A2$	$499554 \cdot \frac{1}{2} \approx 249480$
$A3$	$249480 \cdot \frac{1}{2} \approx 499554 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 499554 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx 124740$
$A4$	$124740 \cdot \frac{1}{2} \approx 499554 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 499554 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \approx 62370$
$A5$	$62370 \cdot \frac{1}{2} \approx 499554 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = 499554 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 31080$
$A6$	$31080 \cdot \frac{1}{2} \approx 499554 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = 499554 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 15540$

Zwróć uwagę, że dla formatu $A6$ wykładnik potęgi jest równy 5.

Powierzchnię kolejnych kartek można więc opisać wzorem:

$y = 499554 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

gdzie:
y – oznacza pole powierzchni kartki,
x – rodzaj kartki formatu A.

Taka funkcja malejąca opisuje **zanik wykładniczy**.

Obliczenia przytoczone w powyższym przykładzie pokrywają się z tym, co możesz zaobserwować, gdy kartkę formatu $A4$ złożysz na pół. Otrzymasz wtedy dwie kartki formatu $A5$.

Obserwacja

Korzystając z działań na potęgach, wyprowadzony wzór $y = 499554 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ możemy zapisać w postaci $y = 499554 \cdot 2^{-x+1}$.

Przykład 7

Pan Sławek kupił nowy samochód za 43000 zł. Po dwóch latach wartość samochodu spadła do 30000 zł. Z każdym kolejnym rokiem wartość pojazdu malała o 10%.

1) Wykażemy, że począwszy od trzeciego roku wartość samochodu malała wykładniczo.

2) Obliczymy, za jaką kwotę Pan Sławek mógłby ten samochód sprzedać po siedmiu latach jego użytkowania.

Ad 1)

Po dwóch latach (czyli na początku trzeciego roku) wartość samochodu była równa 30000 zł. Po upływie trzeciego roku wartość pojazdu zmalała o 10%, czyli była równa 90% wartości po dwóch latach.

$90\% \cdot 30000 = 0,9 \cdot 30000 = 27000$

W kolejnych latach wartość samochodu maleje o 10% – tak samo, jak w trzecim roku.

wartość samochodu po czterech latach: $90\% \cdot 27000 = 0,9 \cdot 27000 = 24300$

wartość samochodu po pięciu latach: $90\% \cdot 24300 = 0,9 \cdot 24300 = 21870$

Zwróć uwagę, że co roku cenę samochodu należy pomnożyć przez tę samą liczbę $0,9$. Oznacza to, że począwszy od trzeciego roku cena samochodu maleje wykładniczo.

Znajdźmy wzór według, którego zmienia się wartość pojazdu.

Ile lat minęło od zakupu	**Wartość samochodu**
3	$90\% \cdot 30000 = 0,9 \cdot 30000 = 27000$
4	$90\% \cdot 27000 = 0,9 \cdot 27000 = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 27000 = 0,9^2 \cdot 30000 =$ 243
5	$90\% \cdot 24300 = 0,9 \cdot 24300 = 0,9 \cdot 0,9^2 \cdot 30000 = 0,9^3 \cdot 30000 =$ 21

Część obliczeń w tabeli została zaznaczona kolorem. Na jej podstawie możemy ustalić wzór, według którego można obliczyć wartość samochodu w kolejnych latach. Zwróć uwagę na wykładnik potęgi przy $0,9$ i na liczbę lat, które minęły od dnia zakupu pojazdu. Różnica ta jest zawsze taka sama – równa 2.

Na tej podstawie możemy ustalić szukany wzór:

$y = 30000 \cdot 0,9^{x-2}$

gdzie:
y – oznacza wartość samochodu,
x – wiek samochodu w latach.

Ad 2)

Obliczymy, za jaką kwotę Pan Sławek mógłby ten samochód sprzedać po siedmiu latach jego użytkowania.

Metoda I**:**

Ile lat minęło od zakupu	Wartość samochodu
3	$90\% \cdot 30000 = 0,9 \cdot 30000 = 27000$
4	$90\% \cdot 27000 = 0,9 \cdot 27000 = 24300$
5	$90\% \cdot 24300 = 0,9 \cdot 24300 = 21870$
6	$90\% \cdot 21870 = 0,9 \cdot 21870 = 19683$
7	$90\% \cdot 19683 = 0,9 \cdot 19683 = 17714,70$

Metoda II**:**

Korzystamy ze wzoru wyprowadzonego w podpunkcie pierwszym.

$y = 30000 \cdot 0,9^{7-2} = 30000 \cdot 0,9^5 = 17714,70$

Wartość samochodu po siedmiu latach od zakupu jest równa $177140,70$ zł.

Słownik

wzrost wykładniczy

każda kolejna wartość jest tyle samo razy większa od poprzedniej. Funkcja rosnąca $y = b \cdot a^x,\ a > 1,\ \ b > 0$

zanik wykładniczy

każda kolejna wartość jest tyle samo razy mniejsza od poprzedniej. Funkcja malejąca $y = b \cdot a^x,\ 0 < a < 1,\ \ b > 0$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w animacji, a następnie wykonaj polecenia.

Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wzrostu i zaniku wykładniczego.

Polecenie 2

Polecenie 3

Polecenie 4

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Pani Marzena kupiła samochód za 60000 zł. Z upływem lat samochód tracił na wartości.

	w dniu zakupu	po 1 roku	po 2 latach	po 3 latach
wartość samochodu	60000	54000	48600	43740

Oblicz wartość samochodu po 6 latach od dnia zakupu.

Ćwiczenie 9

Wirus Ebola wywołuje u ludzi zespół objawów nazywanych gorączką krwotoczną. Podstawowa liczba odtwarzania dla tego wirusa jest równa 2. To oznacza, że statystycznie jedna zainfekowana tym wirusem osoba zaraża dwie inne osoby podatne na zakażenie w czasie dwóch tygodni. Oblicz liczbę zainfekowanych osób po upływie 12 tygodni, jeżeli pierwszego dnia zainfekowane były 3 osoby.

Ćwiczenie 10

Na początku marca uruchomiono sklep internetowy. W pierwszym miesiącu jego działalności zostało założonych 48 kont. Pod koniec sierpnia tego samego roku w sklepie były zarejestrowane 11664 konta. Przyjmij, że liczba kont założonych w sklepie rosła wykładniczo.

1) Oblicz, ile razy rosła liczba kont co miesiąc.

2) Jeżeli zaobserwowana tendencja się utrzyma, to ile kont będzie założonych w sklepie pod koniec roku?

Dla nauczyciela

Autor: Patryk Wolny

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzrost i zanik wykładniczy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje wzrost i zanik wykładniczy na podstawie danych z tabeli, wzoru, opisu sytuacji
- odczytuje informacje (interpretuje) wzór opisujący wzrost lub zanik wykładniczy
- tworzy wzór, który opisuje sytuację opisaną słownie lub na podstawie danych w tabeli (modelowanie)
- bada, czy wzrost lub zanik są wzrostem lub zanikiem wykładniczym
- interpretuje wzrost lub zanik wykładniczy jako funkcję wykładniczą rosnącą lub malejącą
- przeprowadza proste rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda problemowa
- burza mózgów
- praca z tekstem
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- projektor multimedialny/ tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją

1. Uczniowie przed lekcją poszukują informacji na temat liczby zachorowań podczas epidemii gorączki krwotocznej Ebola.
2. Nauczyciel prosi uczniów o powtórzenie wiadomości z funkcji wykładniczej.

Faza wstępna:

1. Przypomnienie własności funkcji wykładniczej (wzór, monotoniczność) i jej zastosowań-burza mózgów.
2. Podanie przez nauczyciela tematu lekcji oraz celów zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z Przykładami 1, 2 i 4 z części „Przeczytaj”. Razem z nauczycielem omawiają różnice między Przykładami 1 i 2.
2. Uczniowie rozwiązują samodzielnie Przykład 3. Analizują rozwiązanie z nauczycielem.
3. Uczniowie zapoznają się z poleceniem z Przykładu 5. Proponują swoje pomysły na rozwiązanie zadania. Oglądają animację. Nauczyciel zwraca uwagę na różnice między wzrostem liniowym i wykładniczym. Uczniowie formułują wniosek, że jeżeli porównujemy ze sobą dwie wielkości, z których pierwsza rośnie liniowo, a druga –

wykładniczo, to dla odpowiednio dużych argumentów ta druga wielkość będzie rosła szybciej.
4. Uczniowie zapoznają się z Przykładem 6, a następnie wraz z nauczycielem dyskutują o Przykładzie 7.
5. Zebranie informacji na temat wzrostu i zaniku wykładniczego.
6. Uczniowie rozwiązują w grupach ćwiczenia od 1 do 6 z sekcji „Sprawdź się”. Grupy, które zakończą pracę szybciej, zastanawiają się nad rozwiązaniem ćwiczenia 10 z sekcji „Sprawdź się”. Jedna z grup prezentuje rozwiązanie na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem zadań z sekcji „Sprawdź się”.
2. Podsumowanie informacji na temat wzrostu i zaniku wykładniczego.

Praca domowa:

- Uczniowie zapoznają się z animacją i rozwiązują polecenia z nią związane.
- Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7, 8 i 9 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Funkcja wykładnicza i jej własności
- Zastosowanie funkcji wykładniczej

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą skorzystać z animacji do powtórzenia wiadomości przed sprawdzianem. Nauczyciel może wykorzystać animację w lekcji „ Zastosowanie krzywych wykładniczych i logarytmicznych”.