



Pierwiastki wielokrotne wielomianu. Liczba pierwiastków wielomianu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Pierwiastki wielokrotne wielomianu. Liczba pierwiastków wielomianu

Źródło: Tim Evans, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wiemy, że wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych. Można go zapisać w postaci iloczynu stałej niezerowej, dwumianów postaci $x - a_k$ (gdzie a_k jest pierwiastkiem wielomianu) oraz ewentualnie nierozkładalnych wielomianów stopnia drugiego. Wprowadzenie liczb zespolonych pozwoliłoby uniknąć wyjątku z wielomianami stopnia drugiego – bo w liczbach zespolonych zawsze można je rozłożyć na dwumiany pierwszego stopnia, ale pojęcie liczb zespolonych wykracza poza szkolne podstawy programowe.

W tej lekcji skupimy się na wielomianach, w których rozkładzie na czynniki dwumian występuje więcej niż raz. Jednym z najprostszych przykładów jest wielomian $W(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$.

Ciekawostka

Pojęcie liczb zespolonych wiąże się z wprowadzeniem tzw. jednostki urojonej i , czyli liczby, której kwadratem jest (-1) . Dla liczb rzeczywistych jest to niemożliwe, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny.

Twoje cele

- Zapoznasz się z pojęciem krotności pierwiastka wielomianu.

- Dowiesz się, jak traktować pierwiastki wielokrotne przy ustalaniu liczby pierwiastków wielomianu.

Przeczytaj

Przykład 1

Wyznamy wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu

$$W(x) = 2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 11x + 3.$$

- Zaczniemy od sprawdzenia, czy wielomian ma pierwiastki całkowite, których szukamy wśród dzielników całkowitych wyrazu wolnego 3.
- Łatwo stwierdzić, że $W(1) = 0$, możemy więc po wykonaniu dzielenia zapisać, że $W(x) = (x - 1)(2x^3 - 7x^2 + 8x - 3)$.
- Sprawdźmy, czy wielomian $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$ ma pierwiastki całkowite. Łatwo obliczyć, że pierwiastkiem tego wielomianu jest 1.
- Po wykonaniu kolejnego dzielenia możemy więc zapisać, że $W(x) = (x - 1)^2(2x^2 - 5x + 3)$.
- Stosując metody rozkładu trójmianu kwadratowego na czynniki możemy zauważyć, że $2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)(x - \frac{3}{2})$, więc $W(x) = 2(x - 1)^3(x - \frac{3}{2})$.
- **Pierwiastkami wielomianu** $W(x)$ są zatem liczby 1 i $\frac{3}{2}$, przy czym 1 jest określane jako pierwiastek potrójny, inaczej pierwiastek trzykrotny lub pierwiastek mający krotność 3.

Definicja: Pierwiastek wielokrotny

Liczba a jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu $W(x)$ gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x - a)^k$, ale nie jest podzielny przez $(x - a)^{k+1}$. Możemy wtedy powiedzieć, że k jest krotnością pierwiastka a .

Przykład 2

Wskażmy przykład wielomianu dziesiątego stopnia, który ma pierwiastek sześciokrotny 5 oraz pierwiastek czterokrotny (-3) . Ile takich wielomianów istnieje?

- Przykładowy wielomian spełniający warunki zadania to $W(x) = (x - 5)^6(x + 3)^4$.
- Możemy oczywiście zapisać go w postaci sumy jednomianów, sprowadzenie do tej postaci bez użycia narzędzi elektronicznych byłoby jednak niezwykle żmudne:
 $W(x) = x^{10} - 18x^9 + 69x^8 + 488x^7 - 3534x^6 - 3180x^5 + 57250x^4 +$
 $-15000x^3 - 421875x^2 + 168750x + 1265625.$
- Warunki zadania spełnia nieskończenie wiele wielomianów, ale wszystkie będą postaci $V(x) = a(x - 5)^6(x + 3)^4$, gdzie a może być dowolną liczbą różną od zera.

Przykład 3

Ustalmy krotności wszystkich pierwiastków wielomianu

$$W(x) = -3(x-3)(x^2-3)(x^2-6x+9)(x^2-9).$$

- Zauważmy, że używając wzorów skróconego mnożenia możemy zapisać, że

$$W(x) = -3(x-3)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-3)^2(x-3)(x+3)$$

czyli po pogrupowaniu

$$W(x) = -3(x-3^4)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x+3).$$

- Wielomian ma zatem pierwiastek czterokrotny 3 oraz trzy pierwiastki pojedyncze: $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ i -3 .

Przykład 4

Wykażmy, że liczba (-2) jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^6 + 3x^5 - 5x^4 - 25x^3 - 30x^2 - 28x - 24.$$

Dowód będzie się składać z dwóch faz.

Czy wielomian jest podzielny przez $(x+2)^3$?

- Aby uzyskać odpowiedź możemy na przykład podzielić pisemnie wielomian $W(x)$ przez $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.
- Możemy też wykonać trzykrotne dzielenie przez $x+2$ za pomocą schematu Hornera.
- Każdy może wybrać metodę, którą uzna za wygodniejszą. Po wykonaniu dzielenia okazuje się, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x+2)^3$ bez reszty, a w wyniku dzielenia uzyskamy $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.
- Z tego wnioskujemy, że krotność pierwiastka (-2) wynosi co najmniej 3.

Czy wielomian jest podzielny przez $(x+2)^4$?

- Jeśli (-2) ma być pierwiastkiem trzykrotnym, to wielomian $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ nie może być podzielny przez $x+2$.
- Dla sprawdzenia podzielności wykorzystamy twierdzenie Bézouta obliczając $Q(-2)$.
- $Q(-2) = -8 - 12 - 2 - 3 \neq 0$.
- Zatem wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez $(x+2)^4$.

Podsumowanie

Z powyższych obliczeń wnioskujemy, że (-2) jest pierwiastkiem trzykrotnym wielomianu $W(x)$.

Możemy uwzględnić pojęcie **pierwiastków wielokrotnych** przy określaniu **liczby pierwiastków wielomianu**:

Własność: Liczba pierwiastków wielomianu

- Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych z uwzględnieniem ich krotności (pierwiastki wielokrotne liczymy tyle razy, ile wynosi ich krotność).
- Wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Słownik

liczba pierwiastków wielomianu

- wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych z uwzględnieniem ich krotności (pierwiastki wielokrotne liczymy tyle razy, ile wynosi ich krotność)
- wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty

pierwiastek wielokrotny

liczba a jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu $W(x)$ gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x - a)^k$, ale nie jest podzielny przez $(x - a)^{k+1}$. Możemy wtedy powiedzieć, że k jest krotnością pierwiastka a

pierwiastek wielomianu

dla wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej x to liczba x_0 taka, że $W(x_0) = 0$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z zaprezentowanym w animacji pojęciem wielokrotnego pierwiastka wielomianu i przeanalizuj zaprezentowane przykłady zadań.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DChPOvHKc>

Film nawiązujący do zagadnienia pierwiastków wielokrotnych.

Polecenie 2

Wyznacz pierwiastki wielomianu

$$W(x) = (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x)(x^3 - x)$$

i określ ich krotności.

Polecenie 3

Wyznacz pierwiastki wielomianu

$$W(x) = (x^6 - 64)(x^4 - 16)$$

i określ ich krotności.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest wielomian $W(x) = -2x^5(x - 7)^{11}(x + 3)^6$. Przypisz każdemu pierwiastkowi jego krotność.

$x = 0$

pierwiastek jedenastokrotny

pierwiastek sześciokrotny

pierwiastek pięciokrotny

$x = 7$

$x = -3$

Ćwiczenie 2



Kolorem zielonym oznacz zdania prawdziwe.

Kolorem czerwonym oznacz zdania fałszywe.

- {Wielomian stopnia piątego nie może mieć pierwiastka o krotności 7.}
- {Jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x - 4)^5$, to liczba 4 na pewno jest pierwiastkiem tego wielomianu o krotności 5.}
- {Jeżeli w wielomianie stopnia siódmego wyraz wolny i współczynnik przy x^1 są równe 0, zaś pozostałe współczynniki są różne od 0, to 0 jest pierwiastkiem dwukrotnym.}

Ćwiczenie 3



Jeżeli wiadomo, że liczba a jest pięciokrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, wskaż zdania prawdziwe.

☐ Liczba a jest pięciokrotnym pierwiastkiem wielomianu $(W(x))^2 + W(x)$.

☐ Liczba a jest dziesięciokrotnym pierwiastkiem wielomianu $(W(x))^2$.

☐ Liczba a jest pięciokrotnym pierwiastkiem wielomianu $\frac{1}{2}W(x)$.

☐ Liczba a jest dziesięciokrotnym pierwiastkiem wielomianu $2 \cdot W(x)$.

☐ Liczba a jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) + 3$.

Ćwiczenie 4



Wskaż wielomian, dla którego $\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

☐ $x^4 - 9$

☐ $x^2 + \sqrt{3}x - 6$

☐ $x^2 - \sqrt{3}x - 6$

☐ $x^8 - 81$

☐ $x^4 - 6x^2 + 9$

Ćwiczenie 5



Wśród podanych wielomianów wskaż wszystkie, które mają przynajmniej jeden pierwiastek trzykrotny.

☐ $(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3)$

☐ $(x^2 - 1)(x^3 - 1)(5x^7 - 3x^5 - 2)$

☐ $(x + 5)^3(x^2 + x + 3)$

☐ $(x + 2)(x^2 + 4x + 4)$

☐ $(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4)(x^2 - x - 2)$

☐ $x^{61} - 61x^{27} + 27x^3$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij brakujące współczynniki tak, by uzyskać wielomian, w którym -2 jest pierwiastkiem trzykrotnym.

$$W(x) = 2x^3 + \boxed{} x^2 + \boxed{} x + \boxed{}$$

Ćwiczenie 7



Czy wielomian będący iloczynem trzech poniższych czynników ma pierwiastek trzykrotny?

$(x + 1)$	$(3x - 1)$	$(x^2 - \frac{1}{9})$
$(4 - x^2)$	$(x^3 + x^2)$	$(\frac{1}{2}x - 1)$
$(2 - 6x)$	$(3x - 6)$	$(2x + 6)$
$(x + 3)$	$(x^2 - 9)$	$(x + 1)$

Ćwiczenie 8



Dane są wielomiany

- $F(x) = (x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + 1) \dots (x^{20} + 1)$
- $G(x) = (x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1) \dots (x^{20} - 1)$

Uzupełnij zdania:

- Liczba 1 wielomianu $F(x)$.
- Liczba 1 wielomianu $G(x)$.
- Liczba -1 wielomianu $F(x)$.

jest pierwiastkiem dwudziestokrotnym

jest pierwiastkiem jednokrotnym

nie jest pierwiastkiem

jest pierwiastkiem o krotności 210

jest pierwiastkiem dziesięciokrotnym

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pierwiastki wielokrotne wielomianu. Liczba pierwiastków wielomianu

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje krotność pierwiastka wielomianu;
- ustala liczbę pierwiastków wielomianu przy pierwiastkach wielokrotnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Przedstawienie tematu zajęć: „Pierwiastki wielokrotne. Liczba pierwiastków wielomianu” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja” i poleceniem numer 1 – „Zapoznaj się z zaprezentowanym w animacji pojęciem wielokrotnego pierwiastka wielomianu i przeanalizuj zaprezentowane przykłady zadań.” Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują w parach ćwiczenia 2–8. Uczniowie z trzech pierwszych par, którzy rozwiążą najszybciej ćwiczenia tłumaczą na forum klasy poszczególne rozwiązania. Za aktywność otrzymują oceny.

Faza podsumowująca:

Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 1 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można potraktować jako zadania domowe mogące pomóc w powtórzeniu materiału lekcji.