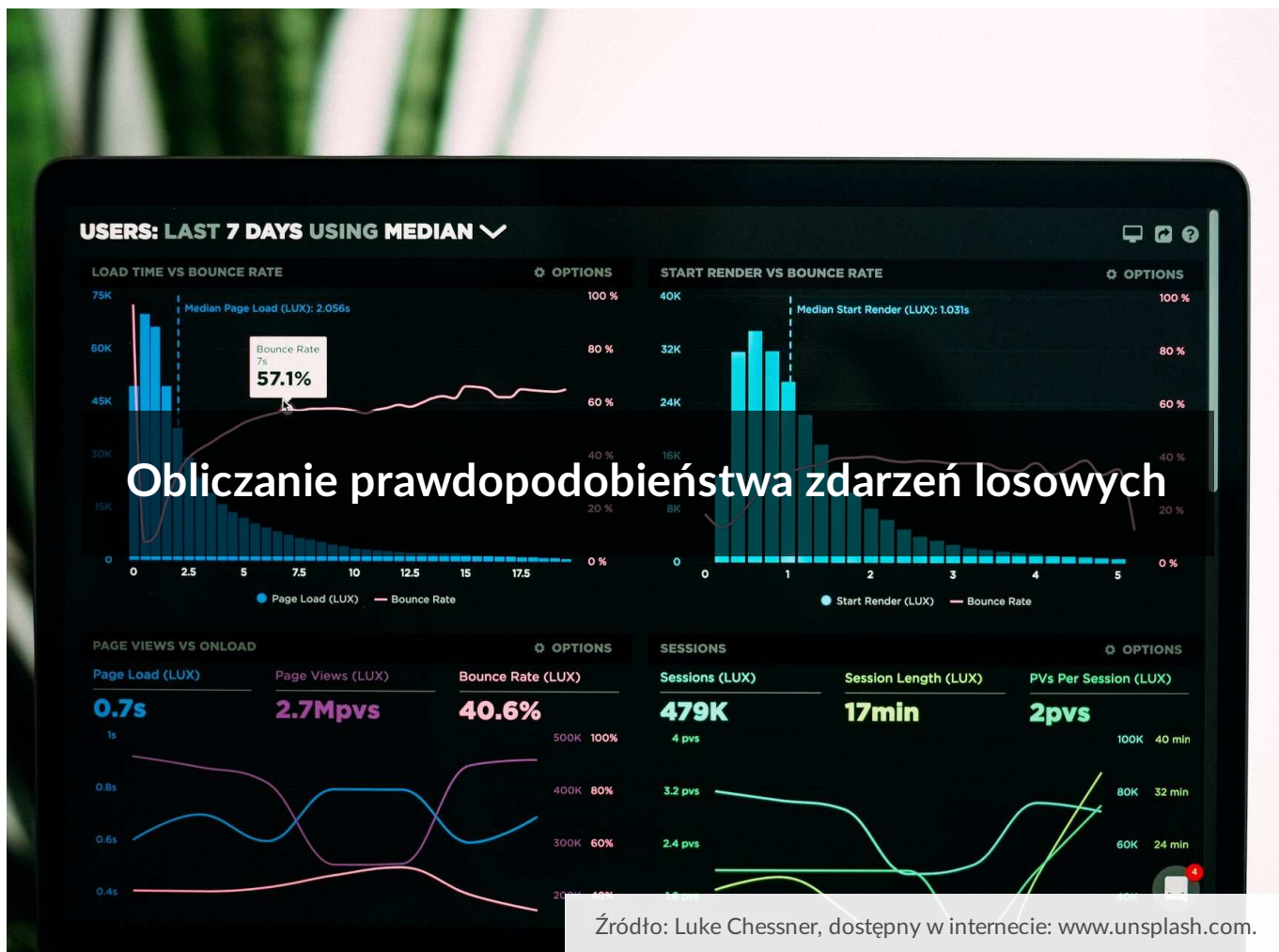




Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń losowych

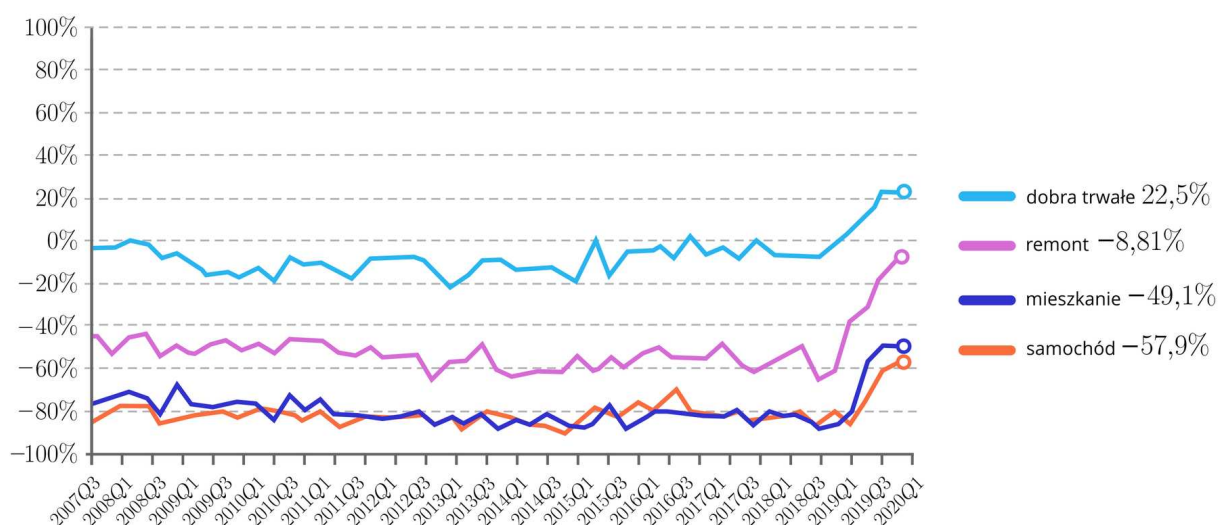
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Słowo prawdopodobieństwo jest interpretowane na wiele sposobów. Jedni twierdzą, że prawdopodobieństwo mierzy fizyczną tendencję wystąpienia jakiegoś zdarzenia, inni uważają, że prawdopodobieństwo jest miarą, jak mocno ktoś wierzy, że dane zdarzenie wystąpi.

Słowo prawdopodobieństwo używane jest w różnych kontekstach. Można na przykład powiedzieć, że prawdopodobnie zaraz zacznie padać, bo niebo pokryte jest gęstymi chmurami. Jest to ujęcie prawdopodobieństwa na podstawie wcześniejszych obserwacji.

Wskaźnik skłonności (prawdopodobieństwa) do dokonywania poważnych wydatków (luty 2020)



Możemy rozważać też prawdopodobieństwo skłonności, oparte na prawie wielkich liczb. Prawdopodobieństwo jest też jednym z kluczowych elementów w inwestowaniu na rynkach finansowych. Pozwala ono ocenić, czy dana inwestycja stanowi dobrą okazję do osiągnięcia zysku, jak również czy potencjalny zysk usprawiedliwia podjęte ryzyko. Niestety, ludzie mają skłonność do podejmowania nieracjonalnych decyzji, co wynika z subiektywnej oceny prawdopodobieństwa.

Warto więc poznać choć najprostsze sposoby obliczania prawdopodobieństwa zajścia niektórych zdarzeń losowych, z zastosowaniem prawdopodobieństwa klasycznego. A tym właśnie będziemy zajmować się w tym materiale.

Twoje cele

- Obliczysz prawdopodobieństwo danego zdarzenia, korzystając z klasycznej definicji.
- Dobierzesz odpowiedni model probabilistyczny do zadania z kontekstem realistycznym.
- Rozwiążesz zadanie probabilistyczne za pomocą aparatu algebraicznego.

Przeczytaj

Przeanalizujemy teraz kilka konwencjonalnych problemów, które można rozwiązać z zastosowaniem **prawdopodobieństwa klasycznego**. Przypomnimy więc najpierw definicję, z której będziemy korzystać.

Definicja: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych.

Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

W zadaniach będziemy zakładać, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

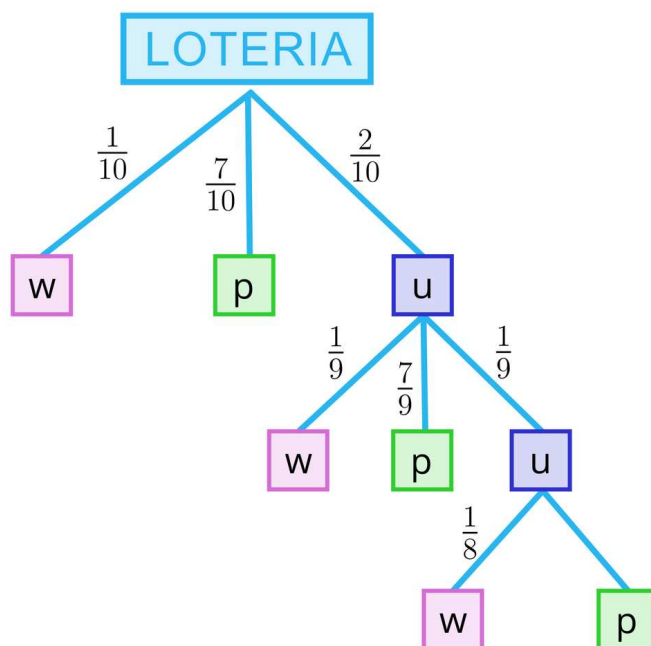
Przykład 1

Wśród dziesięciu losów na loterii znajduje się jeden los wygrywający i dwa losy uprawniające do wyciągnięcia następnego losu. Obliczmy, jakie jest prawdopodobieństwo wygranej przy zakupie jednego losu i maksymalnym wykorzystaniu uprawnień?

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na wygranej przy zakupie jednego losu i maksymalnym wykorzystaniu uprawnień.

Przedstawimy graficznie przebieg doświadczenia.



Z grafu odczytujemy, że mamy trzy możliwości wygranej.

Pierwsza możliwość:

- prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{10}$ (uzyskanie wygranej w pierwszym losowaniu).

Druga możliwość:

- prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$ (uzyskanie wygranej w drugim losowaniu).

Trzecia możliwość:

- prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{720}$ (uzyskanie wygranej w trzecim losowaniu).

Prawdopodobieństwo finalne jest równe sumie tych prawdopodobieństw.

$$P(A) = \frac{1}{10} + \frac{2}{90} + \frac{2}{720}$$

$$P(A) = \frac{72}{720} + \frac{16}{720} + \frac{2}{720}$$

$$P(A) = \frac{90}{720} = \frac{1}{8}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wygranej przy zakupie jednego losu i maksymalnym wykorzystaniu uprawnień jest równe $\frac{1}{8}$.

Przykład 2



Na sznurze powieszonych jest pięć par skarpetek. Zdejmujemy ze sznura w sposób losowy cztery skarpetki. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wybranych skarpetek nie ma ani jednej pary.

Pięć par skarpetek, to dziesięć sztuk skarpetek, z których losujemy cztery.

$$|\Omega| = \binom{10}{4} = 210$$

Mamy 5 możliwości wylosowania takich skarpetek, aby nie było wśród nich ani jednej pary.

Wśród wybranych skarpetek są:

- a. cztery skarpetki są z prawej nogi,
- b. jedna skarpetka z lewej nogi trzy z prawej (nie tworzące pary),
- c. dwie skarpetki z lewej nogi, dwie z prawej (nie tworzące pary),
- d. trzy skarpetki z lewej nogi, jedna z prawej (nie tworzące pary),
- e. cztery skarpetki z lewej nogi.

Zatem liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu: S – wśród wybranych skarpetek nie ma ani jednej pary, jest równa:

$$|S| = \binom{5}{0} \binom{5}{4} + \binom{5}{1} \binom{4}{3} + \binom{5}{2} \binom{3}{2} + \binom{5}{3} \binom{2}{1} + \binom{5}{4} \binom{1}{0}$$

$$|S| = 5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 1 + 5 = 80$$

Wyznaczamy szukane prawdopodobieństwo.

$$P(A) = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wśród wybranych skarpetek nie ma ani jednej pary jest równe $\frac{8}{21}$.

Przykład 3



Do finału mistrzostw w akrobatyce cyrkowej zakwalifikowało się 10 zawodniczek.

Spośród zawodniczek wylosowano trzy, które jako pierwsze mają zaprezentować swoje umiejętności.

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że numer jednej z wylosowanych zawodniczek jest równy sumie numerów dwóch pozostałych zawodniczek.

Zdarzeniami elementarnymi są trzelementowe podzbiory zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 10\}$.

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120$$

Wyznaczamy zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzenia A .

Numer jednej z wylosowanych zawodniczek jest równy sumie numerów dwóch pozostałych zawodniczek, jeżeli suma ta jest równa:

- a. $10 (9 + 1, 8 + 2, 7 + 3, 6 + 4)$ – cztery możliwości,
- b. $9 (8 + 1, 7 + 2, 6 + 3, 5 + 4)$ – cztery możliwości,
- c. $8 (7 + 1, 6 + 2, 5 + 3)$ – trzy możliwości,
- d. $7 (6 + 1, 5 + 2, 4 + 3)$ – trzy możliwości,
- e. $6 (5 + 1, 4 + 2)$ – dwie możliwości,
- f. $5 (4 + 1, 3 + 2)$ – dwie możliwości,
- g. $4 (3 + 1)$ – jedna możliwość,
- h. $3 (2 + 1)$ – jedna możliwość.

Zatem

$$|A| = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 20$$

Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że numer jednej z wylosowanych zawodniczek jest równy sumie numerów dwóch pozostałych zawodniczek jest równe $\frac{1}{6}$.

Wiele zadań z rachunku prawdopodobieństwa prowadzi do rozwiązywania nierówności lub równań, w tym kwadratowych. Należy wtedy pamiętać, że uzyskane liczby muszą spełniać warunki zakładane w treści zadania. Z reguły uzyskane liczby powinny być dodatnie i wymierne.

Przykład 4

Niech k będzie liczbą naturalną taką, że $3 < k \leq 20$. Spośród liczb $1, 2, 3, \dots, 20$ losujemy trzy liczby bez zwracania. Prawdopodobieństwo tego, że największa z wylosowanych liczb jest równa k wynosi $\frac{3}{76}$. Wyznamy liczbę k .

Zdarzeniami elementarnymi są trzywyrazowe podzbiory zbioru dwudziestoelementowego.

Zatem

$$|\Omega| = \binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!}$$

$$|\Omega| = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140$$

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że największa z wylosowanych liczb jest równa k .

Jeśli największa z wylosowanych liczb jest równa k , to pozostałe dwie liczby są mniejsze od k . Zatem wybieramy je spośród $k - 1$ liczb.

$$|A| = \binom{k-1}{2} = \frac{(k-1)!}{2! \cdot (k-3)!}$$

$$|A| = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

Z powyższych rozważań wynika, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}{1140} = \frac{(k-1)(k-2)}{2280}$$

Z treści zadania wynika, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $\frac{3}{76}$.

Otrzymujemy więc równanie

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2280} = \frac{3}{76}$$

Z otrzymanego równania wyznaczamy k .

$$\frac{k^2 - 3k + 2}{2280} = \frac{3}{76} \quad | \cdot 76$$

$$k^2 - 3k + 2 = 90$$

$$k^2 - 3k - 88 = 0$$

$$\Delta = 361$$

$$\sqrt{\Delta} = 19$$

$$k_1 = \frac{3-19}{2} = -8 < 0 - \text{liczba jest ujemna, nie spełnia więc warunków zadania}$$

$$k_2 = \frac{3+19}{2} = 11$$

Liczba 11 spełnia warunek zakładany w treści zadania:

$$3 < 11 \leq 20$$

Odpowiedź:

Liczba k jest równa 11.

Przykład 5

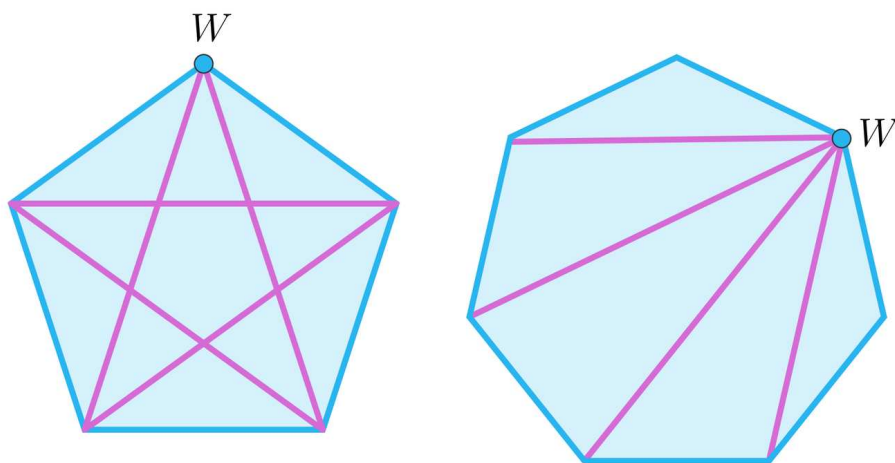
Dany jest $2n + 1$ – kąt foremny ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$). Wybieramy w sposób losowy trzy dowolne wierzchołki tego trójkąta i tworzymy z nich trójkąt. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że środek okręgu opisanego na tym wielokącie znajduje się we wnętrzu powstałego trójkąta.

Wybieramy trzy spośród $2n + 1$ wierzchołków. Zatem:

$$|\Omega| = \binom{2n+1}{3}$$

$$|\Omega| = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Obliczymy najpierw prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego A' – środek okręgu opisanego na wielokącie nie należy do powstałego trójkąta.



Jeśli wybierzemy dowolny wierzchołek W wielokąta, to istnieje dokładnie n wierzchołków wielokąta o tej własności, że wybierając dowolne dwa z nich otrzymujemy trójkąt o wierzchołku kąta rozwartego w punkcie W .

Zauważmy, że to właśnie te trójkąty nie zawierają środka okręgu opisanego na wielokącie. Ich liczba jest równa $(2n + 1) \cdot \binom{n}{2}$. Czyli:

$$|A'| = (2n + 1) \cdot \binom{n}{2}$$

$$|A'| = (2n + 1) \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia jest równe

$$P(A') = \frac{n(2n+1)(n-1)}{2} : \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$P(A') = \frac{n(2n+1)(n-1)}{2} \cdot \frac{3}{n(2n-1)(2n+1)} = \frac{3 \cdot (n-1)}{2 \cdot (2n-1)}$$

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że środek okręgu opisanego na tym wielokącie znajduje się we wnętrzu powstałego trójkąta.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A) = 1 - \frac{3 \cdot (n-1)}{2 \cdot (2n-1)} = \frac{4n-2-3n+3}{2 \cdot (2n-1)}$$

$$P(A) = \frac{n+1}{2 \cdot (2n-1)}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że środek okręgu opisanego na tym wielokącie znajduje się we wnętrzu powstałego trójkąta jest równe $\frac{n+1}{2 \cdot (2n-1)}$.

Słownik

klasyczna definicja prawdopodobieństwa

niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych; prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją pokazującą zastosowanie wzoru na iloczyn zdarzeń, a następnie rozwiąż polecenie 2.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11NCygg7>

Film nawiązujący do zagadnienia iloczynu zdarzeń.

Polecenie 2

Spośród liczb $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ losujemy jedną liczbę, a drugą liczbę spośród liczb $-2, -1, 1, 2, 3, 4$. Oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. W torbie listonosza są listy i kartki pocztowe – razem n sztuk. Listów jest m ($m < n$). Listonosz wyciąga z torby w sposób losowy k sztuk przesyłek ($k < n - m$). Prawdopodobieństwo tego, że wśród nich znajdzie się dokładnie t listów ($t \leq k$, $t \leq m$) jest równe:

☐ $\frac{\binom{m}{t}\binom{n}{k}}{\binom{n}{k}}$

☐ $\frac{\binom{m}{t}\binom{n}{t}}{\binom{n}{k}}$

☐ $\frac{\binom{m}{t}\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$

☐ $\frac{\binom{m}{t}\binom{n-m}{k-t}}{\binom{n}{k}}$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Z liczb $1, 2, 3, \dots, n$ wybieramy losowo dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że jedna z nich będzie mniejsza od liczby k , a druga większa od liczby k ($1 < k < n$).

☐ $\frac{k(n-k)}{n(n-1)}$

☐ $\frac{2k(n-1)}{n(n-1)}$

☐ $\frac{2 \cdot (k-1)(n-k)}{n(n-1)}$

☐ $\frac{(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$

Ćwiczenie 3



Winda z sześcioma pasażerami zatrzymuje się na dziewięciu piętrach.

Zdecyduj czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe przeciągnij do tabeli poprawną odpowiedź.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wszystkie osoby wysiądą na różnych piętrach jest równe $(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) : 9^6$, Prawdopodobieństwo zdarzenia, że każdy wysiądzie na innym piętrze jest równe $1 : 9$, Prawda, Fałsz

Zdanie	Prawda czy fałsz
Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wszystkie osoby wysiądą na różnych piętrach jest równe $(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) : 9^6$	
Prawdopodobieństwo zdarzenia, że każdy wysiądzie na innym piętrze jest równe $1 : 9$	

Ćwiczenie 4



Z talii 52 kart losujemy karty. Połącz w pary zdarzenie oraz przybliżoną wartość prawdopodobieństwa zajścia tego zdarzenia.

W losowaniu trzech kart wylosowanie trzech dam.

0,003

W losowaniu dwóch kart, wylosowanie dwóch dam.

0,04

W losowaniu czterech kart wylosowanie czterech dam.

0,21

W jednokrotnym losowaniu wylosowanie damy.

0,44

Ćwiczenie 5



Na skwerze rosną dwie sosny, na których łącznie siedzi dziesięć ptaków. Uzupełnij obliczenia prawdopodobieństwa tego, że na każdym drzewie siedzi tyle samo ptaków. Przeciągnij odpowiednie liczby.

Zdarzeniami elementarnymi są -wyrazowe wariacje z powtórzeniami zbioru -elementowego.

$$|\Omega| = \text{}.$$

Zdarzeniami sprzyjającymi zdarzeniu A – na każdym drzewie siedzi tyle samo ptaków są -elementowe kombinacje zbioru -elementowego.

$$|A| = \text{}.$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A .

$$P(A) = \text{} : \text{}$$

Ćwiczenie 6



W bombonierce są czekoladki miętowe, karmelowe i malinowe. Czekoladek karmelowych jest o 2 więcej niż karmelowych. Czekoladki karmelowe stanowią 25% czekoladek miętowych.

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia z pełnej bombonierki czekoladki malinowej jest równe $\frac{3}{13}$. Obliczmy ile było wszystkich czekoladek.

Poukładaj w odpowiedniej kolejności rozwiązanie zadania.

Mnożymy „na krzyż” wyrażenia występujące w równaniu.



Wszystkich czekoladek jest $6x + 2$.



Wyznaczamy liczbę wszystkich czekoladek.



$$x = 4$$



Rozwiązujemy otrzymane równanie.



$$13 \cdot (x + 2) = 3 \cdot (6x + 2)$$



$$6 \cdot 4 + 2 = 26$$



$$5x = 20$$



Zapisujemy odpowiednie równanie.



$$13x + 26 = 18x + 6$$



Otrzymana liczba jest naturalna i nieujemna, spełnia zatem warunki zadania.



Odpowiedź: wszystkich czekoladek było 26.



$$\frac{x+2}{6x+2} = \frac{3}{13}$$



Oznaczmy:

x – liczba czekoladek karmelowych,



$x + 2$ – liczba czekoladek malinowych,
 $4x$ – liczba czekoladek miętowych.

Ćwiczenie 7



W cukierni, w której znajdowało się n kobiet i czterech mężczyzn, z okazji urodzin właściciela, rozlosowano dwa torty. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że oba torty otrzymały kobiety jest równe $\frac{1}{3}$. Oblicz ile było kobiet.

Ćwiczenie 8



W sali kinowej znajduje się $n + t$ miejsc siedzących ($n \in \mathbb{N}_+$, $n \geq 10$, $t \in \mathbb{N}_+$). Do sali wchodzi n osób i siada w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że dziesięć ustalonych miejsc zostanie zajętych.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń losowych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo danego zdarzenia, korzystając z klasycznej definicji
- dobiera odpowiedni model probabilistyczny do zadania z kontekstem realistycznym
- rozwiązuje zadanie probabilistyczne za pomocą aparatu algebraicznego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe
- quiz zadaniowy

Formy pracy:

- praca w grupach
- indywidualna praca uczniów
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie – ochotnicy biorą udział w mini quizie, którego celem jest przypomnienie wiadomości związanych z rachunkiem prawdopodobieństwa. Pytania w domu przygotowało dwóch uczniów, wskazanych uprzednio przez nauczyciela. Uczniowie – zawodnicy odpowiadają na przemian na zadawane pytania (lub losują pytania). Jeśli uczeń nie potrafi odpowiedzieć na pytanie – odpada z gry. Wygrywa osoba, która pozostaje jako ostatnia.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie najpierw indywidualnie zapoznają się z animacją, a następnie w małych grupach pracują metodą stolików zadaniowych. Na każdym stoliku znajduje się kartka z zapisanym jednym z przykładów podanych w sekcji „Przeczytaj”. Zadaniem grupy jest rozwiązanie tego zadania i porównanie wyniku z rozwiązaniem (grupy korzystają przy tym z komputera).
2. Teraz uczniowie w parach rozwiązują zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy grup opowiadają o odkrytych przez ich grupy sposobach rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa (jeżeli różnią się od tych zaprezentowanych w sekcji „Przeczytaj”), dzielą się pomysłami na najskuteczniejszą metodę rozwiązywania takich zadań.
2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest poszukanie w dostępnych im źródłach informacji wiadomości na temat paradoksów związanych z rachunkiem prawdopodobieństwa i przygotowanie prezentacji jednego z nich. Przygotowane prezentacje można będzie wykorzystać jako wstępy lub podsumowania zajęć, w miarę zdobywania przez wszystkich uczniów wiadomości potrzebnych do ich zrozumienia.

Materiały pomocnicze:

[Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych](#)

Wskazówki metodyczne:

Z animacją mogą uczniowie zapoznać się, pracując w grupach i wykorzystać jako jedną z prostszych, alternatywnych metod ustalania liczby zdarzeń sprzyjających w rozwiązywanych zadaniach.