Warunek prostopadłości prostych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Warunek prostopadłości prostych

Źródło: Logan Armstrong, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Potrafisz już opisać równaniem kierunkowym prostą, która nie jest równoległa do osi Y oraz narysować zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają równanie $y = ax + b$. W tej lekcji poznasz pewną ważną zależność, która ma wiele zastosowań w geometrii analitycznej.

Twoje cele

- Rozpoznasz równania prostych prostopadłych.
- Wyznaczysz równanie prostej prostopadłej do danej prostej spełniającej określone warunki.
- Wyznaczysz wartości parametrów, przy których proste opisane danymi równaniami są prostopadłe.

Przeczytaj

Rozważmy proste o równaniach:

$$y = a_1x + b_1 \text{ i } y = a_2x + b_2.$$

Przyjmijmy założenia jak na rysunku poniżej. Załóżmy, że są one prostopadłe. Oznacza to, że kąty nachylenia tych prostych do osi X różnią się o 90°.

Przypomnijmy, że $a_1 = \operatorname{tg}\alpha$ oraz $a_2 = \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ)$. Korzystając z tożsamości trygonometrycznych, możemy wykonać poniżesz przekształcenia:

$$a_2 = \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Wynika stąd

$$a_1 \cdot a_2 = \operatorname{tg}\alpha \cdot (-\operatorname{ctg}\alpha) = -1.$$

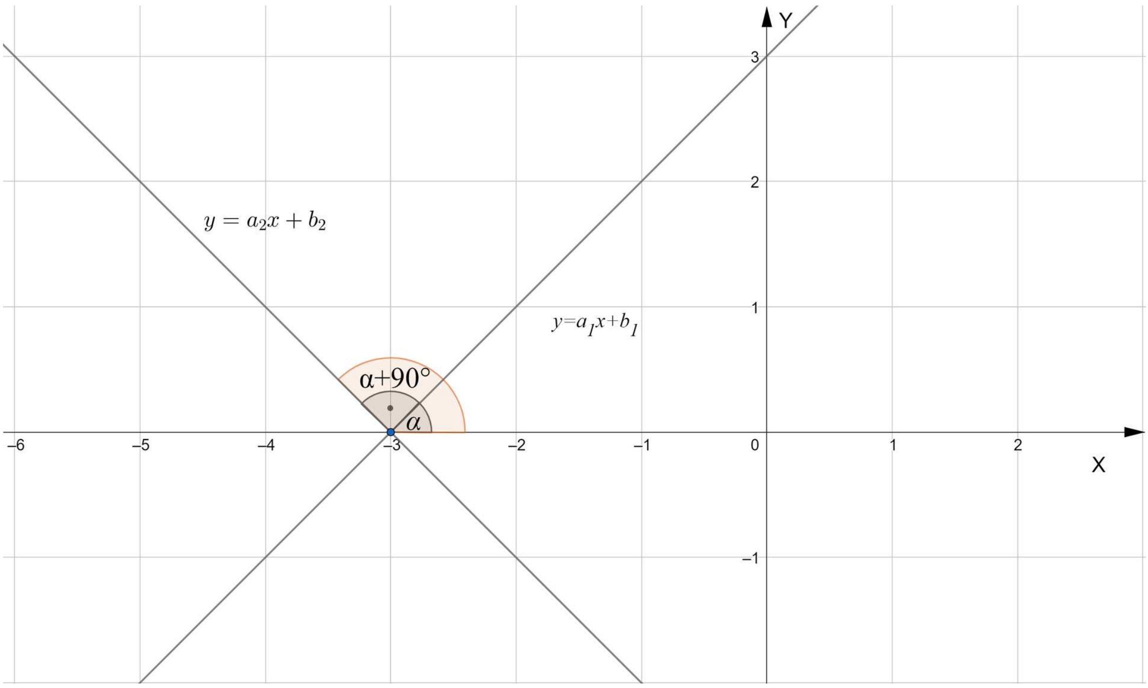
Ponieważ powyższe rozumowanie można odwrócić, mamy więc prawo sformułować następujący wniosek, zwany warunkiem prostopadłości prostych.

Proste o równaniach kierunkowych

$$y = a_1x + b_1 \text{ i } y = a_2x + b_2$$

są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn współczynników kierunkowych tych prostych jest równy (-1).

$$k: \ y = a_1x + b_1 \ \perp \ m: \ y = a_2x + b_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$$



Przykład 1

Rozstrzygniemy, czy proste o podanych równaniach są prostopadłe.

a) $y = 0,(3)x - 6$ i $y = -3x + 2$

Odczytajmy współczynniki kierunkowe tych prostych

$$a_1 = 0,(3) \text{ i } a_2 = -3.$$

Zauważmy, że liczba $0,(3)$ to $\frac{1}{3}$, zatem

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(-3\right) = -1.$$

Wynika stąd, że proste o równaniach $y = 0,(3)x - 6$ i $y = -3x + 2$ są prostopadłe.

b) $y = \sqrt{3}x - 2x + 6$ i $y = \sqrt{3}x + 2x + 5$

Uporządkujmy podane równania:

$$y = \left(\sqrt{3} - 2\right)x + 6 \text{ i } y = \left(\sqrt{3} + 2\right)x + 5.$$

Odczytajmy współczynniki kierunkowe tych prostych

$$a_1 = \sqrt{3} - 2 \text{ i } a_2 = \sqrt{3} + 2.$$

Zatem $a_1 \cdot a_2 = \left(\sqrt{3} - 2\right)\left(\sqrt{3} + 2\right) = 3 - 4 = -1.$

Wynika stąd, że proste o równaniach $y = \sqrt{3}x - 2x + 6$ i $y = \sqrt{3}x + 2x + 5$ są prostopadłe.

c) $y = (\log_2 3)x + 4$ i $y = \left(\log_3 \frac{1}{2}\right)x + 2$

Odczytajmy współczynniki kierunkowe tych prostych

$$a_1 = \log_2 3 \text{ i } a_2 = \log_3 \frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że

$$a_2 = \log_3 \frac{1}{2} = \log_3 2^{-1} = -\log_3 2 = -\frac{1}{\log_2 3}.$$

Zatem

$$a_1 \cdot a_2 = \log_2 3 \cdot \left(-\frac{1}{\log_2 3}\right) = -1.$$

Wynika stąd, że proste o równaniach $y = (\log_2 3)x + 4$ i $y = \left(\log_3 \frac{1}{2}\right)x + 2$ są prostopadłe.

Przykład 2

Wyznaczymy równanie prostej przechodzącej przez punkt A o współrzędnych $\left(2\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$ prostopadłej do prostej o równaniu $y = -x + 8$.

Odczytajmy współczynnik kierunkowy podanej prostej:

$$a_1 = -1.$$

Szukana prosta ma równanie postaci

$$y = a_2 x + b_2,$$

gdzie

$$a_1 \cdot a_2 = -1.$$

Zatem po podstawieniu do warunku prostopadłości $a_1 = -1$, otrzymujemy $a_2 = 1$. Aby wyznaczyć b_2 podstawimy współrzędne punktu A do równania $y = x + b_2$:

$$-\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + b_2 \, b_2 = -3\sqrt{3}$$

Zatem równanie szukanej prostej to $y = x - 3\sqrt{3}$.

Przykład 3

Wyznaczymy wartość parametru m, dla którego proste o równaniach

$$y = -x + 3\sqrt{5}m \text{ i } y = 2mx - \sqrt{5}x - 19m$$

są prostopadłe.

Zaczniemy od uporządkowania równań i odczytania współczynników kierunkowych.

$$= -x + 3\sqrt{5}m \Rightarrow a_1 = -1 \; y = 2mx - \sqrt{5}x - 19m = \left(2m - \sqrt{5}\right)x - 19m \Rightarrow a_2 = 2m - \surd$$

Ponieważ proste opisane równaniami kierunkowymi są prostopadłe dokładnie wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy (- 1), wystarczy więc rozwiązać równanie

$$\left(2m - \sqrt{5}\right) \cdot \left(-1\right) = -1 \; 2m - \sqrt{5} = 1 \; m = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$$

Wobec powyższego jedyna wartość parametru m, dla której proste o równaniach $y = -x + 3\sqrt{5}m$ i $y = 2mx - \sqrt{5}x - 19m$ są prostopadłe to $\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$.

Przykład 4

Prosta k jest prostopadła do prostej l. Wiadomo, że przecinają się one w punkcie $A(4, 12)$. Prosta k przecina oś X w punkcie $(1, 0)$. Wyznacz równania tych prostych wiedząc, że żadna z nich nie jest równoległa do osi Y.

Ponieważ żadna z prostych nie jest równoległa do osi Y, każdą z nich można opisać równaniem postaci

$$k: y = a_1 x + b_1,\ l: y = a_2 x + b_2.$$

Najpierw wyznaczymy równanie prostej k. Korzystając z faktu, że przechodzi ona przez punkty o współrzędnych $(4, 12)$ i $(1, 0)$, możemy zapisać układ równań:

$$\begin{cases} 12 = 4a_1 + b_1 \\ 0 = a_1 + b_1 \end{cases}$$

Po odjęciu równań stronami, otrzymujemy równanie

$$12 = 3a_1 a_1 = 4 \begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = -a_1 = -4 \end{cases}$$

Zatem prosta k ma równanie

$$y = 4x - 4.$$

Ponieważ prosta l jest prostopadła do prostej k, współczynnik kierunkowy jej równania można wyznaczyć z warunku

$$a_1 \cdot a_2 = -1\ 4 \cdot a_2 = -1\ a_2 = -\frac{1}{4}.$$

Aby wyznaczyć b_2, podstawimy współrzędne punktu $(4, 12)$ do równania $y = -\frac{1}{4}x + b_2$:

$$12 = -\frac{1}{4} \cdot 4 + b_2\, b_2 = 13.$$

Zatem równanie szukanej prostej to

$$y = -\frac{1}{4}x + 13.$$

Słownik

współczynnik kierunkowy prostej

liczba a we wzorze $y = ax + b$ zwanym równaniem kierunkowym prostej; określa nachylenie prostej

Aplet

Polecenie 1

Zmieniając wartość współczynników równania prostej przy pomocy suwaków, obserwuj zależność między współczynnikami kierunkowymi równań prostych prostopadłych. Wykonaj poniższe ćwiczenia.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DfxtrgPar

Polecenie 2

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Proste k i l są prostopadłe i przecinają oś Y w punkcie A o rzędnej 4. Wyznacz równania tych prostych wiedząc, że do prostej l należy punkt $B(-2, 8)$.

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Dany jest trójkąt ABC, którego wierzchołki mają następujące współrzędne: $A(0, 2)$, $B(4, -4)$, $C(9, 6)$. Wyznacz współrzędne ortocentrum (punktu przecięcia prostych zawierających wysokości) tego trójkąta.

Ćwiczenie 8

Dane są dwa przeciwległe wierzchołki $A(1, 7)$ i $C(1; -5, 5)$ prostokąta $ABCD$. Prosta o równaniu $y = 2x - \frac{5}{4}$ jest osią symetrii tego prostokąta. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D tego prostokąta.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Warunek prostopadłości prostych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

- Rozpoznasz równania prostych prostopadłych.
- Wyznaczysz równanie prostej prostopadłej do danej prostej spełniającej określone warunki.
- Wyznaczysz wartości parametrów, przy których proste opisane danymi równaniami są prostopadłe.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Aplet” i ćwiczenia interaktywne;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Warunek prostopadłości prostych” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie sytuacji problemowej związanej z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
2. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
3. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

Proste równoległe, proste prostopadłe

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Aplet” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Warunek prostopadłości prostych”.