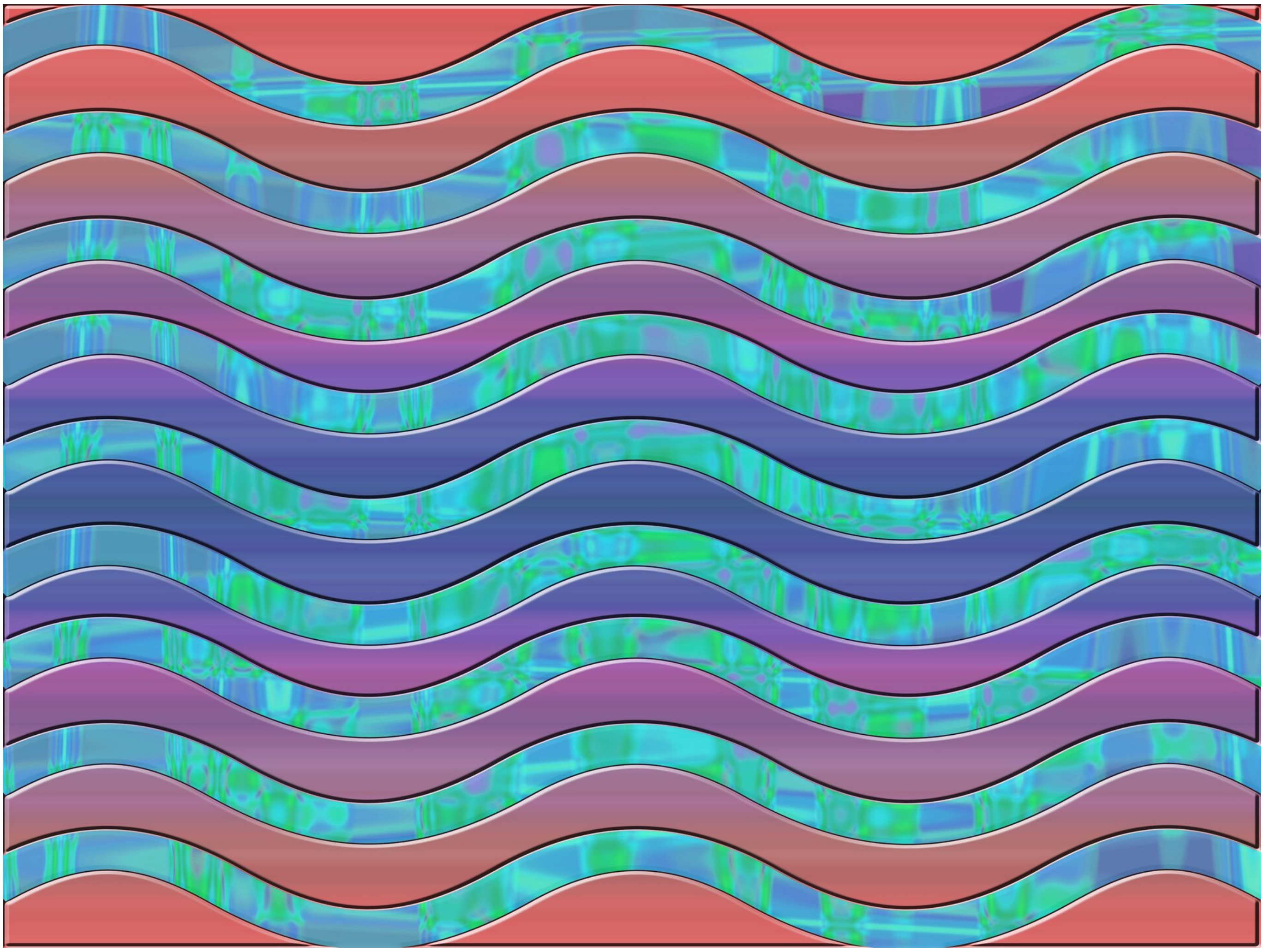
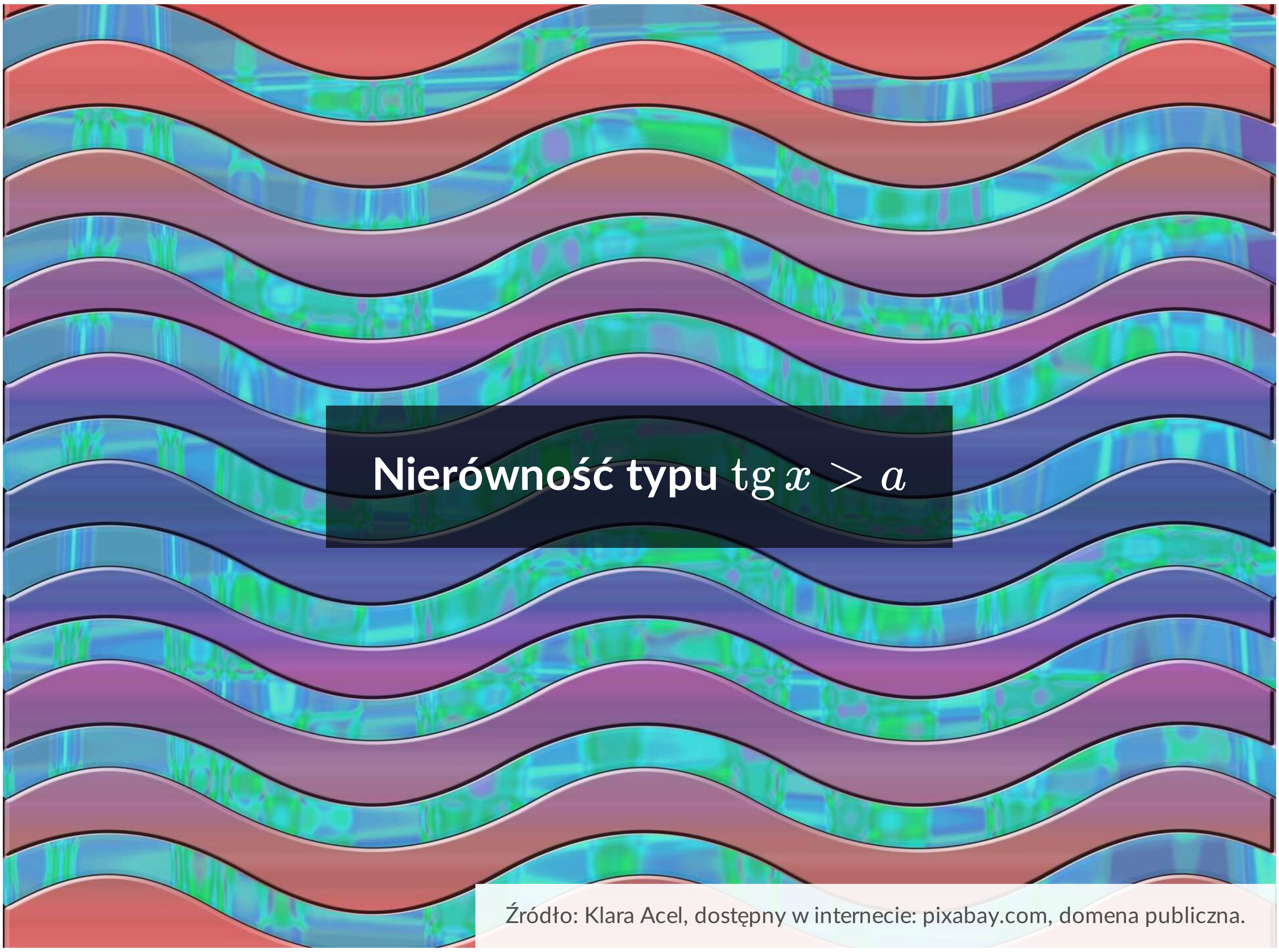


Nierówność typu $\mathbf{tg}\, x > a$

Nierówność typu $\operatorname{tg} x > a$



Źródło: Klara Acel, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Na lekcji nauczymy się rozwiązywać nierówności typu: $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \leq a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. Będziemy korzystać z wykresu funkcji tangens oraz własności tej funkcji. Szczególną uwagę zwrócimy na dziedzinę funkcji tangens oraz wykorzystamy fakt, że okresem zasadniczym tej funkcji jest $T = \pi$. Koniecznie przypomnij sobie, w jaki sposób rozwiązywaliśmy równania trygonometryczne typu $\operatorname{tg} x = a$.

Twoje cele

- Nauczysz się rozwiązywać proste nierówności trygonometryczne typu: $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \leq a$, $\operatorname{tg} x \geq a$.
- Zapoznasz się ze sposobami rozwiązywania bardziej skomplikowanych, niż wymienione nierówności trygonometryczne.

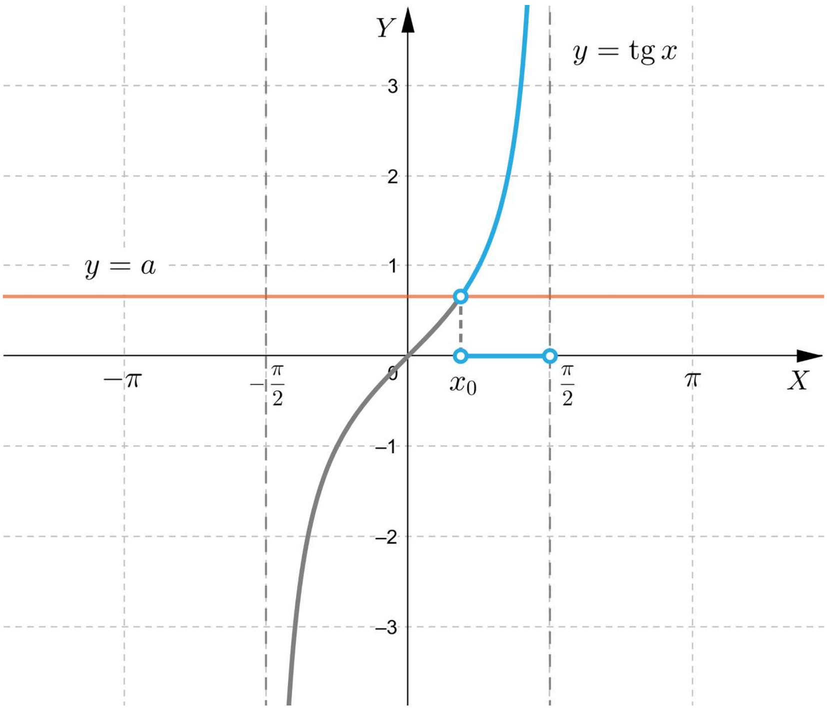
Przeczytaj

Na lekcji nauczymy się rozwiązywać nierówności typu: $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \leq a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. W tym celu będziemy korzystać z metody rozwiązywania równań trygonometrycznych typu $\operatorname{tg} x = a$. Przypomnijmy stosowne twierdzenie:

> **Twierdzenie: o rozwiązywaniu równania** $\operatorname{tg} x = a$
>
> Algorytm szukania rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = a$:
>
> 1. znajdujemy jedno rozwiązanie x_0 takie, że $\operatorname{tg} x_0 = a$,
> 2. zapisujemy wszystkie rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = a$: $x = x_0 + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Pokażemy, jak rozwiązać nierówność $\operatorname{tg} x > a$.

Najpierw rozwiążemy nierówność w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Taki przedział wybieramy, gdyż okresem zasadniczym funkcji tangens jest $T = \pi$, a wybrany przedział ma długość π.



Spójrzmy na powyższy rysunek.

Skoro chcemy rozwiązać nierówność $\operatorname{tg} x > a$, będziemy badać, w jakich przedziałach funkcja $y = \operatorname{tg} x$ przyjmuje wartości większe od wartości funkcji $y = a$.

Zaznaczmy na niebiesko ten fragment wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$, który leży powyżej prostej $y = a$.

Zauważmy, że prosta $y = a$ przecina wykres funkcji tangens dokładnie w jednym punkcie (funkcja tangens w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ jest różnowartościowa i zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych), którego pierwsza współrzędna to x_0 - jest to rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = a$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Zatem w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ funkcja $y = \operatorname{tg} x$ przyjmuje wartości większe od wartości funkcji $y = a$ dla argumentów $x \in \left(x_0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Wykorzystując okresowość funkcji tangens, podajemy rozwiązanie nierówności $\operatorname{tg} x > a$ w całej dziedzinie: jest to suma wszystkich przedziałów $\left(x_0 + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

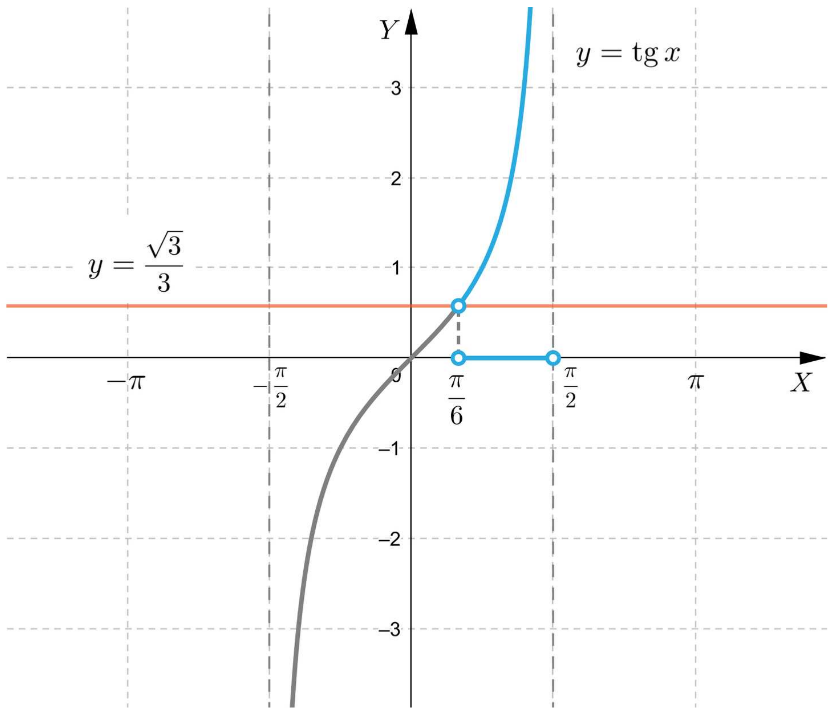
Przykład 1

Rozwiążemy nierówność: $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rozwiązanie

Najpierw w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ wskazujemy rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$: jest nim $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Stąd, rozwiązaniem nierówności w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ jest zbiór: $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right)$.



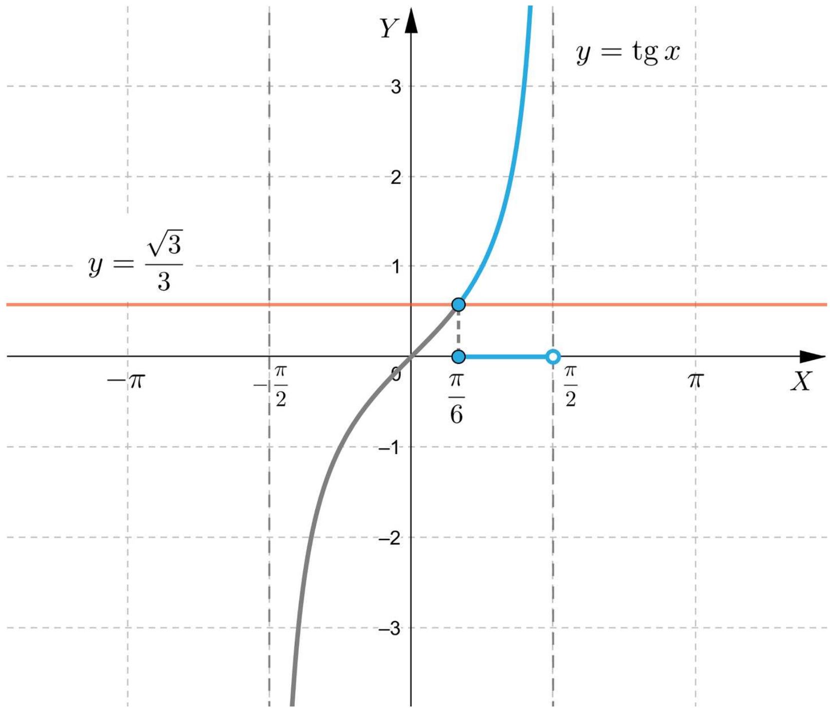
Po uwzględnieniu całej dziedziny otrzymujemy rozwiązanie, czyli sumę przedziałów $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $\operatorname{tg} x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rozwiązanie

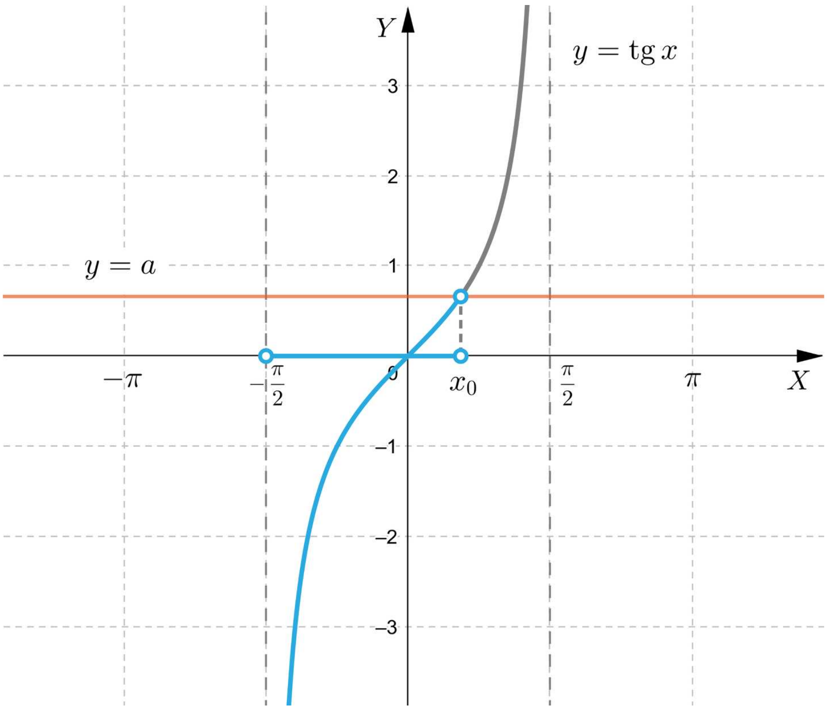
Spójrzmy na poniższy wykres. Odczytujemy rozwiązanie nierówności w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$: jest to zbiór $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Korzystając z przykładu poprzedniego otrzymujemy rozwiązanie, którym jest suma przedziałów $\left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Pokażemy teraz, jak rozwiązać nierówność $\operatorname{tg} x < a$.

Najpierw rozwiążemy nierówność w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Taki przedział wybieramy, gdyż okresem zasadniczym funkcji tangens jest $T = \pi$, a wybrany przedział ma długość π.



Spójrzmy na rysunek.

Skoro chcemy rozwiązać nierówność $\operatorname{tg} x < a$, będziemy badać, w jakich przedziałach funkcja $y = \operatorname{tg} x$ przyjmuje wartości mniejsze od wartości funkcji $y = a$.

Zaznaczmy na niebiesko ten fragment wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$, który leży poniżej prostej $y = a$.

Zauważmy, że prosta $y = a$ przecina wykres funkcji tangens dokładnie w jednym punkcie (funkcja tangens w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ jest różnowartościowa i zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych), którego pierwsza współrzędna to x_0 - jest to rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = a$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Zatem w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ funkcja $y = \operatorname{tg} x$ przyjmuje wartości mniejsze od wartości funkcji $y = a$ dla argumentów $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ x_0\right)$.

Wykorzystując okresowość funkcji tangens, podajemy rozwiązanie nierówności $\operatorname{tg} x < a$: jest to suma wszystkich przedziałów $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ x_0 + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

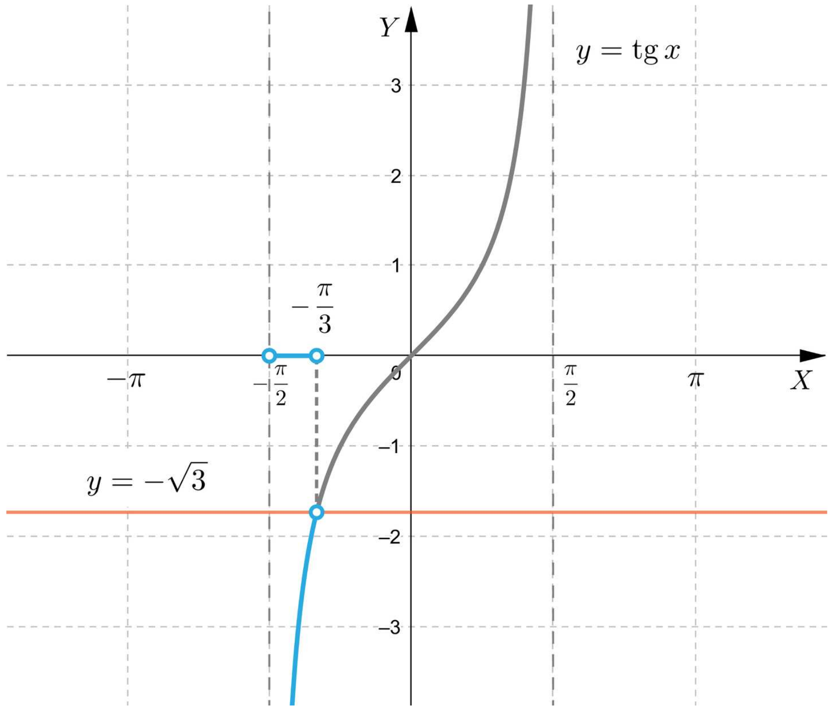
Przykład 3

Rozwiążemy nierówność: $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Najpierw w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ podajemy rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$: jest to $x_0 = -\frac{\pi}{3}$.

Korzystając z poniższego wykresu, otrzymujemy rozwiązanie nierówności $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, którym jest zbiór $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{3}\right)$.



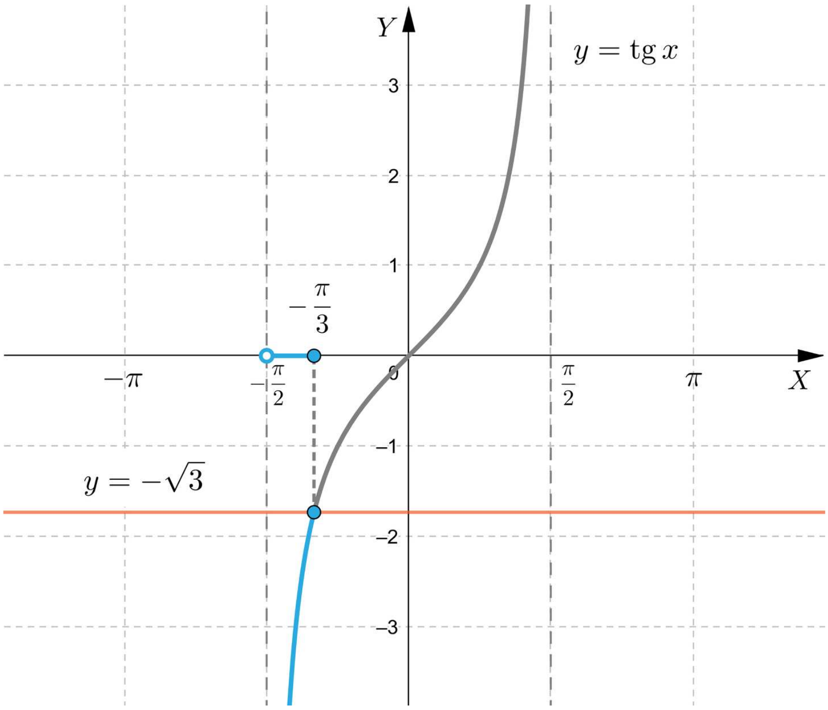
Stąd też, po uwzględnieniu całej dziedziny otrzymujemy rozwiązanie nierówności $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$, którym jest suma przedziałów w postaci $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ -\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Spójrzmy na poniższy wykres. Odczytujemy rozwiązanie nierówności w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$: jest to zbiór $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right\rangle$.



Korzystając z przykładu poprzedniego, otrzymujemy rozwiązanie, którym jest suma przedziałów w postaci $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi\right\rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Słownik

rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = a$

jeżeli dla x_0 spełniony jest warunek $\operatorname{tg} x_0 = a$, to wszystkie rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = a$ są postaci: $x = x_0 + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z animacją, a następnie wykonaj kolejne polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DYi3jssh1

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej nierówności typu $\operatorname{tg} x > a$. Opowiada Piotr Kryszkiewicz.

Polecenie 2

Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania. Rozwiązaniem nierówności: $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3}$ jest suma przedziałów:

- $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- $\left(-\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Polecenie 3

Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania. Rozwiązaniem nierówności $\operatorname{tg}^2 x \geq 1$, gdy $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ jest zbiór:

- $\left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
- $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.
- $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wskaż wszystkie nierówności, które spełnia liczba $x = \frac{2\pi}{7}$.

- [ ] $\operatorname{tg} 2x > \frac{\sqrt{3}}{3}$
- [ ] $\operatorname{tg} 5x \leq 1$
- [ ] $\operatorname{tg} 4x > \sqrt{3}$
- [ ] $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$
- [ ] $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$
- [ ] $\operatorname{tg} 2x < \sqrt{3}$
- [ ] $\operatorname{tg} x \leq 1$

Ćwiczenie 2

Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania. Rozwiązaniem nierówności $\operatorname{tg} 2x \geq -1$ jest suma przedziałów:

- $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$.
- $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)$.
- $\left\langle-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)$.
- $\left\langle-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$.

Ćwiczenie 3

Połącz w pary: nierówność i jej rozwiązanie w zbiorze $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\operatorname{tg}^2 2x < 3$	$\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{tg}^2 x > 1$	$\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{tg}^2 x > 3$	$\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
$3\operatorname{tg}^2 x < 1$	$\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

Ćwiczenie 4

Wstaw w tekst odpowiedni przedział, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Rozwiązaniem nierówności $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \leq 1$ jest suma przedziałów ______, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$\left(-\frac{5\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{12} + k\pi\right\rangle$ $\left\langle\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi\right\rangle$ $\left\langle-\frac{7\pi}{3} + k\pi, -\frac{4\pi}{3} + k\pi\right\rangle$ $\left\langle\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right)$

Ćwiczenie 5

Wskaż nierówność, która dla parametru $a = \sqrt{3}$ ma rozwiązanie: $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

- $\operatorname{tg} x < a^2 - \frac{1}{3}a - 3$
- $\operatorname{tg} x > 7a^2 - 22$
- $\operatorname{tg} 2x > 2a^2 - a - 6$
- $\operatorname{tg} 2x < a^2 - a - 3$

Ćwiczenie 6

Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania. Rozwiązaniem nierówności $(\operatorname{tg}^2 x - 1)(3\operatorname{tg}^2 x - 1) \le 0$ w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ jest zbiór:

- $\left(0, \frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $\left(0, \frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $\left\langle\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right\rangle$.
- $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.
- $\left\langle\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\rangle$.

Ćwiczenie 7

Rozwiąż nierówność $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} 3x \le 1$ w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ćwiczenie 8

Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{Z}$ rozwiązaniem nierówności $\operatorname{tg} 2x \le \frac{3a+1}{2a-1}$ w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ jest zbiór $\left(0, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$?

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Nierówność typu $\operatorname{tg} x > a$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności trygonometryczne typu: $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \leq a$, $\operatorname{tg} x \geq a$,
- analizuje wykres funkcji tangens rozwiązują przy ich pomocy nierówności trygonometryczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda tekstu przewodniego;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Animacja”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat lekcji: „Nierówność typu $\operatorname{tg} x > a$” oraz cele zajęć.
2. Wybrany uczeń formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie w parach rozwiązują zadania 3-6 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Trzy pary, które poprawnie rozwiążą zadania jako pierwsze, wygrywają, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.
4. Nauczyciel omawia rozwiązania zdań otwartych, poddaje analizie odpowiedzi uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Nierówność typu $\operatorname{tg} x > a$”.