



Nierówność kwadratowa

Ustalanie zbioru rozwiązań nierówności. Ilustracja interaktywna: rozwiązywanie nierówności kwadratowej.

Wyznaczanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej. Interpretacja geometryczna rozwiązań. Zadania na dowodzenie.

Przekształcanie nierównowagi kwadratowej. Rozwiązywanie nierówności kwadratowej. Podawanie rozwiązań w postaci przedziału liczb. Zadania na dowodzenie.

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej. Zapisywanie wyniku w postaci przedziałów liczb. Zasób zawiera interaktywne zadania.

Rozwiązywanie nierówności kwadratowych. Zasób zawiera interaktywne zadania.

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej. Zasób zawiera zadania z rozwiązaniami.

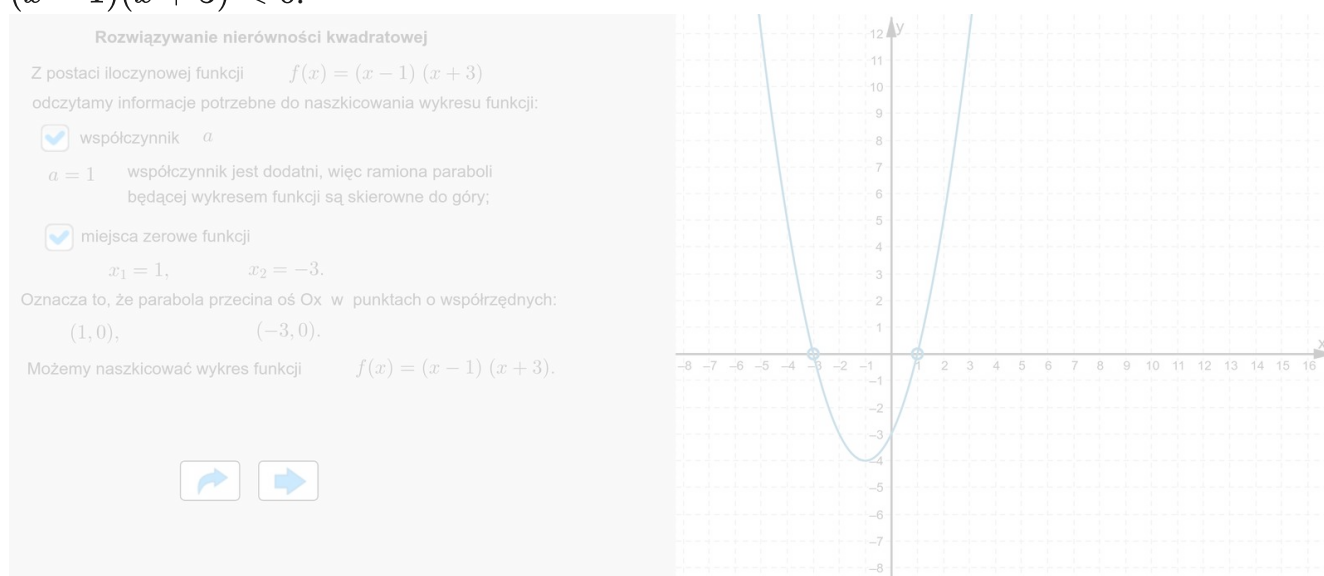
Rozwiązywanie nierówności kwadratowej. Zasób zawiera zadania z rozwiązaniami. Zadania na dowodzenie.

Nierówność kwadratowa

W tym materiale zawarte są przykłady rozwiązywania nierówności kwadratowych. Po przeanalizowaniu zadań, możesz sprawdzić swoje umiejętności, samodzielnie znajdując zbiory rozwiązań nierówności zapisanych w ćwiczeniach.

Przykład 1

Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = (x - 1)(x + 3)$ ustalimy zbiór rozwiązań nierówności $(x - 1)(x + 3) > 0$ oraz nierówności $(x - 1)(x + 3) < 0$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1DmQx2UC>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

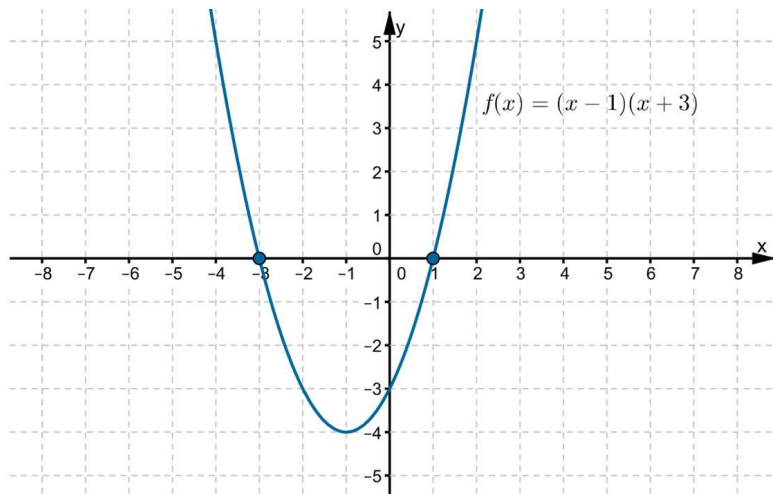
Z postaci iloczynowej wzoru funkcji f

$$f(x) = 1 \cdot (x - 1)(x + 3)$$

bezpośrednio odczytujemy:

- współczynnik a : $a = 1$. Jest on dodatni, więc parabola będąca wykresem funkcji f ma ramiona skierowane do góry,
- miejsca zerowe funkcji f : 1 oraz (-3) . Oznacza to, że wykres funkcji f przecina oś X w dwóch punktach o współrzędnych $(1, 0)$ oraz $(-3, 0)$.

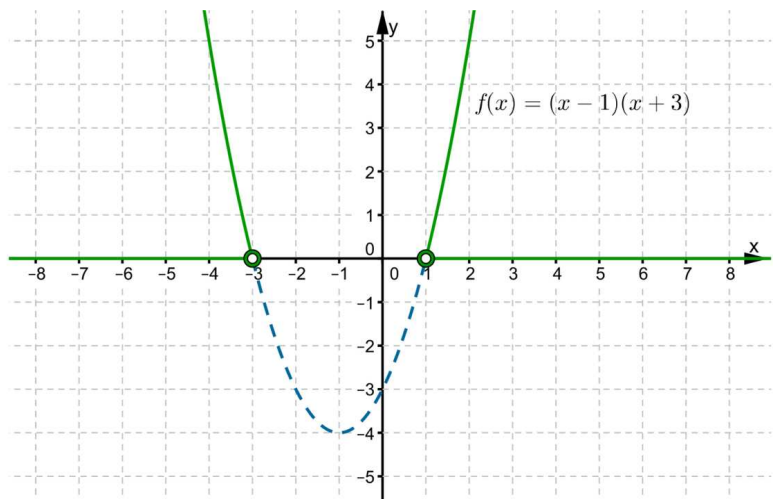
Korzystając z powyższych spostrzeżeń, szkicujemy wykres funkcji f .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ustalimy zbiór rozwiązań nierówności $(x - 1)(x + 3) > 0$.

Z otrzymanego wykresu odczytujemy, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

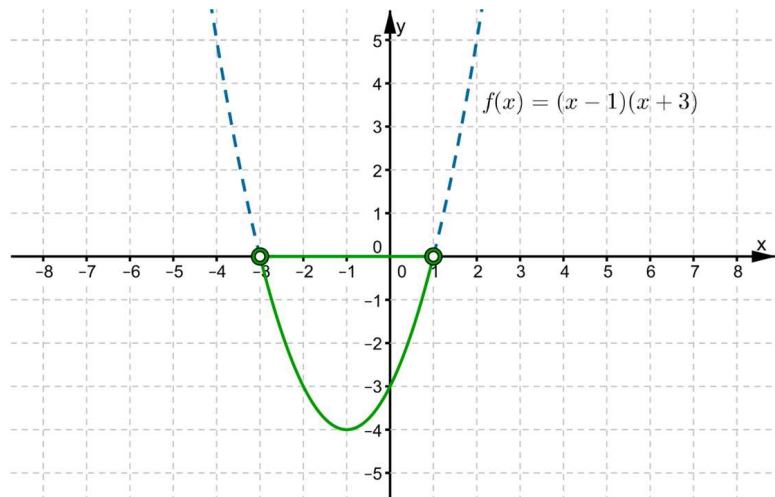


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem $(x - 1)(x + 3) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Ustalimy zbiór rozwiązań nierówności $(x - 1)(x + 3) < 0$.

Z wykresu funkcji f odczytujemy, dla jakich argumentów ta funkcja przyjmuje wartości ujemne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wobec tego $(x - 1)(x + 3) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-3, 1)$.

Przykład 2

Wypiszemy wszystkie liczby całkowite, które spełniają nierówność $(2x + 5)(4 - x) > 0$.

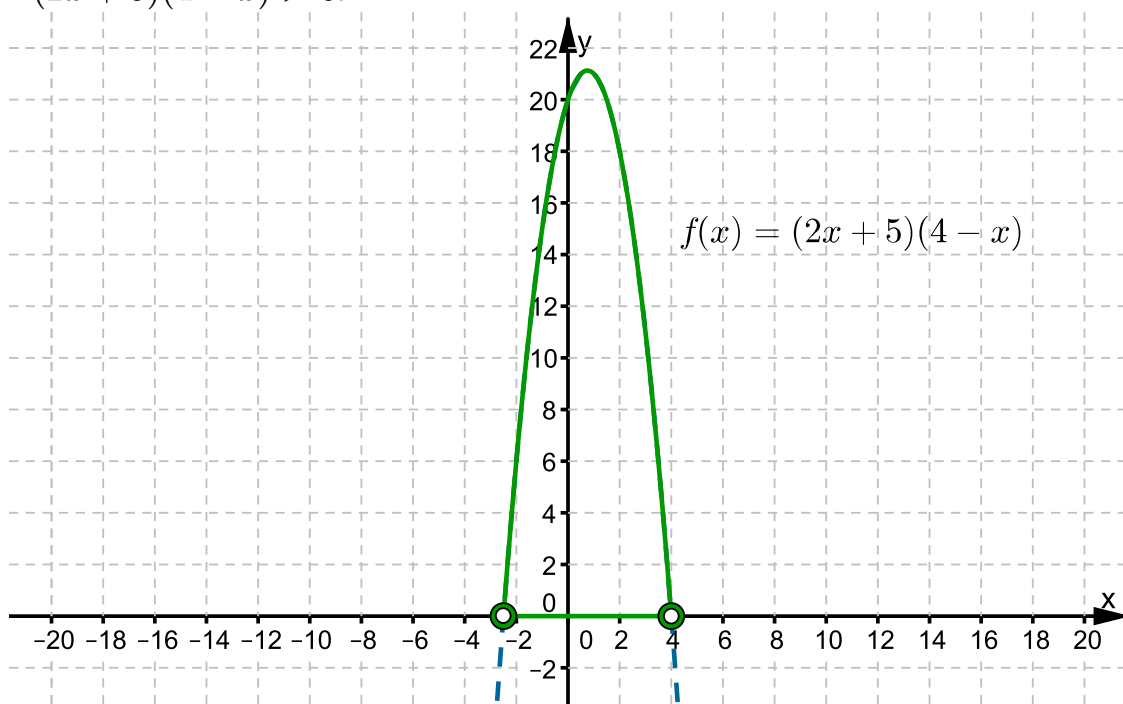
Rozpatrzmy w tym celu funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = (2x + 5)(4 - x)$.

Po zapisaniu wzoru tej funkcji w postaci iloczynowej $f(x) = -2(x + \frac{5}{2})(x - 4)$ stwierdzamy, że

funkcja ta ma dwa miejsca zerowe $(-\frac{5}{2})$ oraz 4,

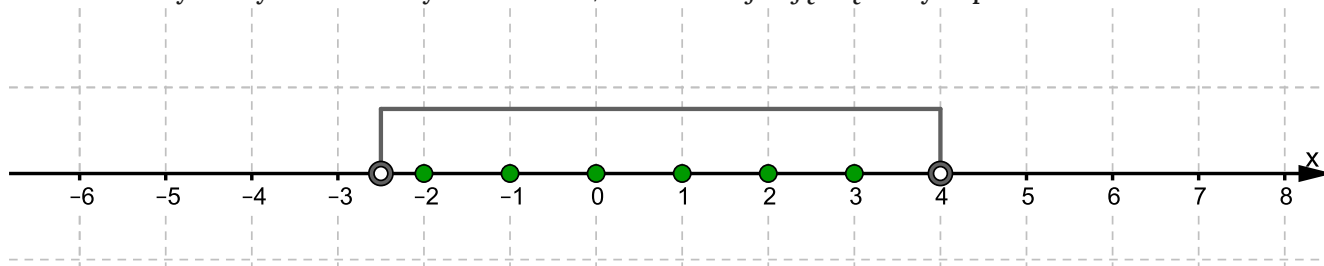
$a = -2 < 0$, zatem wykresem tej funkcji jest parabola skierowana ramionami do dołu.

Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = (2x + 5)(4 - x)$ i zaznaczamy na nim argumenty, dla których $(2x + 5)(4 - x) > 0$.



Zbiorem rozwiązań nierówności $(2x + 5)(4 - x) > 0$ jest więc przedział $(-2\frac{1}{2}, 4)$.

Zaznaczamy wszystkie liczby całkowite, które znajdują się w tym przedziale.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ostatecznie stwierdzamy, że liczbami całkowitymi, które spełniają nierówność $(2x + 5)(4 - x) > 0$, są: (-2) , (-1) , 0 , 1 , 2 , 3 .

Przykład 3

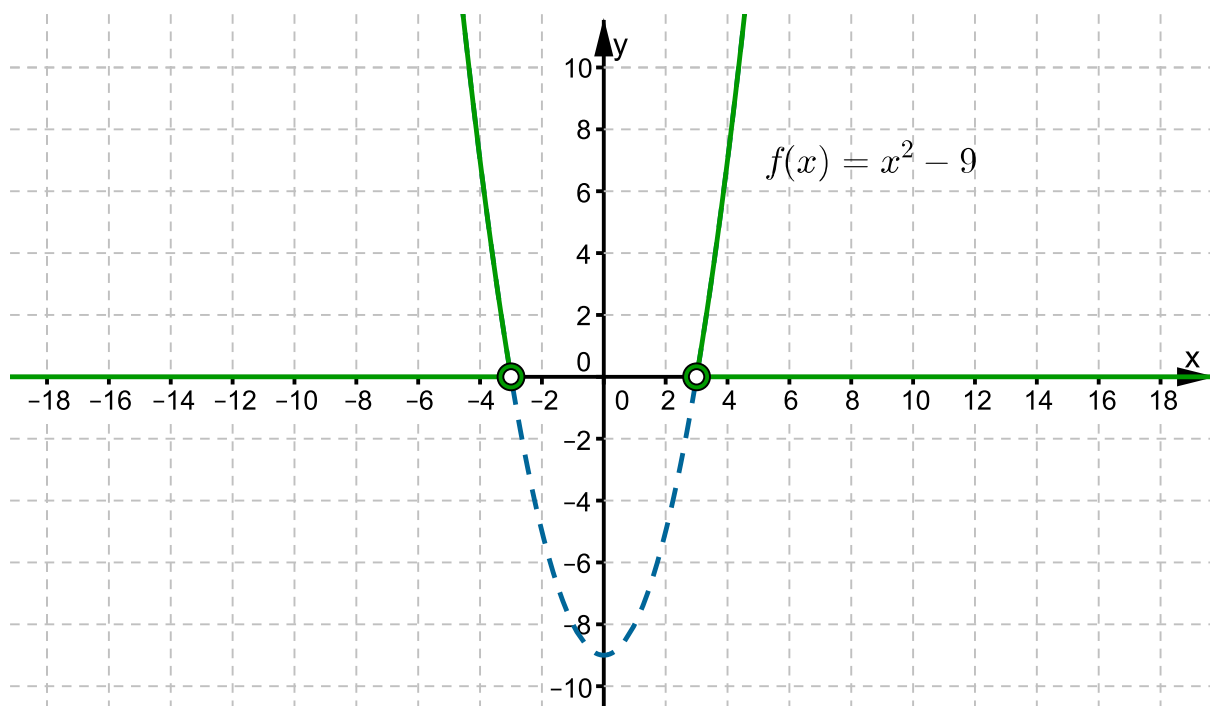
Rozwiążemy nierówność

1. $x^2 - 9 > 0$

Wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = x^2 - 9$ jest parabola skierowana ramionami do góry, co stwierdzamy, odczytując ze wzoru tej funkcji wartość współczynnika a : $a = 1 > 0$.

Wzór tej funkcji przekształcamy do postaci $f(x) = (x - 3)(x + 3)$. Funkcja ma zatem dwa miejsca zerowe (-3) oraz 3 .

Szkicujemy wykres tej funkcji i odczytujemy wszystkie argumenty, dla których przyjmuje ona wartości dodatnie.



Odpowiedź: $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

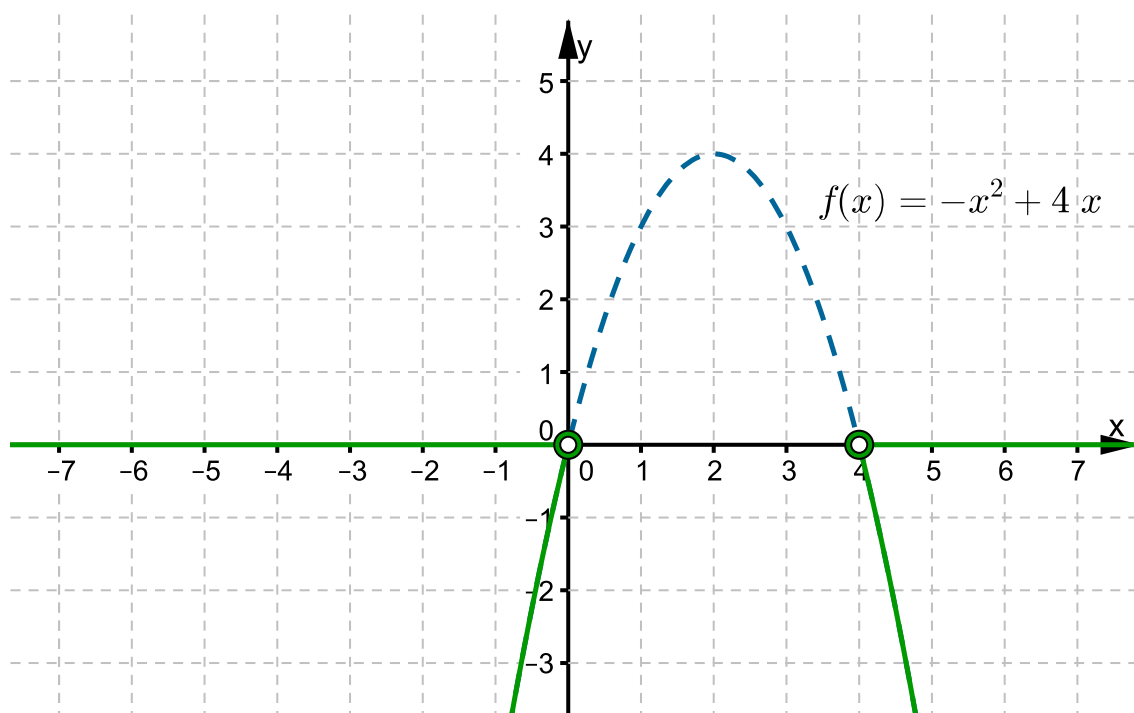
2. $-x^2 + 4x < 0$

- sposób I

Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = -x^2 + 4x$. Odczytujemy wartość współczynnika a : $a = -1 < 0$. Wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są w dół.

Wzór tej funkcji sprowadzamy do postaci iloczynowej $f(x) = -x(x - 4)$ i stwierdzamy, że funkcja ta ma dwa miejsca zerowe 0 oraz 4.

Sporządzamy szkic wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 4x$ i na jego podstawie wyznaczamy zbiór rozwiązań nierówności $-x^2 + 4x < 0$.



Odpowiedź: $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

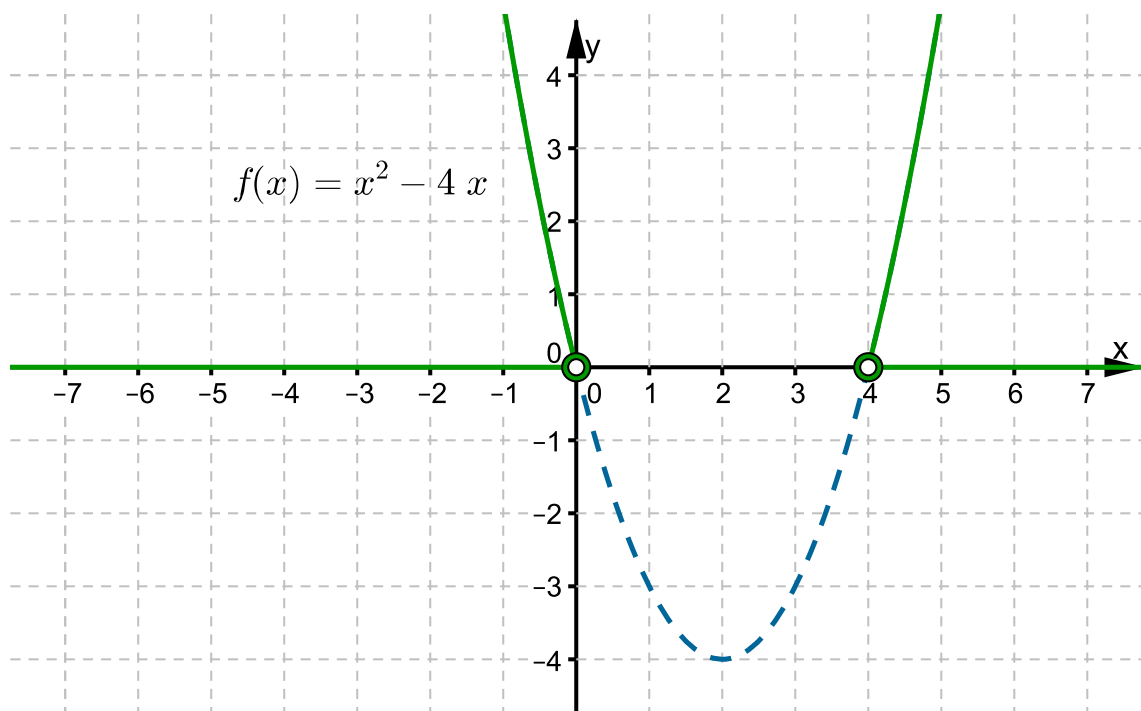
- sposób II

Przekształcamy daną nierówność. Po pomnożeniu obustronnie przez (-1) otrzymujemy równoważnie

$x^2 - 4x > 0$. Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = x^2 - 4x$. Odczytujemy: $a = 1 > 0$, zatem wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są do góry.

Po zapisaniu wzoru tej funkcji w postaci iloczynowej $f(x) = x(x - 4)$ stwierdzamy, że funkcja ta ma dwa miejsca zerowe: 0 oraz 4.

Sporządzamy szkic wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 4x$ i na jego podstawie wyznaczamy zbiór tych liczb rzeczywistych x , dla których $x^2 - 4x > 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

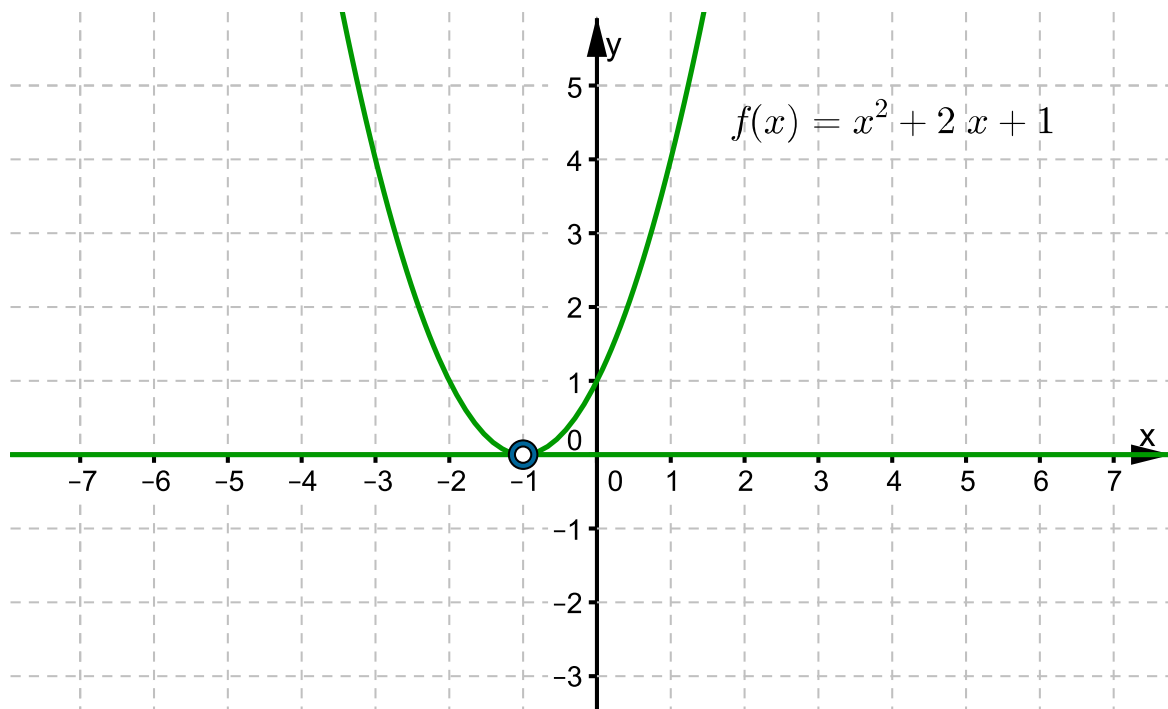
Odpowiedź: $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $x^2 + 2x + 1 > 0$.

Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Przekształcamy ten wzór do postaci $f(x) = (x + 1)^2$. Ponieważ: $a = 1 > 0$ oraz funkcja ma jedno miejsce zerowe: (-1) , więc wykresem tej funkcji jest parabola skierowana ramionami w górę.

Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = x^2 + 2x + 1$ i zaznaczamy argumenty, dla których $x^2 + 2x + 1 > 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

1. $x^2 + 3 < 0$

Ponieważ $x^2 \geq 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x , więc $x^2 + 3 > 0$ dla każdego rzeczywistego x . Zatem żadna liczba rzeczywista nie spełnia nierówności $x^2 + 3 < 0$.

Odpowiedź: Nierówność $x^2 + 3 < 0$ jest sprzeczna.

2. $-x^2 - 1 < 0$

Przekształcamy daną nierówność. Po pomnożeniu obustronnie przez (-1) otrzymujemy równoważnie $x^2 + 1 > 0$. Ponieważ suma liczby nieujemnej x^2 oraz liczby dodatniej 1 jest liczbą dodatnią, więc każda liczba rzeczywista x spełnia nierówność $x^2 + 1 > 0$.

Odpowiedź: Nierówność $-x^2 - 1 < 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność $x^2 - 12x + 11 \leq 0$.

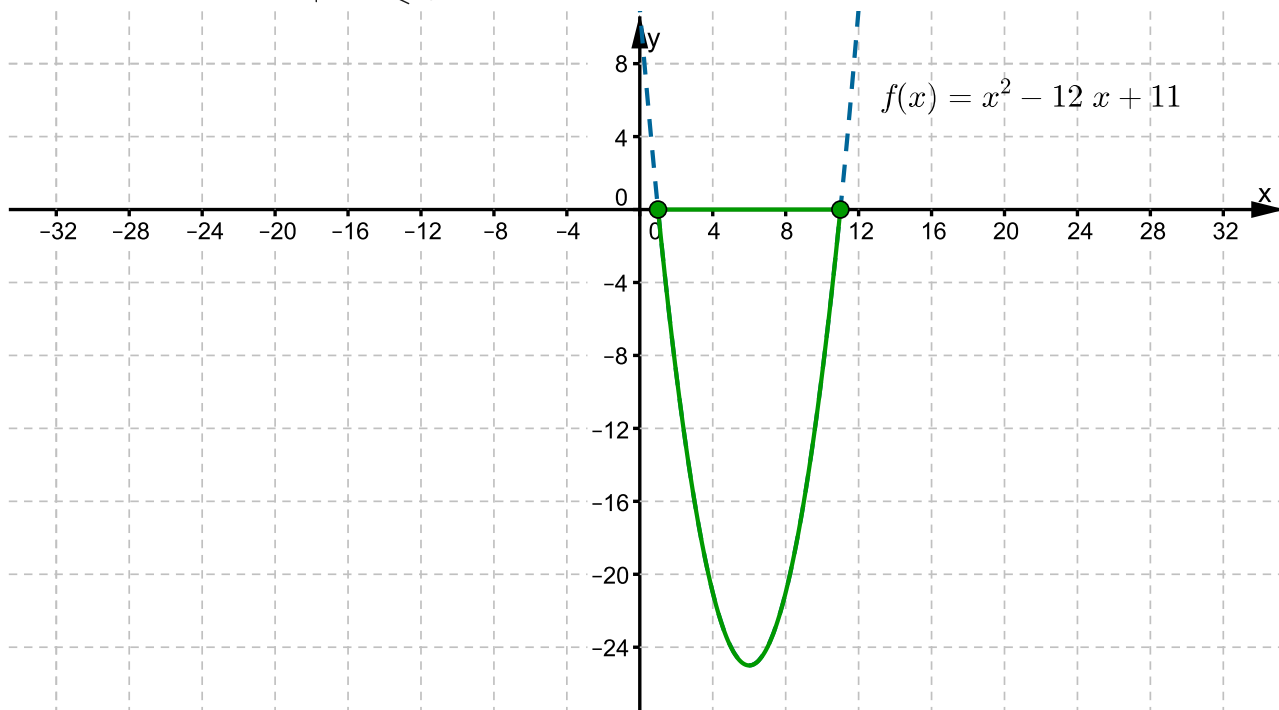
Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = x^2 - 12x + 11$. Odczytujemy: $a = 1 > 0$, zatem wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są do góry.

Obliczamy wyróżnik funkcji $f(x) = x^2 - 12x + 11$:

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 100 > 0$. Wobec tego funkcja $f(x) = x^2 - 12x + 11$ ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{100}}{2} = 1 \text{ oraz } x_2 = \frac{12 + \sqrt{100}}{2} = 11.$$

Sporządzamy szkic wykresu tej funkcji i na jego podstawie ustalamy zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 12x + 11 \leq 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in \langle 1, 11 \rangle$.

Przykład 6

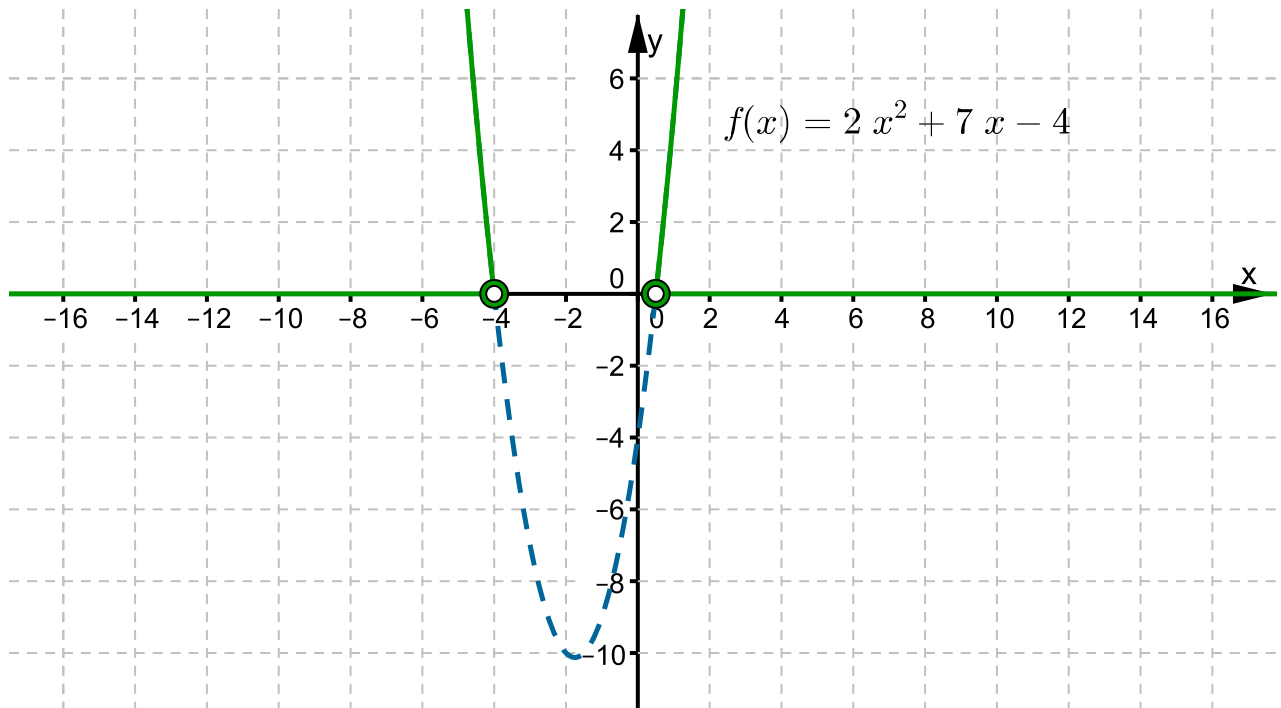
Rozwiążemy nierówność $2x^2 + 7x - 4 > 0$.

Ze wzoru funkcji $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$ odczytujemy wartość współczynnika a : $a = 2 > 0$. Wobec tego wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są do góry.

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 81 > 0$, zatem funkcja $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$ ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = -4 \text{ oraz } x_2 = \frac{-7 + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Sporządzamy szkic wykresu tej funkcji i na jego podstawie ustalamy zbiór rozwiązań nierówności $2x^2 + 7x - 4 > 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -4) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

Przykład 7

Rozwiążemy nierówność $-x^2 + 3x + 10 \geq 0$.

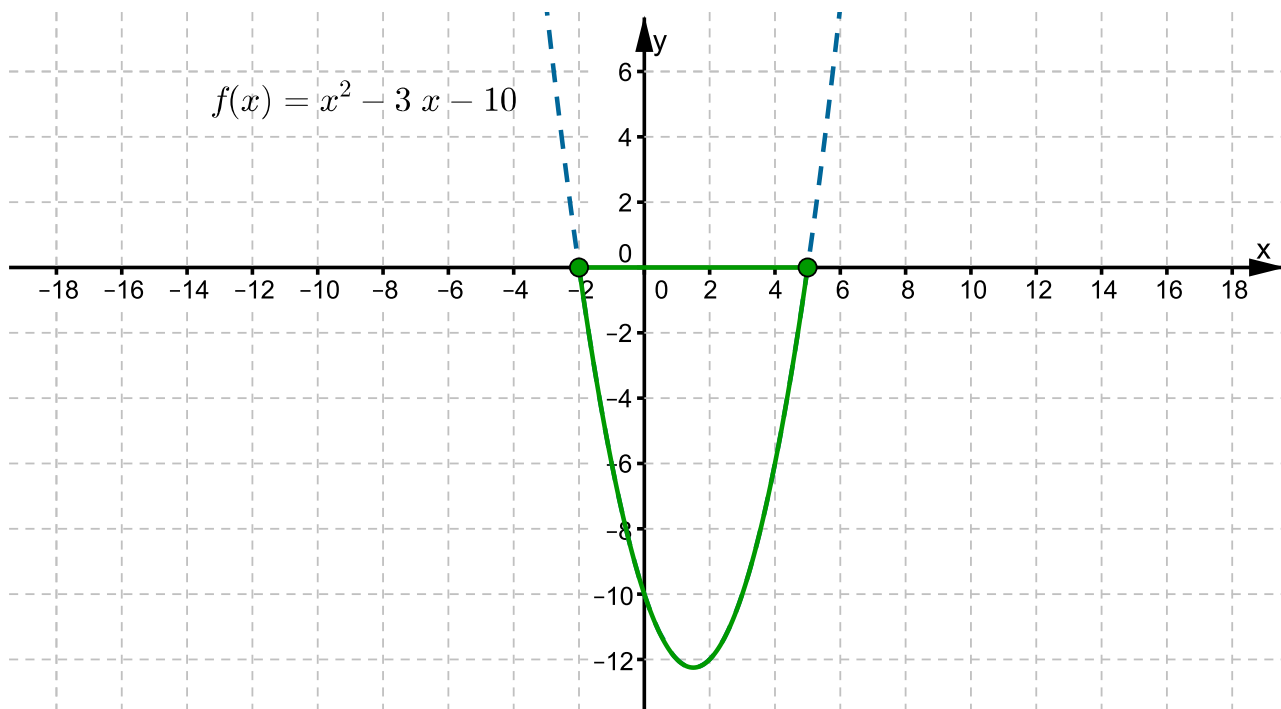
Przekształcamy daną nierówność. Po pomnożeniu obustronnie przez (-1) otrzymujemy równoważnie

$$x^2 - 3x - 10 \leq 0.$$

Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 10$. Ponieważ $a = 1 > 0$, więc wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są do góry.

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0$. Zatem funkcja $f(x) = x^2 - 3x - 10$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = \frac{3-\sqrt{49}}{2} = -2$ oraz $x_2 = \frac{3+\sqrt{49}}{2} = 5$.

Sporządzamy szkic wykresu tej funkcji i na jego podstawie wyznaczamy argumenty, dla których $x^2 - 3x - 10 \leq 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in \langle -2, 5 \rangle$.

Przykład 8

Rozwiążemy nierówność $-3x^2 + 2x + 21 \leq 0$.

Przekształcamy daną nierówność. Po pomnożeniu obustronnie przez (-1) otrzymujemy równoważnie

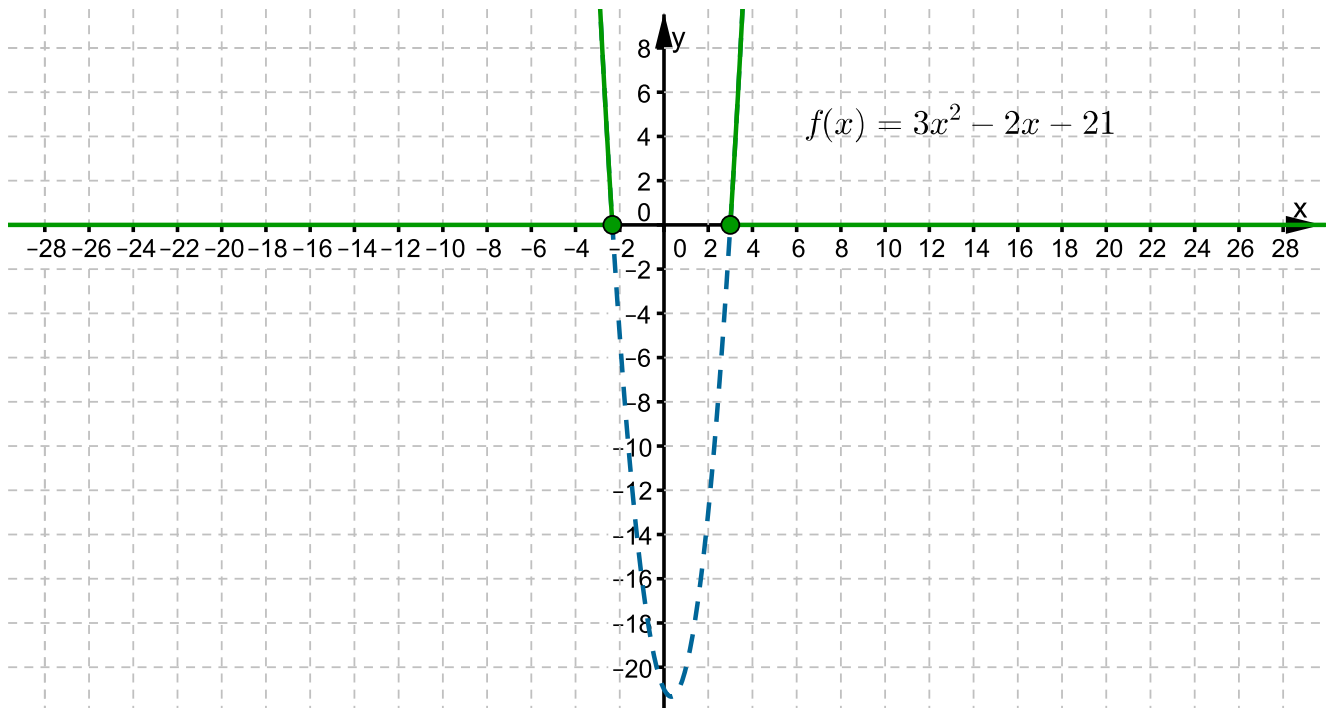
$$3x^2 - 2x - 21 \geq 0.$$

Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = 3x^2 - 2x - 21$. Ponieważ $a = 3 > 0$, więc wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są do góry.

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21) = 256 > 0$. Zatem funkcja $f(x) = 3x^2 - 2x - 21$ ma dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{256}}{2 \cdot 3} = -\frac{7}{3} \text{ oraz } x_2 = \frac{2 + \sqrt{256}}{2 \cdot 3} = 3.$$

Sporządzamy szkic wykresu tej funkcji i na jego podstawie wyznaczamy argumenty, dla których $3x^2 - 2x - 21 \geq 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -2\frac{1}{3}) \cup \langle 3, +\infty \rangle$.

Przykład 9

Uzasadnimy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest poniższa nierówność.

$$1. x^2 + 9 \geq 6x$$

- sposób I

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny do postaci $x^2 - 6x + 9 \geq 0$.

Wystarczy zatem pokazać, że funkcja kwadratowa $y = x^2 - 6x + 9$ przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $y = x^2 - 6x + 9$:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0.$$

Wynika stąd, że funkcja $y = x^2 - 6x + 9$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe. Ponieważ jej wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do góry ($a = 1 > 0$), więc dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 - 6x + 9 \geq 0$. To kończy dowód.

- sposób II

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$x^2 + 9 \geq 6x$$

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$(x - 3)^2 \geq 0.$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $(x - 3)^2 \geq 0$. To spostrzeżenie kończy dowód.

$$2. \frac{x^2}{7} + \frac{7}{4} \geq x$$

- sposób I

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny do postaci $\frac{x^2}{7} - x + \frac{7}{4} \geq 0$. Wystarczy pokazać, że funkcja kwadratowa $y = \frac{x^2}{7} - x + \frac{7}{4}$ przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $y = \frac{x^2}{7} - x + \frac{7}{4}$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{4} = 0.$$

Zatem funkcja ta ma dokładnie jedno miejsce zerowe, a ponieważ jej wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do góry ($a = \frac{1}{7} > 0$), więc dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2}{7} - x + \frac{7}{4} \geq 0$. To kończy dowód.

- sposób II

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$\frac{x^2}{7} + \frac{7}{4} \geq x$$

$$4x^2 + 49 \geq 28x$$

$$4x^2 - 28x + 49 \geq 0.$$

$$(2x - 7)^2 \geq 0.$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $(2x - 7)^2 \geq 0$. To spostrzeżenie kończy dowód.

$$3. \ 3(x^2 + 3) > 10x$$

- sposób I

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny do postaci $3x^2 - 10x + 9 > 0$. Wystarczy pokazać, że funkcja kwadratowa $y = 3x^2 - 10x + 9$ przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie.

Ponieważ współczynnik przy x^2 trójmianu $y = 3x^2 - 10x + 9$ jest dodatni, więc wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych do góry.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $y = 3x^2 - 10x + 9$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = -8 < 0.$$

Zatem funkcja ta nie ma miejsc zerowych.

Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $3x^2 - 10x + 9 > 0$. To kończy dowód.

- sposób II

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$3(x^2 + 3) > 10x$$

$$3x^2 + 9 > 10x$$

$$3x^2 - 10x + 9 > 0$$

$$9x^2 - 30x + 27 > 0$$

$$(3x - 5)^2 + 2 > 0.$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $(3x - 5)^2 \geq 0$, więc suma $(3x - 5)^2 + 2$ jest liczbą dodatnią. To spostrzeżenie kończy dowód.

Przykład 10

Uzasadnimy, że jeśli liczby x i y są rzeczywiste, to

1. $4x^2 + 25y^2 \geq 20xy$

- sposób I

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 \geq 0$$

$$(2x - 5y)^2 \geq 0.$$

Jeżeli liczby x i y są rzeczywiste, to prawdziwa jest nierówność $(2x - 5y)^2 \geq 0$. To spostrzeżenie kończy dowód.

- sposób II

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny do postaci $4x^2 - 20xy + 25y^2 \geq 0$.

Możemy tę nierówność potraktować jako nierówność kwadratową z niewiadomą x i dowolnie ustaloną liczbę y .

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy

$$f(x) = 4x^2 - 20y \cdot x + 25y^2.$$

Trójmian ten ma dodatni współczynnik przy x^2 ($a = 4$).

Obliczamy wyróżnik tego trójmianu

$\Delta = (-20y)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25y^2 = 0$. Zatem trójmian f ma dokładnie jedno miejsce zerowe. Oznacza to, że dla każdego x i dla każdego y wartość tego trójmianu jest nieujemna. To spostrzeżenie kończy dowód.

1. $5x^2 + y^2 + 4xy \geq 2x - 1$

- sposób I

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$5x^2 + y^2 + 4xy \geq 2x - 1$$

$$5x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 1 \geq 0$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(2x + y)^2 + (x - 1)^2 \geq 0.$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest każda z nierówności $(2x + y)^2 \geq 0$ oraz $(x - 1)^2 \geq 0$, a zatem również prawdziwa jest nierówność $(2x + y)^2 + (x - 1)^2 \geq 0$. To spostrzeżenie kończy dowód.

- sposób II

Zapiszmy nierówność w postaci równoważnej.

$$5x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 1 \geq 0.$$

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy.

$$f(x) = 5x^2 + (4y - 2)x + (y^2 + 1).$$

Trójmian ten ma dodatni współczynnik przy x^2 ($a = 5$).

Obliczamy wyróżnik tego trójmianu

$$\Delta = (4y - 2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (y^2 + 1) = 16y^2 - 16y + 4 - 20y^2 - 20 =$$

$$= -4(y^2 + 4y + 4) = -4(y + 2)^2.$$

Dla każdego y wyróżnik jest więc niedodatni, co oznacza, że funkcja może mieć co najwyżej jedno miejsce zerowe.

Zatem dla każdego x i dla każdego y wartość tego trójmianu jest nieujemna. To spostrzeżenie kończy dowód.

Przykład 11

1. Wykażemy, że jeśli $a \geq 0$ i $b \geq 0$, to $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$(\sqrt{a})^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Dla każdych liczb nieujemnych a i b nierówność $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ jest prawdziwa. To spostrzeżenie kończy dowód.

2. Wykażemy, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

$$a+b \geq \frac{2ab}{\sqrt{ab}}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{(\sqrt{ab})^2}{\sqrt{ab}}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Nierówność $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich a i b (co udowodniliśmy w poprzednim podpunkcie), co kończy dowód.

Uwaga. Dla liczb nieujemnych a i b liczbę $\frac{a+b}{2}$ nazywamy ich średnią arytmetyczną.

Dla liczb nieujemnych a i b liczbę $\sqrt{ab}$ nazywamy ich średnią geometryczną.

Dla liczb dodatnich a i b liczbę $\frac{2ab}{a+b}$ (zapisywaną również w postaci $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$) nazywamy ich średnią harmoniczną.

Ćwiczenie 1



Które z poniższych nierówności są prawdziwe dla każdej liczby rzeczywistej x ? Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐ $-x^2 < -2$

☐ $-2x^2 < 1$

☐ $2x^2 > x$

☐ $x^2 > -2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Które z podanych poniżej liczb należą do zbioru rozwiązań nierówności $(1 - x)(2x + 5) > 0$? Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ -2

☐ $(-\frac{4}{3})^2$

☐ $-\sqrt{2}$

☐ 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Rozstrzygnij, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Zbiorem rozwiązań nierówności $(x + 2)(4 - x) > 0$ są liczby należące do przedziału $(-2, 4)$.

☐ Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < 7$ są liczby należące do przedziału $(-7, 7)$.

☐ Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < x$ są liczby należące do przedziału $(0, 1)$.

☐ Zbiorem rozwiązań nierówności $(x + 3)(x + 5) < 0$ są liczby należące do przedziału $(3, 5)$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

W zbiorze rozwiązań nierówności $x^2 + 8x + 7 > 0$

☐ nie ma żadnej liczby dodatniej.

☐ jest dokładnie 7 liczb całkowitych.

☐ nie ma żadnej liczby ujemnej.

☐ jest liczba 0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Spośród podanych niżej nierówności wybierz te, w których zbiorze rozwiązań są dokładnie dwie dodatnie liczby całkowite. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ $x^2 - 9x + 20 \leq 0$

☐ $x^2 + 5x + 4 < 0$

☐ $6x^2 - 13x - 8 \leq 0$

☐ $x^2 + 4x - 21 < 0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Spośród podanych niżej nierówności wybierz te, w zbiorze rozwiązań których zawiera się zbiór rozwiązań nierówności $x^2 + 2x - 8 \leq 0$. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ $x^2 - 9 < 0$

☐ $x^2 - 16 < 0$

☐ $x^2 - 36 < 0$

☐ $x^2 - 25 < 0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Która z podanych poniżej liczb należy do zbioru rozwiązań nierówności $(x + 3)(x - 4) > 0$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 3

☐ -2

☐ 5

☐ 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Na którym z rysunków poniżej przedstawiono nierówność $(x - 2)(x + 5) < 0$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐☐☐



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Zbiorem rozwiązań nierówności $(2x + 4)(x - k) < 0$ jest przedział $(-4, -2)$. Ile wynosi k ?
Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $k = 4$

☐ $k = 2$

☐ $k = -4$

☐ $k = -2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Jaki jest zbiór rozwiązań nierówności $x^2 < 9x$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $(-9, 0)$

☐ $(-3, 3)$

☐ $(0, 9)$

☐ $(-3, 0)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Wyznacz najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $(3x + 5)(2x - 7) \leq 2(3x + 5)$. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 0

☐ 1

☐ -1

☐ -2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Jaki jest zbiór rozwiązań nierówności $x^2 > 16$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $(-\infty, 8) \cup (8, +\infty)$

☐ $(-16, +\infty)$

☐ $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

☐ $(4, +\infty)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Która z podanych poniżej liczb należy do zbioru rozwiązań nierówności $4x^2 + 1 \leq 4x$?
Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 1

☐ $\frac{1}{4}$

☐ 0

☐ $\frac{1}{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Funkcje f i g określone są wzorami $f(x) = x^2 + x$ oraz $g(x) = x - 1$. Która z poniższych nierówności jest prawdziwa, jeśli x jest dowolną liczbą rzeczywistą? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $f(x) > g(x)$

☐ $f(x) > 0$

☐ $f(x) < g(x)$

☐ $g(x) < 0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Rozwiąż nierówność. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz prawidłową odpowiedź.

- $(x + 1)(x - 2) < 0$
- $(x - 5)(4x + 11) \geq 0$
- $(x - 2)(6 - 3x) < 0$
- $(3 - x)(2x + 1) \geq 0$

$x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$x \in (-2, 3)$

$x \in \langle -\frac{1}{2}, 3 \rangle$

$x \in (-\infty, -2\frac{3}{4}) \cup \langle 5, +\infty \rangle$

$x \in \langle -\frac{1}{3}, 4 \rangle$

$x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

$x \in (-1, 2)$

$x \in (-\infty, -2\frac{1}{2}) \cup \langle 4, +\infty \rangle$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Rozwiąż nierówność. Kliknij w lukę, aby wyświetlić listę rozwijalną, i wybierz prawidłową odpowiedź.

- $x^2 \leq 25$
- $8x < x^2$
- $3x + 2x^2 \geq 0$
- $9 - 3x^2 > 0$

$x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

$x \in \langle -5, 6 \rangle$

$x \in \langle -5, 5 \rangle$

$x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup \langle 0, +\infty \rangle$

$x \in (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup \langle 1, +\infty \rangle$

$x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

$x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$x \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Rozwiąż nierówność. Połącz w pary wyrażenie i jego rozwiązanie.

$$x^2 - 18x + 81 > 0$$

każda liczba rzeczywista x spełnia tę nierówność

$$x^2 - 2x + 3 < 0$$

$$x \in (-\infty, 9) \cup (9, +\infty)$$

$$x^2 - 6x + 10 > 0$$

nierówność nie ma rozwiązań rzeczywistych

$$3x^2 - 18x + 27 \leq 0$$

$$x = 3$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Rozwiąż nierówność. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz prawidłową odpowiedź.

- $x^2 + 2x - 24 < 0$
- $x^2 - 5x - 24 > 0$
- $-x^2 + 4x + 32 \geq 0$
- $-x^2 - 7x + 18 \leq 0$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (8, +\infty)$$

$$x \in (-\infty, -5) \cup (6, +\infty)$$

$$x \in (-8, 6)$$

$$x \in \langle -4, 8 \rangle$$

$$x \in (-6, 4)$$

$$x \in \langle -2, 6 \rangle$$

$$x \in (-\infty, -6) \cup \langle 4, +\infty \rangle$$

$$x \in (-\infty, -9) \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Rozwiąż nierówność. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz prawidłową odpowiedź.

1. $2x^2 + 7x - 4 \leq 0$
2. $3x^2 + 10x + 8 < 0$
3. $-2x^2 - 15x - 27 < 0$
4. $-3x^2 - 23x + 8 \leq 0$

- $x \in (-2, -1\frac{1}{3})$
- $x \in (-\infty, -4\frac{1}{4}) \cup (-6, +\infty)$
- $x \in \langle -4, \frac{1}{2} \rangle$
- $x \in (-\infty, -6) \cup \langle \frac{2}{3}, +\infty \rangle$
- $x \in (-\infty, -8) \cup \langle \frac{1}{3}, +\infty \rangle$
- $x \in \langle -2, \frac{1}{2} \rangle$
- $x \in (-4, -1\frac{1}{3})$
- $x \in (-\infty, -4\frac{1}{2}) \cup (-3, +\infty)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Rozwiąż nierówność. Kliknij w lukę, aby wyświetlić listę rozwijalną, i wybierz prawidłową odpowiedź.

- $4x^2 - 8x - 45 > 0$
- $15x^2 + 7x - 2 \geq 0$
- $-4x^2 + 25x - 6 < 0$
- $-6x^2 + 7x + 10 \geq 0$

- $x \in (-\infty, -\frac{2}{5}) \cup \langle \frac{1}{5}, +\infty \rangle$
- $x \in \langle -\frac{5}{8}, 2 \rangle$
- $x \in \langle -\frac{5}{6}, 2 \rangle$
- $x \in (-\infty, -4\frac{1}{2}) \cup (4\frac{1}{2}, +\infty)$
- $x \in (-\infty, \frac{1}{6}) \cup (6, +\infty)$
- $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup \langle \frac{1}{5}, +\infty \rangle$
- $x \in (-\infty, -2\frac{1}{2}) \cup (4\frac{1}{2}, +\infty)$
- $x \in (-\infty, \frac{1}{4}) \cup (6, +\infty)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x + 5 \geq 0$ i wypisz wszystkie liczby całkowite, które ją spełniają.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które spełniają jednocześnie nierówności $5x^2 + 7x - 24 \geq 0$ i $x < 2$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23



Uzasadnij, że jeżeli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to prawdziwa jest nierówność $25x^2 + 36 \geq 60x$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 24



Uzasadnij, że jeżeli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to prawdziwa jest nierówność

$$\frac{3x^2}{10} + \frac{5}{6} \geq x.$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 25



Uzasadnij, że jeżeli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to prawdziwa jest nierówność

$$2x^2 + 11 > 9x.$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 26



Uzasadnij, że jeżeli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to prawdziwa jest nierówność

$$5(x^2 + 2) > 14x.$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 27



Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $49x^2 + 9y^2 \geq 42xy$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 28



Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $2x^2 + y^2 + 8x + 16 \geq 2xy$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 29



Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $x^2 + 10y^2 + 6xy \geq 5(2y - 5)$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Wykaż, że nierówność $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.