



Proste równania logarytmiczne

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Proste równania logarytmiczne

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Abstrakcja (abstrahowanie to z łac. *oderwanie*) jest procesem tworzenia pojęć, w którym od konkretów dochodzi się do pojęcia bardziej ogólnego, poprzez konstantowanie wspólnych własności.

Abstrakcja kojarzy się z reguły z filozofią lub sztuką. Patrząc na obrazy Picassa czy Salvadora Dali, myślimy – abstrakcja, surrealizm.

Matematyka też posługuje się pojęciami abstrakcyjnymi. Nie są one tak widowiskowe jak dzieła sztuki, ale równie piękne.



Portret pani Isabel Styler-Tas (1945)

Salvador Dalí

Źródło: Richard Mortel, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 2.0.

W tym materiale zajmować się będziemy z pozoru abstrakcyjno – surrealistycznymi elementami, jakimi są równania logarytmiczne.

Materiał ten wykracza nieco poza podstawę programową, więc możesz potraktować go jako ciekawostkę lub rozszerzenie wiadomości o logarytmach. Umiejętność rozwiązywania takich równań przyda ci się, gdy będziesz zajmować się zastosowaniem logarytmów w różnych dziedzinach wiedzy.

Twoje cele

- Określisz dziedzinę równania logarytmicznego.
- Zastosujesz definicję logarytmu do rozwiązania prostego równania logarytmicznego.
- Przekształcisz wyrażenia zawierające logarytmy.

Przeczytaj

Zajmiemy się teraz równaniami logarytmicznymi, których rozwiązanie wymaga tylko znajomości definicji logarytmu i podstawowych własności funkcji logarytmicznej.

Definicja: Równanie logarytmiczne

Równaniem logarytmicznym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje w wyrażeniu logarytmowanym lub w podstawie logarytmu.

Rozwiązując równanie logarytmiczne, należy uwzględnić założenia wynikające z definicji logarytmu – liczba logarytmowana musi być dodatnia, a podstawa dodatnia i różna od jedności. Określamy w ten sposób dziedzinę równania logarytmicznego.

Rozważymy najpierw kilka prostych równań, które możemy rozwiązać, korzystając bezpośrednio z definicji logarytmu.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $\log_6 x = 2$.

Określamy dziedziną równania: $x > 0$.

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x = 6^2$$

$$x = 36$$

$$36 > 0$$

Wyznaczona liczba należy do dziedziny równania.

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba 36.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $\log_x 5 = -1$.

Określamy dziedzinę równania: $x > 0$ i $x \neq 1$.

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x^{-1} = 5$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} > 0 \text{ i } \frac{1}{5} \neq 1$$

Wyznaczona liczba należy do dziedziny równania.

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{1}{5}$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $\log_{11} (2 - 4x) = 1$.

Określamy dziedzinę równania.

$$2 - 4x > 0$$

$$-4x > -2$$

$$x < 0,5$$

Na mocy definicji logarytmu:

$$2 - 4x = 11^1$$

$$-4x = 9$$

$$x = -2,25$$

$$-2,25 < 0,5$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba $(-2,25)$.

Rozwiązywanie równań logarytmicznych może prowadzić do rozwiązania równania kwadratowego, a czasem też nierówności kwadratowej.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $\log_x 64 = 2$.

Określamy dziedzinę równania: $x > 0$, $x \neq 1$.

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x^2 = 64$$

$$x^2 - 64 = 0$$

$$(x - 8)(x + 8) = 0$$

$$x = 8 \text{ lub } x = -8$$

Tylko jedna z wyznaczonych liczb należy do dziedziny równania (jest dodatnia i różna od jeden).

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba 8.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $\log_5(x^2 - x - 1) = 0$.

Określamy dziedzinę D równania: $x^2 - x - 1 > 0$.

Rozwiązujemy nierówność kwadratową.

$$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$$

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ lub } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$D = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$$

Na mocy definicji logarytmu:

$$x^2 - x - 1 = 5^0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x = \frac{1-3}{2} = -1 \text{ lub } x = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$-1 \in D, 2 \in D$$

Odpowiedź:

Liczby -1 i 2 są rozwiązaniami równania.

Rozwiążemy teraz **równanie logarytmiczne**, w którym niewiadoma występuje zarówno w podstawie, jak i w liczbie logarytmowanej.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie $\log_{x-3}(x^2 - 4x - 1) = 2$.

Tym razem nie będziemy wyznaczać dziedziny, ale założymy, że równanie ma rozwiązanie i jest nim liczba x .

Rozwiążemy to równanie i dopiero wtedy sprawdzimy, czy wyznaczona liczba należy do dziedziny równania.

Z definicji logarytmu wynika, że

$$(x - 3)^2 = x^2 - 4x - 1$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$x^2 - 6x + 9 - x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$-2x = -10$$

$$x = 5$$

Sprawdzenie:

$$5 - 3 = 2 > 0 \text{ i } 2 \neq 1$$

$$5^2 - 4 \cdot 5 - 1 = 4 > 0$$

Liczba 5 należy do dziedziny równania.

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Pokażemy teraz, jak można rozwiązać równanie, w którym logarytm występuje w wykładniku potęgi.

Przykład 7

Rozwiążemy równanie $x^{\log_{10} x + 2} = 1000$.

Określamy dziedzinę równania: $D = (0, \infty)$.

Logarytmujemy obie strony równania, korzystamy z logarytmu o podstawie 10.

$$\log_{10} x^{\log_{10} x + 2} = \log_{10} 1000$$

Korzystamy z własności logarytmu.

$$(\log_{10} x + 2) \cdot \log_{10} x = 3$$

Podstawiamy: $t = \log_{10} x$.

$$(t + 2) \cdot t = 3$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$t_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

$$t_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Wracamy do podstawienia.

$$\log_{10} x = -3, \text{ stąd } x = 0,001$$

lub

$$\log_{10} x = 1, \text{ stąd } x = 10$$

Obie wyznaczone liczby należą do dziedziny równania.

Odpowiedź:

Liczby 0,001 i 10 są rozwiązaniami równania.

Słownik

równanie logarytmiczne

to równanie, w którym niewiadoma występuje w wyrażeniu logarytmowanym lub w podstawie logarytmu

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć – rozwiąż najpierw samodzielnie podane przykłady, a następnie porównaj z prezentowanymi rozwiązaniami.

W galerii zaprezentujemy przykłady rozwiązywania równań logarytmicznych, korzystając z różnowartościowości funkcji logarytmicznej.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $\log_3(5x + 5) = \log_3(4x + 4)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozwiązaniem równania $\log_{10}[\log_{10}(\log_{10} x)] = 0$ jest liczba:

☐ 10^2

☐ 1

☐ 10^{10}

☐ 10

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozwiązaniem równania $\log_4[\log_3(\log_a x)] = 0,5$ jest liczba 2^9 , zatem:

☐ $a = 512$

☐ $a = 9$

☐ $a = 2$

☐ $a = 4$

Ćwiczenie 3



Wskaż wszystkie liczby, które **nie** są rozwiązaniami równania $\log_{x+2}(2x + 12) = 2$.

☐ -1

☐ 2

☐ -2

☐ -4

Ćwiczenie 4



Połącz w pary równanie i jego rozwiązanie.

$$\log_{x+1} 5 = 1$$

3

$$\log_2 32 = x + 6$$

4

$$\log_{x+3} 6 = 1$$

-1

$$\log_x 125 = 3$$

5

Ćwiczenie 5



Dane jest równanie $\frac{\log_{10} x}{\log_{10}(x+2)} = -1$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Suma pierwiastków równania jest mniejsza od 1.

☐ Do dziedziny równania należy liczba (-1)

☐ Do dziedziny równania nie należy liczba (-3) .

☐ Równanie ma dwa rozwiązania.

Ćwiczenie 6



Połącz w pary równanie i jego dziedzinę.

$$\log_{x+5} 2 = 4$$

$$D = (-5, -4) \cup (-4, \infty)$$

$$\log_3(x-1) = \log_3(x+4)$$

$$D = (1, \infty)$$

$$\log_2\left(4 - \frac{1}{6}x\right) = 2$$

$$D = (-\infty, 24)$$

Ćwiczenie 7



Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

Dane jest równanie $\log_{x+2}(x+2)^2 = \log_{x+2}\sqrt{256}$.

Dziedziną równania jest zbiór .

W zbiorze D równanie jest równoważne równaniu , którego rozwiązaniami są liczby 2 i .

Ponieważ liczba nie należy do dziedziny równania, rozwiązaniem równania jest tylko liczba .

Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie $\log_{\frac{1}{9}}(2x^2 - 2x - 1) = -0,5$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Proste równania logarytmiczne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa dziedzinę równania logarytmicznego
- stosuje definicję logarytmu do rozwiązania prostego równania logarytmicznego
- przekształca wyrażenia zawierające logarytmy
- analizuje różne sposoby rozwiązywania prostych równań logarytmicznych i wybiera najskuteczniejsze do rozwiązania nowego problemu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- 1-2-3

- CPM

Formy pracy:

- praca w małych grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą 1–2–3 powtarzają w grupach 3-osobowych wiadomości na temat logarytmów (uczeń nr 1 zadaje pytanie, uczeń nr 2 odpowiada, uczeń nr 3 weryfikuje odpowiedź i tak na przemian, aż do wyczerpania wiadomości – przy czym „weryfikator” może korzystać z dostępnych źródeł wiedzy lub pomocy nauczyciela).
2. Po kilku minutach, ochotnik przedstawia wszystkie uzyskane wiadomości, inni ewentualnie uzupełniają wypowiedź.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, zwracając przy tym uwagę, że wszystkie równania będą rozwiązywane tylko przy wykorzystaniu definicji logarytmu i różnowartościowości funkcji logarytmicznej.
4. Warto, aby nauczyciel wspomniał o tym, że umiejętność rozwiązywania prostych równań logarytmicznych przyda się w czasie zajęć ukazujących zastosowanie logarytmów w innych dziedzinach wiedzy.
5. Uczniowie wspólnie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach techniką CPM. Ich zadaniem jest zaplanowanie poszczególnych etapów rozwiązywania równania logarytmicznego, w oparciu o posiadane umiejętności rozwiązywania równań liniowych, kwadratowych, wymiernych i wykładniczych.
2. Powinni przy tym określić przybliżony czas wykonywania każdej z zaplanowanych czynności, ustalić związki przyczynowo skutkowe między czynnościami (np. dziedziną i rozwiązaniem), wyznaczyć sposób sprawdzenia poprawności uzyskanego wyniku.
3. Kolejnym krokiem jest zapoznanie się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj” oraz w galerii zdjęć interaktywnych i zmiana, modyfikacja lub uzupełnienie wcześniejszych zapisów.
4. Przedstawiciele grup prezentują wyniki pracy grupy.
5. Finalnym produktem powinien być wspólnie ustalony algorytmiczny model rozwiązywania poznanych typów równań logarytmicznych.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Definicja logarytmu. Własności logarytmu](#)

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać jako samouczek przed mini-kartkówką.