Rozkład wielomianu na czynniki przez grupowanie

Rozkład wielomianu na czynniki przez grupowanie

Źródło: Nick Fewings, dostępny w internecie: unsplash.cpm, domena publiczna.

Wiemy, że każdy wielomian stopnia dodatniego można zapisać w postaci iloczynu wielomianów pierwszego stopnia i nierozkładalnych wielomianów drugiego stopnia. Taki zapis jest bardzo przydatny w przypadku rozwiązywania równań wielomianowych, czyli równań postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem.

Twoje cele

- Sprowadzisz wielomian do postaci iloczynowej przez grupowanie i wyłączanie wspólnych czynników przed nawias.
- Wykorzystasz grupowanie w problemach związanych z podzielnością liczb.

Przeczytaj

Podstawowe założenia metody rozkładania wielomianu na czynniki metodą grupowania wyrazów można opisać następującym schematem:

- Ustaw wszystkie wyrazy wielomianu tak, by można było potworzyć grupy ze wspólnym czynnikiem. W razie potrzeby możesz do wielomianu dodać i odjąć potrzebne składniki – ale tak, by uzyskany po modyfikacjach wielomian równy był wielomianowi wyjściowemu. Czasem pomocne będzie zapisanie niektórych składników w postaci sumy lub różnicy kilku wyrażeń.
- W każdej grupie wyłącz odpowiednie czynniki przed nawias w taki sposób, by wyrażenia w nawiasach w każdej z grup były równe.
- Wyłącz nawias przed nawias, czyli wyłącz wspólne wyrażenie w nawiasie z każdej grupy przed cały wielomian, uzyskując zapis w postaci iloczynu dwóch wyrażeń.

Ten ogólny schemat stanie się jaśniejszy po przeanalizowaniu przedstawionych przykładów.

Z zasadniczego twierdzenia teorii wielomianów wiemy, że każdy wielomian stopnia większego od 2 możemy rozłożyć na czynniki. W praktyce stosowanie metody grupowania będzie ułatwiać rozkład na czynniki tylko w niektórych przypadkach - nie zawsze uda nam się zauważyć odpowiednie pogrupowanie pozwalające wyłączyć wspólny czynnik.

Przykład 1

Zapiszemy w postaci iloczynowej wielomian $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + 9x - 6$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że można rozdzielić wielomian na dwie grupy tak, by w każdej uzyskać w nawiasie czynnik $3x - 2$
$W(x) = x^2(3x - 2) + 3(3x - 2)$.

Zatem $W(x) = (3x - 2)\left(x^2 + 3\right)$ i uzyskane czynniki są już nierozkładalne.

Można zauważyć inną metodę grupowania, prowadzącą oczywiście do tego samego rezultatu
$W(x) = 3x^3 + 9x - 2x^2 - 6$.

Tym razem wspólnym czynnikiem w obu grupach będzie $x^2 + 3$
$W(x) = 3x\left(x^2 + 3\right) - 2\left(x^2 + 3\right)$.

Po wyłączeniu wspólnego czynnika uzyskamy taki sam rozkład, jak poprzednio
$W(x) = (x^2 + 3)(3x - 2)$.

Przykład 2

Zapiszemy w postaci iloczynowej wielomian
$W(x) = x^3 + \left(\sqrt{3} + 5\right)x^2 + \left(5\sqrt{3} - 6\right)x - 6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Przekształćmy wielomian dążąc do uzyskania po pogrupowaniu wspólnego czynnika $x + \sqrt{3}$.

$$W(x) = x^3 + x^2\sqrt{3} + 5x^2 + 5x\sqrt{3} - 6x - 6\sqrt{3}$$

$$W(x) = x^2\left(x + \sqrt{3}\right) + 5x\left(x + \sqrt{3}\right) - 6\left(x + \sqrt{3}\right)$$

Uzyskujemy postać iloczynową
$W(x) = \left(x + \sqrt{3}\right)(x^2 + 5x - 6)$,
przy czym czynnik drugiego stopnia możemy jeszcze rozłożyć
$W(x) = \left(x + \sqrt{3}\right)(x + 6)(x - 1)$.

Przykład 3

Zapiszemy w postaci iloczynowej wielomian $W(x) = 4x^3 - 13x - 6$.

Rozwiązanie

Zapiszmy składnik $-13x$ tak, by można było pogrupować wielomian na dwie grupy ze wspólnym czynnikiem
$W(x) = 4x^3 - x - 12x - 6$.

Zauważmy, że po wyłączeniu wspólnych czynników przed nawias dzięki użyciu wzoru skróconego mnożenia będzie możliwe zapisanie wielomianu $W(x)$ w postaci iloczynowej.

$$W(x) = x\left(4x^2 - 1\right) - 6(2x + 1)$$

$$W(x) = x(2x - 1)(2x + 1) - 6(2x + 1)$$

$$W(x) = (2x + 1)(x(2x - 1) - 6)$$

Drugi nawias możemy rozłożyć na postać iloczynową tak, jak robiliśmy to w przypadku funkcji kwadratowej

$W(x) = (2x+1)\left(2x^2 - x - 6\right)$,
$W(x) = (2x+1)(2x+3)(x-2)$.

Przykład 4

Zapiszemy w postaci iloczynowej wielomian $W(x) = 2x^3 - 7x^2 + 14x - 16$.

Rozwiązanie

Uporządkujmy wyrazy wielomianu tak, by wyłączyć czynnik $x - 2$.

$W(x) = 2x^3 - 16 - 7x^2 + 14x$

$W(x) = 2\left(x^3 - 8\right) - 7x(x-2)$

Wykorzystajmy wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów
$W(x) = 2(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) - 7x(x-2)$,
$W(x) = (x-2)\left(2x^2 + 4x + 8 - 7x\right)$.

Uzyskujemy zapis
$W(x) = (x-2)\left(2x^2 - 3x + 8\right)$,
przy czym czynnik drugiego stopnia w drugim nawiasie jest już nierozkładalny ($\Delta < 0$).

Rozkład wielomianu na czynniki może być pomocny w niektórych zadaniach związanych z podzielnością.

Przykład 5

Wykaż, że jeżeli n jest liczbą całkowitą, to liczba $\frac{n^4 - n^3 - n^2 + n}{6}$ również jest całkowita.

Rozwiązanie

Mamy wykazać, że licznik ułamka jest liczbą podzielną przez 6.

$n^4 - n^3 - n^2 + n = n^3(n-1) - n(n-1) =$
$= (n-1)\left(n^3 - n\right) = (n-1)n\left(n^2 - 1\right) =$
$= (n-1)n(n+1)(n-1)$.

$n-1$, n i $n+1$ to trzy kolejne liczby całkowite – jest więc wśród nich liczba podzielna przez 2 i liczba podzielna przez 3.

2 i 3 to liczby względnie pierwsze, więc iloczyn $(n-1)n(n+1)$ jest podzielny przez 6, co oznacza, że licznik ułamka jest podzielny przez 6, czyli teza zachodzi.

Słownik

postać iloczynowa wielomianu

jeżeli wielomian
$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ stopnia n ma n pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
to można go zapisać w postaci iloczynowej
$W(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$

zasadnicze twierdzenie teorii wielomianów

- jedyne wielomiany nierozkładalne stopnia dodatniego o współczynnikach rzeczywistych to wszystkie wielomiany pierwszego stopnia oraz wielomiany drugiego stopnia z ujemnym wyróżnikiem Δ
- każdy wielomian stopnia większego od 2 można zapisać w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych i niezerowej stałej
- zapis w postaci iloczynu jest jednoznaczny z dokładnością do przemnożenia czynników przez stałą niezerową

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami rozkładu wielomianu na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D6YOXpD1T

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej rozkładu wielomianu na czynniki przez grupowanie wyrazów.

Polecenie 2

Posługując się odpowiednim grupowaniem wyrazów, rozłóż na czynniki wielomian $W(x) = 6x^3 + 4x^2 - 3x - 2$

Polecenie 3

Posługując się odpowiednim grupowaniem wyrazów, rozłóż na czynniki wielomian $V(x) = x^3 - 31x + 30$

Polecenie 4

Posługując się odpowiednim grupowaniem wyrazów, rozłóż na czynniki wielomian $F(x) = 5x^4 + 6x^3 - 6x - 5$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozkład wielomianu na czynniki przez grupowanie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje metodę sprowadzania wielomianów do postaci iloczynowej przez grupowanie i wyłączanie wspólnych czynników przed nawias,
- wykorzystuje grupowanie w problemach związanych z podzielnością liczb.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie podają przykłady wielomianów zapisanych w postaci iloczynowej.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4 osobowych analizują algorytm postępowania przedstawiony na początku sekcji Przeczytaj. Następnie metodą tekstu przewodniego rozwiązują przykłady. Wątpliwości wyjaśniane są na forum klasy wraz z nauczycielem.
2. Uczniowie w parach oglądają animację i następnie omawiają ją wraz z nauczycielem.
3. Uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobu rozkładu wielomianu na czynniki metodą grupowania wyrazów.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Wielomiany

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem lub jako wstęp do tematu „Równania wielomianowe”.