



Jak zademonstrować zasadę zachowania momentu pędu?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Model matematyczny](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Film \(standardowy\)](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak zademonstrować zasadę zachowania momentu pędu?

Źródło: dostępny w internecie: <https://www.istockphoto.com/pl/zdjęcie/przedmiot-demonstracyjny-%C5%BCyroskop-gm533363021-56269848> [dostęp 6.10.2019].

Czy to nie ciekawe?

Zdarzyło Ci się kiedyś wrzucić monetę do „lejka grawitacyjnego” czy „lejka na datki”? Na obrzeżu dużego lejka znajduje się płaska prowadnica, w której można umieścić monetę. Moneta po puszczeniu nabiera prędkości, opuszcza prowadnicę i swobodnie toczy się we wnętrzu lejka po torze przypominającym spiralę. Na początku prędkość monety jest niewielka, ale w miarę jak nieubłaganie zbliża się ona do środka lejka, obserwujemy ciekawe zjawisko – moneta wyraźnie zaczyna przyspieszać! Jest to na tyle widowiskowe, że aż chce się wrzucić kolejną monetę!



Rys. a. Przykładowa realizacja lejka grawitacyjnego.

Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/pl/photos/lejek-darowizny-lej-grawitacyjny-406853/> [dostęp 16.04.2022], domena publiczna.

Ale dlaczego właściwie moneta przyspiesza? Wiele popularnych źródeł powołuje się na zasadę zachowania momentu pędu monety staczającej się wgłąb lejka. Czy jest to trafne uzasadnienie? A może jest ono jedynie przybliżeniem?

Twoje cele

W tym materiale:

- opisziesz sposoby zademonstrowania zasady zachowania momentu pędu,
- zademonstrujesz eksperymentalnie zachowanie momentu pędu w ruchu wahadła stożkowego,
- przeprowadzisz symulację eksperymentu demonstrującego zasadę zachowania momentu pędu w zderzeniu niesprężystym,
- rozwiążesz zadania, wykorzystując zasadę zachowania momentu pędu.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Zasada zachowania momentu pędu

Przypomnijmy brzmienie zasady zachowania momentu pędu dla pojedynczego ciała, bryły sztywnej lub punktu materialnego, na które działają siły zewnętrzne.

Moment pędu $\vec{L}$ ciała pozostaje stały, gdy moment $\vec{M}$ siły wypadkowej działającej na to ciało jest zerowy. Rozpatrując ruch ciała, do którego nie jest przyłożony zewnętrzny moment siły, wiemy, że w każdej chwili jego moment pędu ma stały kierunek oraz stałą wartość, tj. $\vec{L} = \text{const.}$

Gdy w izolowanym układzie ciał działają wyłącznie siły wewnętrzne, to moment pędu tego układu jest zachowany.

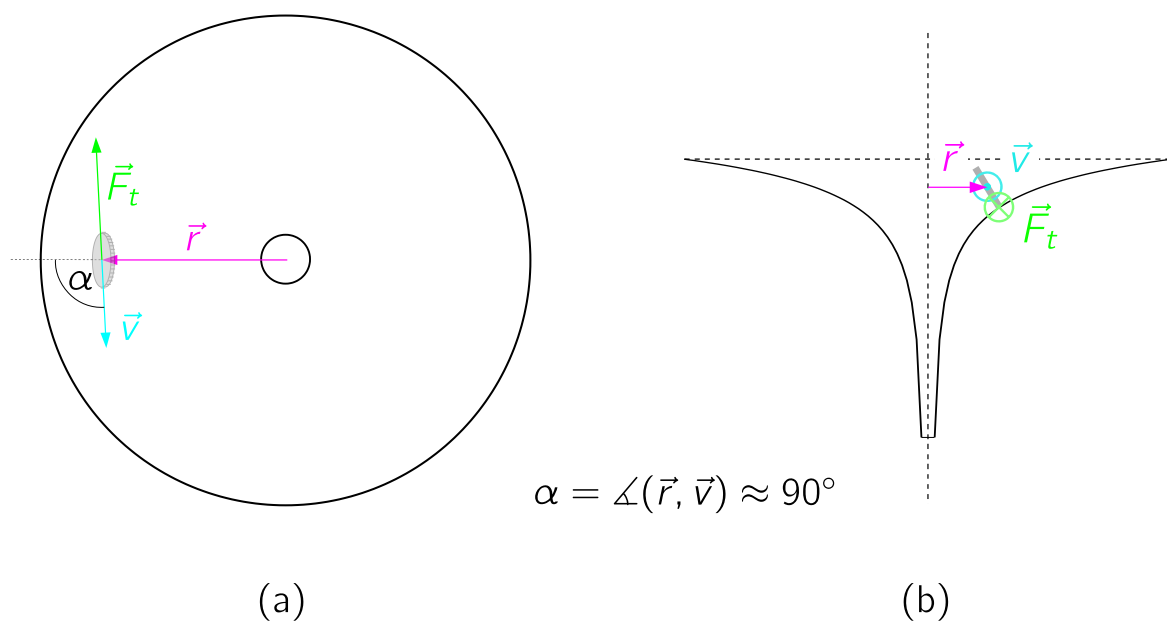
Moneta w lejku grawitacyjnym

We wspomnianym we Wprowadzeniu lejku grawitacyjnym poruszającym się ciałem jest moneta. Moneta porusza się coraz szybciej w miarę jak schodzi coraz niżej w lejku, zbliżając się do jego osi.

Zastanówmy się, czy taki ruch wynika z zasady zachowania momentu pędu.

Warunki początkowe

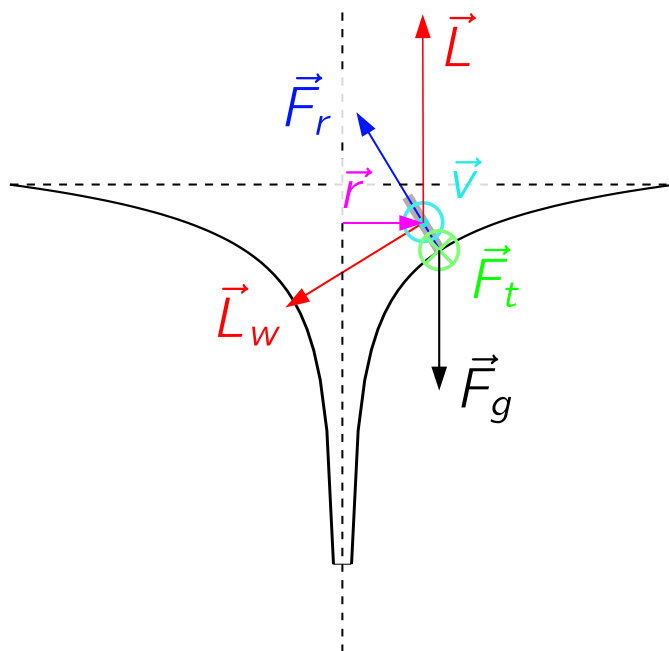
W chwili początkowej, w pobliżu obrzeża lejka, monecie nadano prędkość $\vec{v}_0$ skierowaną pod kątem bliskim 90° do promienia wodzącego $\vec{r}$ (Rys. 1.).



Rys. 1. Moneta we wnętrzu lejka o symetrii obrotowej. (a) widok z góry, (b) widok w przekroju. Kąt α jest nieco większy od 90° , dlatego też zastosowane w (b) oznaczenie dla wektorów prędkości i siły tarcia tocznego jest przybliżeniem.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

W rezultacie moneta potoczyła się. Uzyskała więc *własny* moment pędu $\vec{L}_w$ w ruchu obrotowym wokół własnej osi (Rys. 2). Uzyskała też *orbitalny* moment pędu $\vec{L}$ związany z ruchem obiegowym wokół pionowej osi, będącej osią symetrii lejka.



Rys. 2. Siły działające na monetę toczącą się po wewnętrznej powierzchni lejka (siła ciężkości $\vec{F}_g$, siła reakcji $\vec{F}_r$ oraz tarcie toczne $\vec{F}_t$) oraz pozostałe wielkości związane z ruchem monety.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Moneta uzyskała także **energię kinetyczną**, co jest tu istotne. W trakcie wtaczania się do lejka maleje bowiem jej **energia potencjalna** – można rzec, że jest to powolne spadanie ku Ziemi. To zaś nie pozostaje bez wpływu na prędkość toczenia się monety.

Przybliżenie punktu materialnego poruszającego się bez tarcia

By uprościć opis ruchu monety, możemy uczynić dwa założenia:

1. Jest ona punktem materialnym. Pomijamy wtedy jej własny moment pędu.
2. Nie działa na nią żadna siła oporu ani siła tarcia.

Wypadkowa sił ciężkości $\vec{F}_g$ oraz reakcji podłoża $\vec{F}_r$ może być skierowana zgodnie z wektorem $\vec{r}$ i przeciwnie do niego zwrócona. Pełniłaby ona rolę siły dośrodkowej. Jej moment byłby równy zeru, więc wspólne działanie sił ciężkości i reakcji podłoża zachowywałoby orbitalny moment pędu $\vec{L}$. Ale w takiej sytuacji punktowa moneta poruszałaby się po okręgu, w poziomej płaszczyźnie, ze stałą prędkością. Nie wtaczałaby się do lejka.

Dla zainteresowanych

Uzyskanie opisanej tu sytuacji jest mało prawdopodobne. Wymagałoby to nadania początkowej prędkości skierowanej idealnie poziomo, o wartości specyficznym dobranej do kształtu i rozmiarów lejka.

Niewielkie odstępstwo od tych wyidealizowanych warunków spowodowałoby, że moneta poruszałaby się po znacznie bardziej skomplikowanym torze. Nie leżałby on w żadnej płaszczyźnie, lecz przebiegałby w ustalonym przez warunki początkowe zakresie wysokości. Siłą rzeczy, odległość monety od osi symetrii lejka byłaby zmienna. Moment pędu monety miałby zmienny kierunek, choć jego rzut na oś symetrii lejka miałby stałą wartość.

Ciekawostka

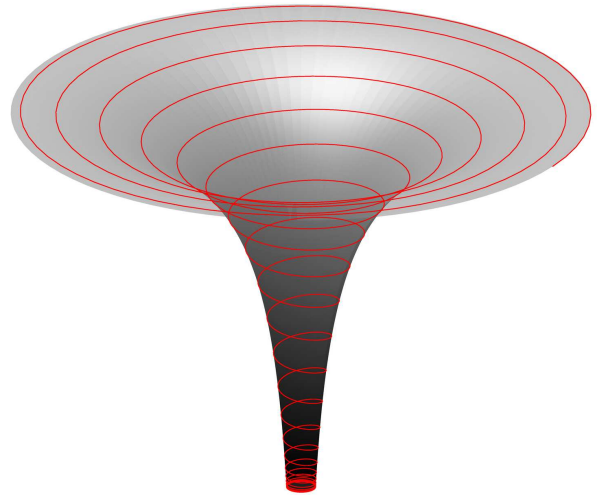
Podobne zasady obowiązują w astronomii. Ziemia (a także inne planety) obiega Słońce po orbicie eliptycznej pod wpływem siły grawitacji. Jest ona **siłą centralną**, więc orbitalny moment pędu Ziemi jest stały. Ze względu jednak na zmienną odległość od Słońca, zmienna jest także prędkość Ziemi: tam, gdzie odległość jest duża, prędkość jest mała i odwrotnie.

Mimo słonecznego przyciągania, Ziemia krąży po zamkniętym torze i nie spada na Słońce.

Nie zaobserwowalibyśmy więc wpadania monety do lejka. Z kolei poważne odstępstwo od tych warunków, na przykład nadanie zdecydowanie zbyt małej prędkości początkowej lub skierowanie jej ku osi lejka, mogłoby spowodować wtoczenie się monety do lejka zanim wykonałaby ona pełny obieg wokół jego osi.

Obecność tarcia zmienia charakter ruchu

Dlaczego więc „punktowa moneta” nie krąży w lejku w opisany wyżej sposób, lecz po torze, którego rzut wzdłuż osi lejka przypomina spiralę (Rys. 3.)? Dlaczego moneta nie wraca w okolice punktu startowego, tylko krąży coraz bliżej osi lejka? Najłatwiejszym do wskazania powodem jest obecność oporów ruchu, w tym siły tarcia tocznego monety o powierzchnię lejka. Siła ta tworzy z wektorem $\vec{r}$ kąt zbliżony do prostego (Rys. 1a.).



Moment siły tarcia zmniejsza wartość orbitalnego momentu pędu $\vec{L}$ - nie jest on w tym ruchu zachowany. Praca siły tarcia obniża całkowitą energię mechaniczną monety. Dlaczego zatem moneta toczy się coraz szybciej? Otóż spadkowi jej energii mechanicznej towarzyszy jeszcze szybszy spadek jej energii potencjalnej. Wynika to ze specyficznego kształtu lejka. W efekcie, choć brzmi to paradoksalnie, rośnie energia kinetyczna, a wraz z nią prędkość monety. Podobny proces zachodzi z orbitalnym momentem pędu. Przyjmijmy, w przybliżeniu, że jego wartość jest dana wyrażeniem

Rys. 3. Ilustracja toru monety w lejku grawitacyjnym.
 Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

$$L \approx rp = rmv .$$

Zmniejszaniu się r towarzyszy tak wolne zmniejszanie się wartości momentu pędu L , że - dla spełnienia powyższej równości - wzrasta wartość prędkości v . To także związane jest z kształtem lejka.

Podsumowanie

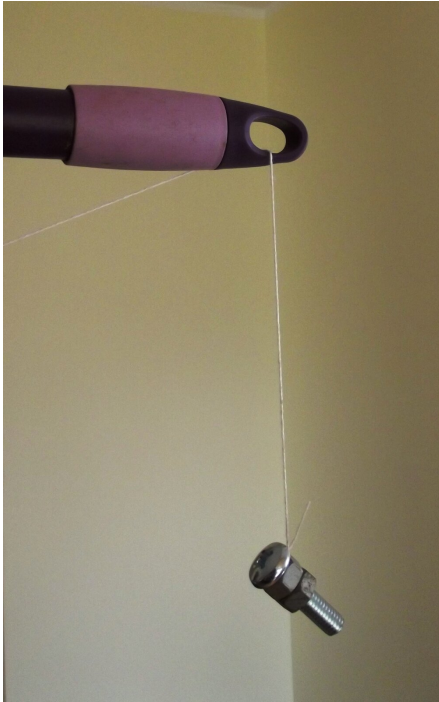
Ruch monety w lejku jest bardzo widowiskowy. Jego opis wymaga uwzględnienia zarówno momentu pędu, jak i energii mechanicznej monety.

Jest prawdą, że gdyby nie nadać monecie początkowego momentu pędu (lub nadać zbyt mały), to wtoczyłaby się ona (niemal) wprost do lejka, bez widowiskowego efektu związanego z wielokrotnym okrażaniem jego osi. Jednak ruchu monety nie można uznać za demonstrację zasady zachowania momentu pędu - jest on raczej ilustracją niezachowania momentu pędu w specyficznych warunkach.

Wahadło stożkowe

Zasadę zachowania momentu pędu dla punktu materialnego bez trudu zademonstrujesz nawet w warunkach domowych. Użyjesz do tego tzw. wahadła stożkowego. Jest to niewielki ciężarek, zawieszony na nici, który trzeba odpowiednio wprowadzić w ruch obiegowy wokół pionowej osi wyznaczonej przez położenie równowagi wahadła.

Doświadczenie 1



Rys. 4. Nić przewleczona przez szlufkę na końcu kija od szczotki. Do nici przyczepiona jest śruba z dwiema nakrętkami

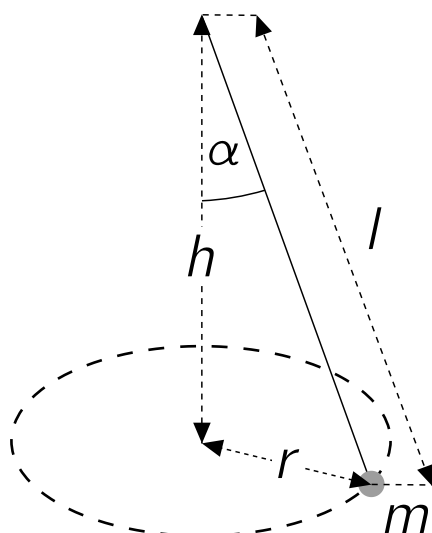
Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

stopni przy długości l rzędu jednego metra.

Przygotuj nić o długości rzędu 2 metrów lub nieco więcej (Rys. 4). Na końcu tej nici zaczep ciężarek. Wykorzystaj np. kij od szczotki ze szlufką na końcu; pomyśl ewentualnie nad innym rozwiązaniem. Umocuj kij poziomo, na przykład na półce, co najmniej 1,5 metra nad podłogą. Wystająca nad podłogę część kija powinna mieć długość co najmniej pół metra. Przewlecz nitkę przez szlufkę, by uzyskać wahadło o długości l około jednego metra. Drugi koniec nitki zamocuj. Twoim zadaniem będzie skracanie wahadła w trakcie jego ruchu. Możesz ciągnąć sznurek ręką, możesz też zastanowić się nad innym rozwiązaniem.

Wychył ciężarek z położenia równowagi na odległość r rzędu kilkunastu – dwudziestu centymetrów (Rys. 5).

Odpowiada to kątowi α rzędu dziesięciu



Rys. 5. Schemat wahadła stożkowego z oczekiwanym torem w postaci okręgu w poziomej płaszczyźnie leżącej w odległości h pod punktem zawieszenia.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Pchnij ciężarek poziomo, prostopadłe do kierunku wychylenia i obserwuj jego ruch. Uzyskasz efekt w postaci niejednostajnego ruchu, na zmianę przyspieszonego i opóźnionego. W trakcie ruchu ciężarek nie krąży w jednej płaszczyźnie. Na przemian to wznosi się nieco, to opada – ustawiony na początku kąt odchylenia wahadła od pionu nie jest stały.

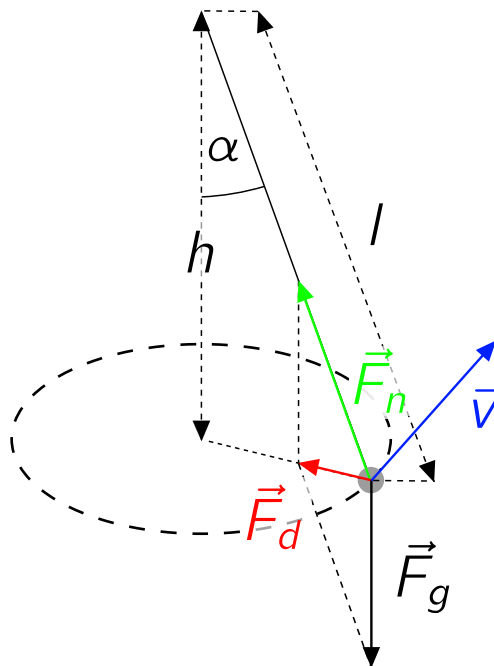
Ciekawostka

Taki układ nazywamy wahadłem sferycznym. Ciężarek krąży po sferze (powierzchni kuli), której środek leży w punkcie zaczepienia nici, na końcu kija. Natomiast wahadło stożkowe to specyficzny przypadek wahadła sferycznego. Ciężarek krąży wtedy po okręgu w poziomej płaszczyźnie. Jeśli wyobrazisz sobie powierzchnię Ziemi, to powiesz, że ciężarek krąży po jednym równoleżniku południowej półkuli. Nici wahadła zakreśla powierzchnię boczną stożka – stąd nazwa „wahadło stożkowe”.

Nie jest łatwo uzyskać jednostajny ruch ciężarka po okręgu, w poziomej płaszczyźnie. Po kilku próbach nauczysz się intuicyjnie dobierać wartość początkowej prędkości v , by w rozsądnym przybliżeniu uzyskiwać taki właśnie ruch.

Związki pomiędzy wielkościami charakteryzującymi ruch wahadła stożkowego

Wielkości charakterystyczne dla ruchu wahadła stożkowego pokazane są na Rys. 6.



Rys. 6. Widok wahadła stożkowego o długości l . Ciężarek porusza się po okręgu o promieniu r z prędkością $\vec{v}$. Płaszczyzna obiegu leży w odległości h pod punktem zawieszenia wahadła.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Ważne!

Pominięcie oporów ruchu

Prócz sił pokazanych na Rys. 6. na wahadło stożkowe działają także siły oporu ruchu, przede wszystkim siła oporu powietrza. Jednak obecność oporów ruchu możemy pominąć w warunkach prowadzonego doświadczenia. Dlaczego, skoro nie pominęliśmy siły tarcia tocznego działającej na monetę w lejku grawitacyjnym?

Wpływ tarcia tocznego na ruch monety, w tym na jej moment pędu, jest w tym eksperymencie zauważalny. Obecność tej bowiem siły determinuje charakter obserwowanego ruchu monety. Wpadnięcie monety do lejka następuje po kilku, maksymalnie kilkunastu obiegach. Można rzec, że wpływ siły tarcia na ruch monety w lejku objawia się w czasie porównywalnym do czasu trwania jednego obiegu, czyli w czasie krótszym od czasu trwania obserwacji.

Siła oporu powietrza spowalnia również wahadło stożkowe. Jednak efekt ten jest znacznie powolniejszy niż w przypadku monety. Nawet baczny obserwator nie dopatry się zmniejszenia kąta α czy wartości prędkości v w skali jednego obiegu. Trudno nawet się dopatrzeć takich zmian w skali całej przeprowadzanej obserwacji. Te właśnie efekty uzasadniają pominięcie oporów ruchu w przypadku wahadła stożkowego.

Zauważ, że siły ciężkości $\vec{F}_g$ oraz naprężenia nici $\vec{F}_n$ sumują się do siły dośrodkowej $\vec{F}_d$, zapewniającej ruch ciężarka po okręgu w poziomej płaszczyźnie.

Przeanalizuj sześć poniższych wyrażeń, które łączą poszczególne wielkości. Zapoznaj się z filmem samouczkiem w e-materiale „Ruch jednostajny po okręgu w zadaniach”. Znajdziesz tam wyprowadzenie większości tych wyrażeń. Czy podany w filmie związek prędkości z długością wahadła i kątem jego wychylenia jest taki sam, jaki widzisz w równości (5)?

$$h = l \cos \alpha , \quad (1)$$

$$r = l \sin \alpha , \quad (2)$$

$$F_d = F_g \operatorname{tg} \alpha , \quad (3)$$

$$F_n = \frac{F_g}{\cos \alpha} . \quad (4)$$

Przy ustalonej długości l wahadła oraz kącie wychylenia α tylko jedna prędkość ciężarka v zapewnia uzyskanie wahadła stożkowego:

$$v = \sqrt{gl \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right)} . \quad (5)$$

Powyższe związki, przy znanej masie wahadła, pozwalają wyznaczyć jego moment pędu.

$$L = m \sqrt{\frac{gl^3}{\cos \alpha}} \sin^2 \alpha . \quad (6)$$

Doświadczenie 2

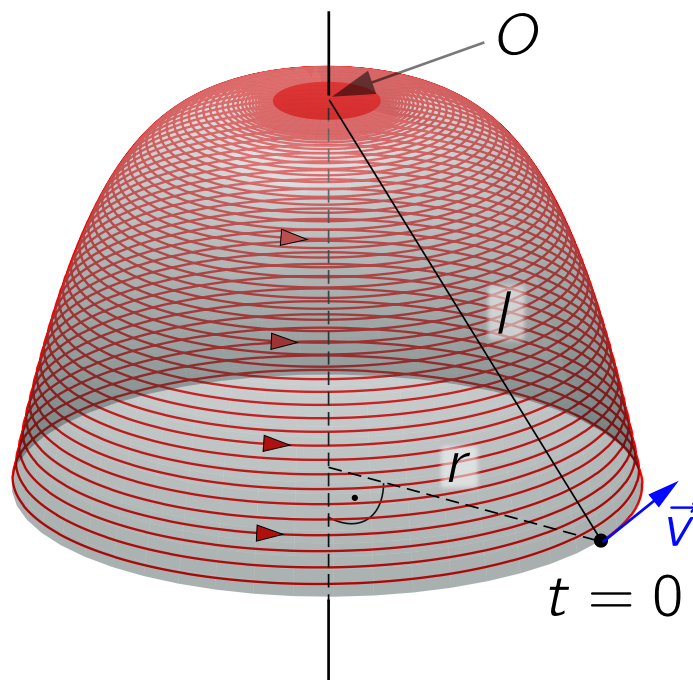
Wpraw ciężarek w ruch po okręgu w poziomej płaszczyźnie. Wykorzystaj tę część nici, która jest przewleczona przez szlufkę i bardzo powoli skracaj długość wahadła. Obserwuj jednocześnie zachowanie ciężarka. W pierwszej fazie skracania możesz niczego szczególnego nie zauważyć, poza oczywistym zmniejszaniem się odległości h .

Ważne!

Skracanie wahadła związane jest z oddziaływaniem przez Ciebie na ciężarek. Ręką, za pośrednictwem nici, działasz na niego siłą $\vec{F}_r$, o nieco większej wartości niż F_n . Ten nadmiar siły jest niezbędny, by w ogóle rozpocząć proces skracania wahadła. Z drugiej jednak strony ten sam nadmiar siły powoduje wytrącenie ciężarka z kołowego toru

w poziomej płaszczyźnie. Zaobserwuj to, wykonując kilka prób, w których mniej lub bardziej gwałtownie szarpniesz za nitkę. Moment pędu ciężarka zmienia wtedy kierunek i wartość. Jego pionowa składowa zachowuje wprawdzie stałą wartość, ale wynik doświadczenia jest kompletnie nieczytelny.

Im wolniej natomiast skracasz nitę, tym tor ciężarka bardziej przypomina monotoniczne jego wspinanie się po linii przywodzącej na myśl rozciągniętą w pionie spiralę (Rys. 7.). Przebieg takiej linii zależy od ustawionych warunków początkowych oraz od sposobu skracania nici. Te informacje są wejściowymi parametrami komputerowego programu, w którym zapisany jest matematyczny model zachowania się skracanego wahadła.



Rys. 7. Tor wahadła uzyskany w wyniku numerycznej symulacji doświadczenia 2. Przez O oznaczono punkt zamocowania nici.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Idealne skracanie polegałoby na tym, by przez możliwie krótki czas użyć siły o minimalnej wartości F_r , niezbędnej do wprowadzenia nici w ruch postępowy z możliwie małą prędkością, po czym tak regulować wartość tej siły, by utrzymać ten powolny, jednostajny ruch nici.

Trzeba wreszcie pamiętać, że skracanie długości wahadła powoduje, że przestaje ono krążyć po powierzchni sfery. Mimo tego oczywistego faktu, będziemy w dalszym ciągu dla badanego układu używać określenia wahadło stożkowe.

Wykaż się więc cierpliwością i utrzymaj możliwie powolne tempo skracania długości wahadła. Zauważysz niebawem, że wzrasta przy tym kąt α , ale maleje odległość r ciężarka od osi obrotu. Wzrasta także prędkość v ciężarka. Skąd ten efekt i co może oznaczać?

Podsumowanie

Malenie r i wzrost v może wynikać ze stałości momentu pędu ciężarka w trakcie skracania nici. $L = \text{const}$ jest spełnione tym dokładniej, im mniejszą rolę odgrywają opory ruchu i im wolniej skracasz nić.

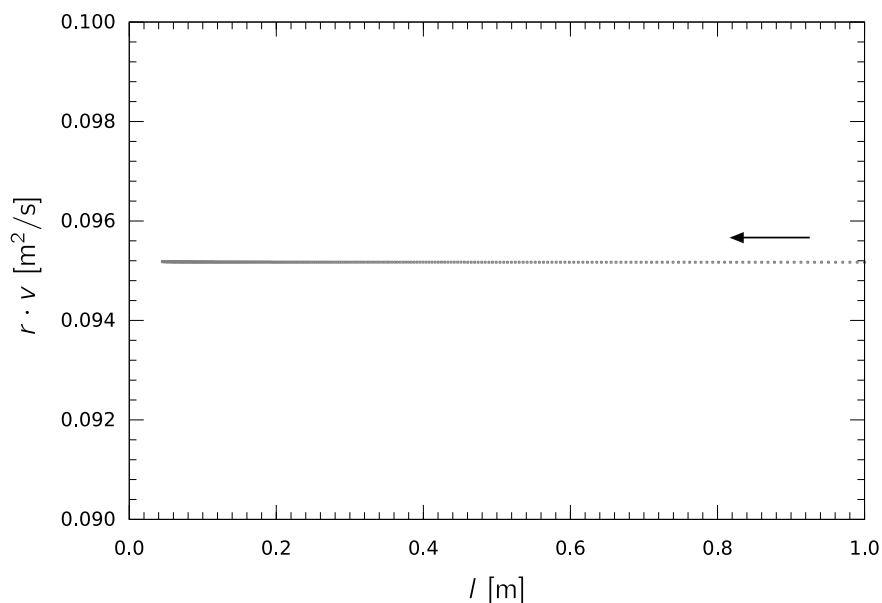
Wiemy, że

$$L = mrv \sin \gamma ,$$

gdzie γ jest kątem pomiędzy $\vec{r}$ a $\vec{v}$. Dla idealnego wahadła stożkowego, nim rozpoczniesz skracanie nici, $\gamma = 90^\circ$. Im wolniej skracasz nić, tym mniejsze powodujesz odstępstwa γ od kąta prostego. Przyjmując przybliżenie $\gamma \approx 90^\circ$, dochodzimy do wniosku, że iloczyn promienia obiegu i prędkości obiegu ma stałą wartość, równą ilorazowi momentu pędu przez masę ciężarka. Potwierdza to zależność pokazana na Rys. 8a., uzyskana teoretycznie – na drodze symulacji numerycznej. Ponieważ promień obiegu maleje w miarę skracania nici (Rys. 8b.), to prędkość obiegu rośnie (Rys. 8c.).

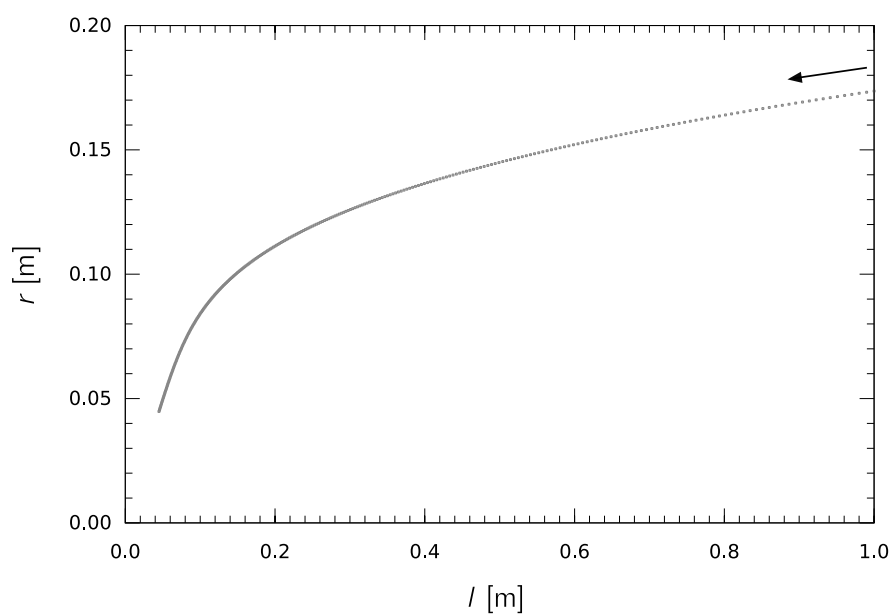
Rys. 8a.

Zależność iloczynu $r \cdot v$ (proporcjonalnego do momentu pędu) od l



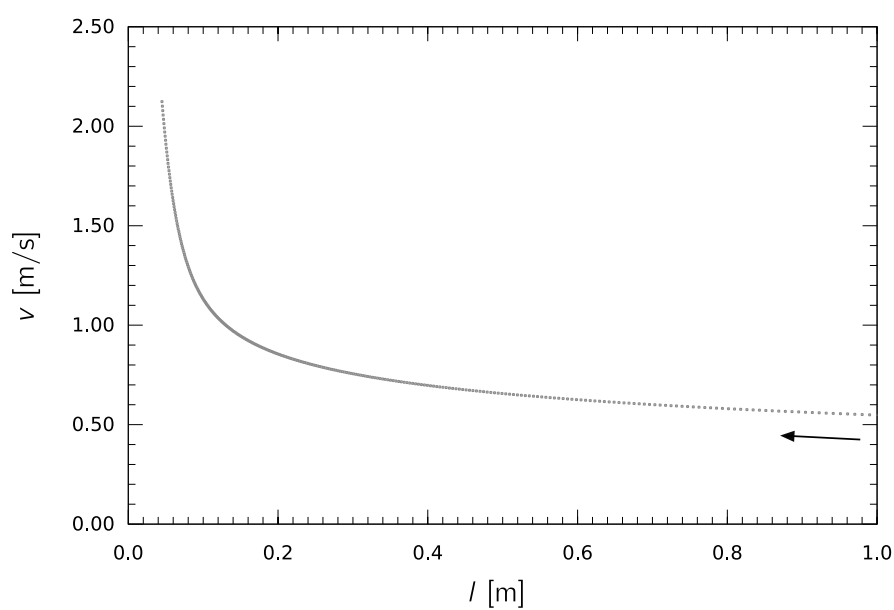
Rys. 8b.

Zależność r (odległości ciężarka od osi obrotu) od l



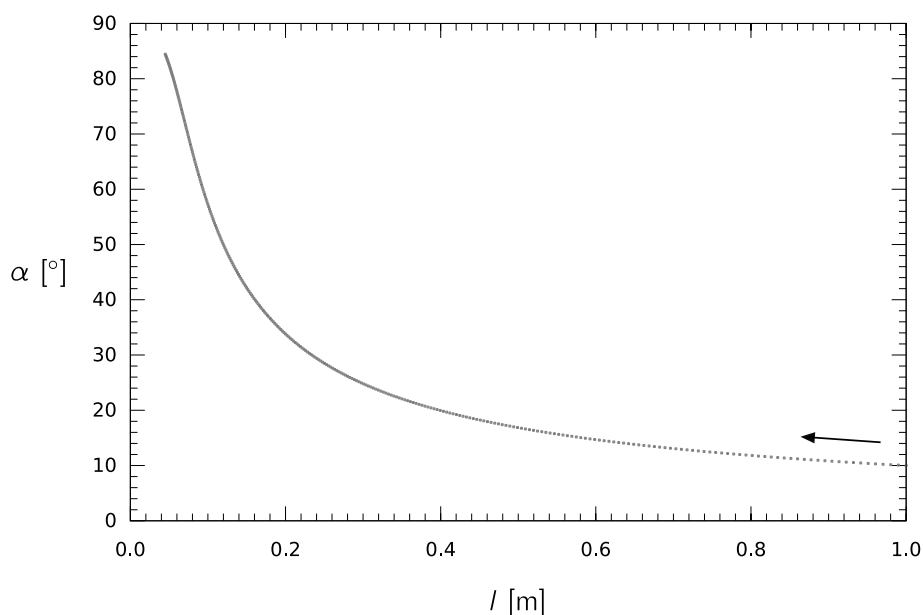
Rys. 8c.

Zależność wartości poziomej składowej prędkości liniowej ciężarka v od l



Rys. 8d.

Zależność kąta wychylenia wahadła od pionu α od l



Wyniki symulacji zachowania wahadła. Długość początkowa $l = 100$ cm, początkowe wychylenie $\alpha_0 = 10^\circ$ oraz masę $m = 50$ g

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Strzałki przy wykresach przypominają o tym, że długość wahadła l maleje wraz z upływem czasu.

Ciekawostka

Zasada zachowania momentu pędu nie wyjaśnia bezpośrednio wzrostu kąta α w miarę skracania wahadła (Rys. 8d.). Trzeba zauważyć, że rosnąca prędkość i malejący promień obiegu wymuszają wzrost wartości siły dośrodkowej:

$$F_d = \frac{mv^2}{r}.$$

Z kolei związek (3) pomiędzy siłą dośrodkową a siłą ciężkości pokazuje, że przy ustalonej wartości F_g tylko wzrost kąta α zapewnia wzrost wartości F_d .

Ciekawostka

Wróć na chwilę do Rys. 7. Szara powierzchnia, na której narysowano tor wahadła sferycznego o malejącej długości, to zbiór wszystkich możliwych położenia tego wahadła przy ustalonej wartości orbitalnego momentu pędu, początkowym kącie wychylenia i energii całkowitej. Przecinając tę powierzchnię płaszczyzną przechodzącą przez oś symetrii obrotowej, uzyskamy pewną krzywą o symetrii zwierciadlanej. Przecinając tę krzywą na pół, uzyskamy dwie krzywe. Każda z osobna będzie miała kształt wykresu zależności $r(l)$ przedstawionego na Rys. 8b.

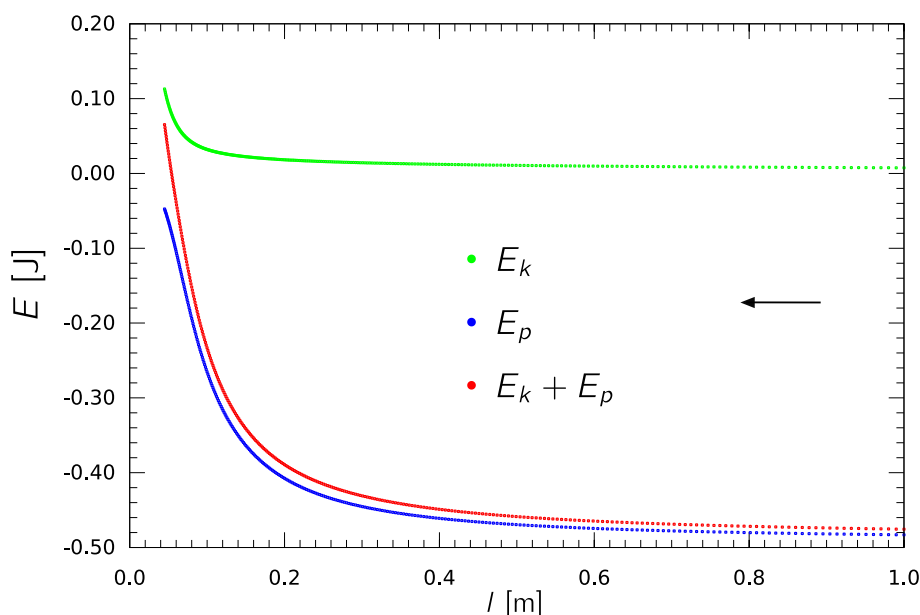
Dla zainteresowanych

Przemiany energii podczas skracania wahadła stożkowego

Jak już wspomnieliśmy, rozważając ruch wahadła stożkowego, pomijamy opory ruchu, w tym opór powietrza. Jest to warunek niezbędny, by uznać jego moment pędu za stały. Trzeba jednak pamiętać, że sama zasada zachowania momentu pędu objaśnia jedynie charakter współzmienności wartości r oraz v . W opisanym doświadczeniu są to wielkości odwrotnie proporcjonalne – ich iloczyn jest stały.

Dlaczego jednak w ogóle dochodzi do zmiany tych i innych wielkości?

Bardziej kompleksowy opis zmienności wszystkich wielkości charakteryzujących ruch wahadła stożkowego musi uwzględniać zmianę energii mechanicznej wahadła, związaną z pracą wykonaną przez siłę $\vec{F}_r$ działającą na wahadło. Skutkiem tej pracy jest wzrost jego energii mechanicznej (Rys. 9., punkty czerwone). Rośnie przy tym energia potencjalna grawitacji (punkty niebieskie), gdyż wirujący ciężarek się wznosi. Rośnie także jego energia kinetyczna (punkty zielone), bowiem rośnie prędkość v .



Rys. 9. Energia kinetyczna i potencjalna oraz ich suma (całkowita energia mechaniczna) wahadła o zmniejszanej długości. Strzałka przypomina kierunek procesu, tj. fakt, że długość wahadła maleje w czasie.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Jako ciekawostkę możemy wskazać, że wzrost tych form energii nie jest jednostajny. Widać także, że energia kinetyczna dość długo pozostaje praktycznie stała, podczas gdy dominuje wzrost energii potencjalnej. Podobnie – jeśli się dobrze przyjrzeć – przy małych długościach wahadła (rzędu kilkunastu cm), a więc kątach α zbliżających się do 90° (por. Rys. 8d.) widać, że tempo wzrostu energii potencjalnej zaczyna maleć. Za wzrost całkowitej energii odpowiada wtedy wzrost energii kinetycznej.

Energia kinetyczna

(ang. *kinetic energy*) – postać energii ciała związana z jego ruchem, obserwowanym z ustalonego układu odniesienia.

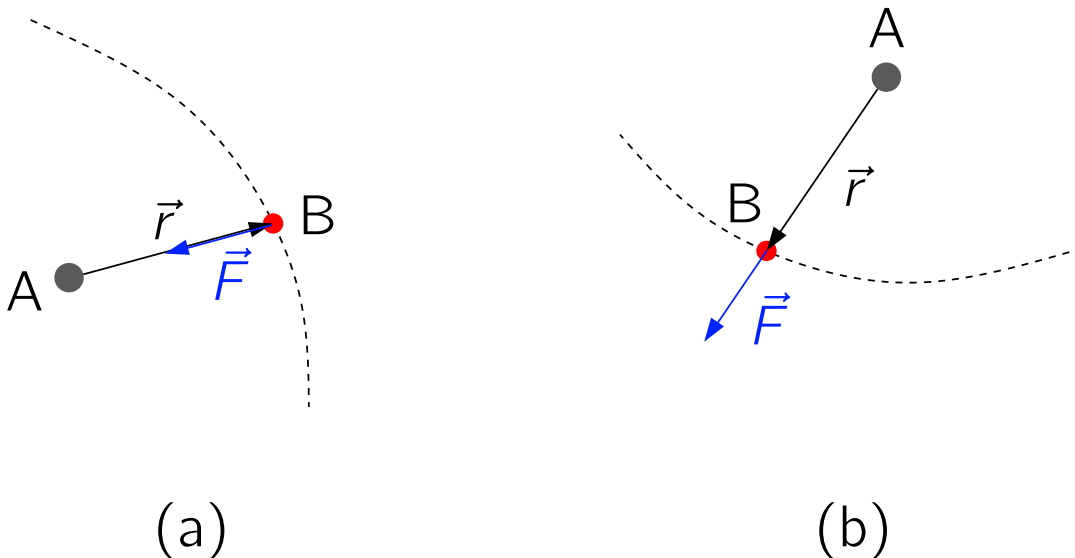
Energia potencjalna

(ang. *potential energy*) – postać energii związana ze wzajemnym oddziaływaniem dwóch (lub więcej) ciał. Energia potencjalna zależy od położenia oddziałujących ciał względem siebie.

Często wyróżnia się jedno z ciał poprzez przyjęcie, że jest ono nieruchome. Wtedy energię potencjalną układu przypisuje się drugiemu ciału, które zmienia położenie w układzie odniesienia pierwszego. Tak postępuje się z energią potencjalną grawitacji ciała w pobliżu powierzchni Ziemi, wiążąc tę energię z wysokością ciała nad powierzchnią Ziemi.

Siła centralna

(ang: *central force*) – każdą z sił wzajemnego oddziaływania dwóch punktowych ciał A i B nazywamy centralną, jeśli siły te mają kierunek zgodny z prostą przechodzącą przez te ciała, jak na rysunku poniżej.



Siła centralna $\vec{F}$ działająca na ciało B.

Jej kierunek jest zgodny z wektorem położenia $\vec{r}$ ciała B w układzie ciała A.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Jeśli siła działająca na ciało B jest zwrócona ku ciału A - przypadek (a) - to mówimy o przyciąganiu centralnym, jeśli od ciała A - przypadek (b) - o odpychaniu centralnym. W pierwszym przypadku punkt A nazywamy *centrum przyciągania* punktu B.

Przykładem siły centralnej przyciągającej jest siła grawitacji. Siła elektrostatyczna pomiędzy dwoma ładunkami także jest centralna: przyciągająca, gdy są one różnoimienne, odpychająca, gdy jednoimienne.

Siła centralna zachowuje moment pędu układu oddziałujących ciał. Wartość bowiem momentu $\vec{M}$ siły centralnej, zarówno odpychającej jak i przyciągającej, jest zawsze równa zero:

$$M = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \alpha = 0 ,$$

gdzie α to kąt między siłą centralną $\vec{F}$ a wektorem $\vec{r}$, będącym ramieniem jej działania. Kąt ten jest równy zero dla siły odpychającej, a 180° dla siły przyciągającej, zatem jego sinus wynosi zero.

Twierdzenie Steinera

(ang. *Steiner's theorem*) – Jeśli przez I_0 oznaczymy moment bezwładności bryły względem pewnej osi przechodzącej przez środek masy tej bryły, a w odległości d od tej osi ustawimy oś równoległą, to moment bezwładności bryły względem tej nowej osi będzie dany przez

$$I = I_0 + Md^2 ,$$

gdzie M to masa bryły. Sformułował je szwajcarski geometra, Jakob Steiner.

Model matematyczny

Dla zainteresowanych

Układ sterowany i jego modelowanie

Podczas badania ruchu wahadła stożkowego można odnieść wrażenie, że ciężko jest w tej sytuacji wykonać pomiary ilościowe. Stwierdzenie, że ruch wahadła sferycznego jest płaski (tzn. jest to wahadło stożkowe) wymagałoby zapewne zastosowania odpowiedniego układu ekranów i oświetlenia - trudno sobie wyobrazić śledzenie kąta wychylenia nici od pionu z pomocą szkolnego kątomierza. Równie duży problem mielibyśmy ze zmierzeniem początkowego i końcowego momentu pędu, czy wartości jego pionowej składowej, o której przypuszczamy, że jest zachowana.

Więcej: zapewne - w ramach zaspokajania przyrodoznawczej ciekawości - zdarzyło Ci się skracać sznurek inaczej niż wymagały tego warunki zaproponowane w opisie doświadczenia. I prawdopodobnie wtedy układ „wahadło sferyczne o zmiennej długości” pokazał naprawdę, co potrafi - wzbudzały się w nim pewne drgania, o których poniżej. Obserwujemy wtedy zachowanie, które można - nieformalnie - ująć następująco: krótkotrwałe i zbyt gwałtowne (ew. długotrwałe i niewystarczająco łagodne) zmiany długości sznurka prowadzą do drastycznych zmian w zachowaniu się układu.

Układ sterowany zewnątrz

Jest to szczególny przykład układu fizycznego, którego opis zawiera zwykle stałe wielkości (dla wahadła jest to np. jego długość), a modyfikacja polega na tym, że przychodzi ktoś „z zewnątrz” i niektóre z tych stałych „uruchamia”. Jest to tzw. *sterowanie zewnętrzne* - dane „z góry” i niepodlegające żadnej modyfikacji zależnej od stanu układu, np. któregoś z parametrów czy tempa jego zmian. Tak postępowaliśmy w naszym doświadczeniu - powoli, jednostajnie skracając nitkę i nie modyfikując tego procesu.

Gdyby na nitce wisiał woreczek z piaskiem, moglibyśmy go przedziurawić. Wtedy - jeśli pominąć wpływ wahań na tempo wysypywania się piasku - mielibyśmy także *zewnętrzne* sterowanie w postaci zmniejszającej się masy wahadła.

Układ sterowany wewnątrz

Z podobnym zjawiskiem, polegającym na wzbudzaniu drgań, mamy do czynienia na huśtawce. Jest to zwykle wahadło, poruszające się w płaszczyźnie pionowej, które użytkownik świadomie rozpędza. Potrafi to zrobić, na ogół nie znając „stojącej za tym fizyki”. Po prostu w odpowiednich chwilach buja się w przód i w tył i zmienia położenie środka

masy układu w poziomie. Może też – kiedy rodzice nie patrzą – powodować przemieszczenie środka masy układu w pionie, wykonując coś na kształt przysiadów. Te przysiady także trzeba odpowiednio zsynchronizować z ruchem huśtawki.

Jest to przykład *sterowania wewnętrznego* – zależnego od stanu układu, podczas gdy np. długość wahadła i masa użytkownika są nadal ustalone.

Często spotykanym terminem jest *sterowanie optymalne* – prowadzące od danych warunków początkowych do pożądaných warunków końcowych, możliwie najmniejszym kosztem (który też trzeba zdefiniować), względnie w najkrótszym czasie

Czy łatwo być operatorem dźwigu?

Co na ten temat mówią fizycy? Okazuje się, że na temat tego konkretnego układu, ze szczegółami – naprawdę niedużo. Jego szczegółowy opis wykracza poza ramy wykładu z mechaniki klasycznej dla studentów II roku fizyki. Nie znajdziemy go więc w typowych podręcznikach akademickich; okazuje się, że w Sieci jest także praktycznie nieobecny. Problem ten częściej rozpatrują inżynierowie (zwykle w rozbudowanej wersji, bo z uwzględnieniem ruchomego punktu zawieszenia wahadła. Ma to niebagatelne znaczenie dla tak skomplikowanej czynności jak operowanie dźwigiem). Problemami tego typu zajmują się także matematycy. Te dwa podejścia mają dla przeciętnego fizyka dwie – nazwijmy to umownie – wady:

(a) podejście inżyniera dąży do uzyskania konkretnego przepisu na bezpieczne i efektywne przenoszenie konkretnego ładunku (ciężaru) przez konkretny dźwig. Jest to zrozumiałe, ale dla fizyka to za mało. Za szybko w toku analizy włączane są tam do użycia metody przybliżone, za mało wniosków jest formułowanych w oderwaniu od techniki – na rzecz opisu zjawiska przyrodniczego i jego zależności od takich czy innych parametrów.

(b) na prześledzenie podejścia matematyka – tym razem na dużo wyższym poziomie ogólności niż tylko wahadło sferyczne na skracanej nici – wielu fizyków ma zbyt słabe przygotowanie matematyczne.

Kompromis, czyli modelowanie numeryczne

Pozostaje więc podejście, które stosuje wielu fizyków, a o którym możesz przeczytać w e-materiałach „Jak modelować wybrane zjawiska za pomocą modeli matematycznych?” oraz „Jak modelować wybrane zjawiska za pomocą modeli fizycznych?”.

Gdy zatem fizyk uznaje, że warto zaproponować opisane tu doświadczenie do demonstracji zasady zachowania momentu pędu, musi jeszcze wykonać sporo pracy. Przypomnijmy: nigdy nie przerabiał tego zagadnienia samodzielnie i nie bardzo ma na czym się wzorować. Swoje przekonanie musi więc zweryfikować w ramach kilkietapowego postępowania:

- (i) próba możliwie pełnego - w ramach naszych możliwości - jakościowego (i przybliżonego ilościowego) zrozumienia zachowania naszego układu,
- (ii) próba odpowiedzi na pytanie, czy na pewno w wahadle sferycznym o zmiennej w czasie długości moment pędu jest stały,
- (iii) analiza numeryczna,
- (iv) wizualizacja i próba interpretacji wyników, w szczególności sprawdzenie, na ile dobrze wypada porównanie z przewidywaniami z pkt. (i) oraz (ii).

Analiza jakościowa

Zaczynamy od „sugestii numerycznej” w dwóch wersjach:

- (a) założenie bardzo powolnych zmian długości nici i zbadanie, czy zmiana energii całkowitej wahadła - uwzględniająca oczywiście wykonaną przy wyciąganiu nici pracę - daje stały moment pędu,
- (b) próba zredukowania równań ruchu i ich przybliżone, numeryczne rozwiązanie.

Dla dowolnej długości nici, masy ciężarka na niej zawieszonego i dowolnej początkowej prędkości kątowej da się wyznaczyć kąt α_0 między pionem a nicią obracającego się wahadła stożkowego,

$$l(\alpha_0) = l_0 \left(\frac{\cos \alpha_0}{\sin^4 \alpha_0} \right)^{1/3},$$

gdzie $l_0 = \sqrt[3]{\frac{L^2}{M^2 g}}$ jest pewną długością; jak widać zależy ona od wymienionych parametrów układu oraz przyspieszenia ziemskiego.

Polecenie 1

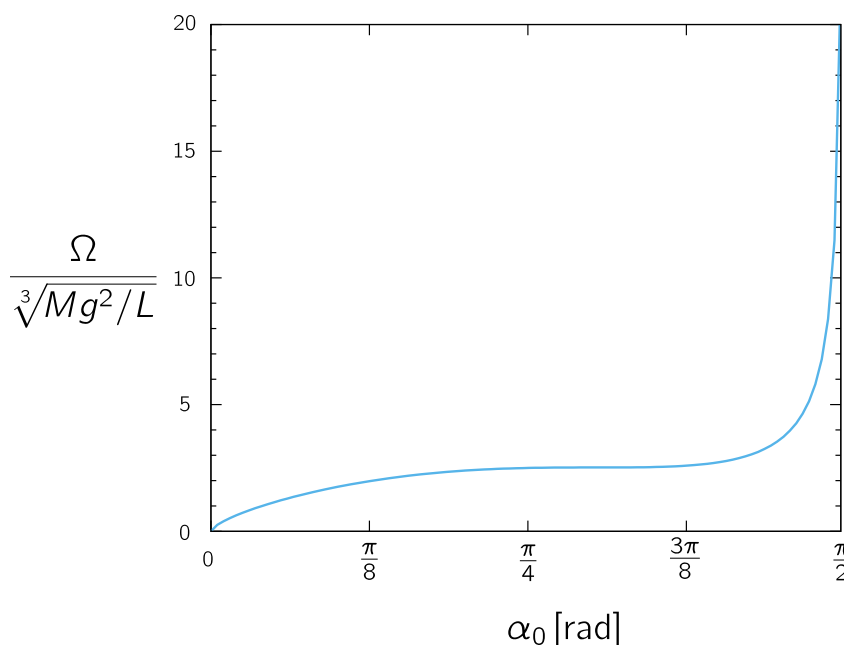
Sprawdź, że jednostką l_0 jest metr.

Okazuje się, że wstawienie tej wielkości do wzoru opisującego energię całkowitą układu może służyć do analizy jego stabilności - kąt ten okazuje się być położeniem równowagi trwałej dla zmiennego w czasie kąta α . Przybliżając energię ruchu dla α bliskich α_0 , podobnie jak w przypadku przybliżenia małych drgań dla zwykłego wahadła - wykonującego ruch w płaszczyźnie pionowej - możemy np. wnioskować o ich częstotliwości.

Wynikiem tej analizy jest stwierdzenie, że jeśli zaburzyć ruch wahadła stożkowego, ustalony poprzednio kąt α zacznie zmieniać się z okresowo w czasie. Jeśli zaburzenie jest niewielkie, kąt ten będzie się zmieniać harmonicznym w czasie. Wyrażenie opisujące częstotliwość takich drgań ma postać

$$\Omega = \sqrt[3]{\frac{Mg^2}{L}} (1 + 3 \cos^2 \alpha_0) \operatorname{tg}^{2/3} \alpha_0 .$$

Wykres tej funkcji znajduje się na Rys. 1. Widać, że drgania te mają tym większą częstotliwość (a więc tym mniejszy okres), im wyżej jest wahadło. Da się to wytłumaczyć faktem obecności „energii potencjalnej siły odśrodkowej”.



Rys. 1. Zależność $\Omega(\alpha_0)$. Na osi rzędnych oddano wielkość bezwymiarową, a dziedzinę ograniczono tak, aby wartości nie przekraczały 20. (Gdy kąt zbliża się do prostego, częstotliwość drgań dąży do nieskończoności.)

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Polecenie 2

Sprawdź, że jednostką współczynnika mianowanego w powyższym wzorze, tj. $(Mg^2/L)^{1/3}$, jest s^{-1} .

Na animacjach oraz wykresach poniżej zaobserwujesz „zagęszczanie się” drgań – wzrost ich częstotliwości oraz maksymalnej możliwej prędkości kątowej $\Delta\alpha/\Delta t$, gdy „średni kąt” wychyleń wahadła zbliża się do kąta prostego.

Symulacja numeryczna I

Przypomnijmy: w części „Przeczytaj” podaliśmy i omówiliśmy wyniki pozwalające lepiej zrozumieć wykonywane doświadczenie. Uzyskane zostały w oparciu o symulację numeryczną, przy czym stanem początkowym było wahadło stożkowe. Ważnym założeniem było, że wystarczająco powoli skracając nić, uzyskujemy ruch ciężarka po pewnej krzywej, *w każdej chwili czasu przechodzącej przez punkty równowagi kolejnych – coraz krótszych – wahań stożkowych*. Algorytm symulacji opierał się na bilansie energii całkowitej, rzecz jasna z uwzględnieniem pracy wykonywanej podczas skracania nici. Symulacja ta miała na

celu sprawdzenie, czy (i z jaką dokładnością) zachowana jest pionowa składowa momentu pędu. Uznaliśmy, że dokładność rzędu setnych części procenta jest zadowalająca.

Można jednak to założenie (ściśle rzecz biorąc nieprawdziwe, co pokazuje doświadczenie wykonywane odpowiednio szybko) opuścić. Dzieje się to kosztem skomplikowania naszej analizy – musimy odwołać się do pełnego równania ruchu dla wahadła sferycznego o zmiennej długości. Najwnikliwiej trzeba przyjrzeć się ewolucji czasowej kąta α .

Symulacja numeryczna II

Dla potrzeb tej symulacji zakładamy, że pionowa składowa momentu pędu jest stała. Można tak uczynić, mając za wskazówkę wyniki symulacji I. Teoretycznym argumentem jest analiza wyrażenia opisującego całkowitą energię mechaniczną układu,

$$E = \frac{M}{2} \left[\left(\frac{\Delta l}{\Delta t} \right)^2 + l^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right)^2 + l^2 \left(\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \right)^2 \right] - Mgl \cos \alpha .$$

Zauważ, że współrzędna kątowa φ *nie pojawia się* w tym wyrażeniu (jedynie odpowiadająca jej prędkość kątowa). Można więc powiedzieć, że symetria tego wyrażenia względem przesunięć w φ odzwierciedla symetrię osiową problemu. To pozwala wnioskować o istnieniu pewnej zachowanej (tj. stałej podczas ruchu) wielkości. Z zasad mechaniki wynika, że jest to moment pędu stowarzyszony z tą współrzędną, czyli L . O związku symetrii z prawami zachowania w fizyce dowiesz się więcej, sięgając do materiału „*Kim była Emmy Amalie Noether?*”

Okazuje się, że „oprogramowanie” problemu zawiera dwa w miarę skomplikowane fragmenty. Pierwszy to oczywiście przybliżone rozwiązanie równania ruchu dla współrzędnej kątowej α . Jest to równanie na nieznaną funkcję czasu, w którym to równaniu „uczestniczą” nie tylko wyrazy zależne od α , ale także od tempa zmian tej funkcji (tj. odpowiedniej prędkości kątowej) oraz tempa zmian tej prędkości kątowej (czyli przyspieszenia kątowego):

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = -\frac{g}{l} \sin \alpha + \frac{L^2}{M} \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} - \frac{2}{l} \frac{\Delta l}{\Delta t} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \quad \text{przy } \Delta t \rightarrow 0 .$$

(1)

Równania takie nazywamy *różniczkowymi*. W przeciwieństwie do kilku znanych ze szkolnego kursu fizyki przypadków (równanie ruchu wahadła, ciężarka na sprężynie, ale również równanie rozpadu promieniotwórczego) – jawnego (zapisywalnego „jednym wzorem”, z pomocą funkcji elementarnych, tj. wielomianów, funkcji trygonometrycznych itp.) wyrażenia na $\alpha(t)$ nie znamy. Jeśli istnieje, uzyskanie go jest bardzo trudne, a wnioskowanie o jego własnościach ilościowych i tak musiałoby prowadzić do konieczności odwołania się do tablic, wykresów i metod obliczeniowych. Stąd swego

rodzaju wytrych – rozwiązanie numeryczne, tj. użycie komputera i operowanie skończonymi przyrostami czasu Δt i uzyskanie przybliżenia poszukiwanej zależności.

Otrzymanie zależności $\varphi(t)$ nie jest trudne, jeśli umiemy uporać się z powyższym równaniem – to dzięki związkowi $L = Ml^2 \sin^2 \alpha \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \text{const.}$

Drugim trudnym – ale łatwiejszym do rozwiązania – problemem jest odwrócenie zależności $l_0(\alpha_0)$, aby dla znanej długości wahadła móc znaleźć odpowiadający jej i pozostałym parametrom ruchu kąt odpowiedniego wahadła stożkowego. Należy numerycznie rozwiązać równanie (już algebraiczne!)

$$l(\alpha_0) - l_0 \left(\frac{\cos \alpha_0}{\sin^4 \alpha_0} \right)^{1/3} = 0$$

(2)

ze względu na α_0 . Okazuje się, że dla różnych zakresów l (i spodziewanych wyników) należy wykonać nieco „zonglerki”, np. podnosząc oba wyrazy do potęgi 3, dzieląc przez $\cos \alpha_0$ itp. Unika się w ten sposób efektów w postaci rozwiązań „schodkowych” – kawałkami stałych, co jest jawnie niezgodne z doświadczeniem i przewidywaniami.

Krótko o stosowanych algorytmach numerycznych

Do przybliżonego rozwiązania równania (2) używamy [metody Rungego-Kutty](#) IV rzędu. Do uzyskania zależności czasowej kąta azymutalnego φ wystarczy zastosowanie „naiwnej” metody dodawania iloczynu prędkości kątowej przez krok czasowy.

Ciekawostka

Zastosowanie metody „naiwnej” do równania (2) prowadzi do absurdalnych wyników. Jeśli do „poprzedniej” wartości kąta dodamy iloczyn prędkości kątowej przez krok czasowy i połowę przyspieszenia kątowego przez kwadrat kroku czasowego (*de facto* przyjmując, że na krótkim odcinku czasu ruch jest jednostajnie przyspieszony), już wahadło sferyczne (o ustalonej długości!) będzie miało *rosnącą w czasie energię*. Widać więc już na etapie wstępnym, że ta metoda do naszej symulacji się nie nadaje. Metoda Rungego-Kutty okazuje się z bardzo dobrą dokładnością „zachowywać energię” – przez setki cykli zmienności obu kątów opisujących ruch takiego wahadła.

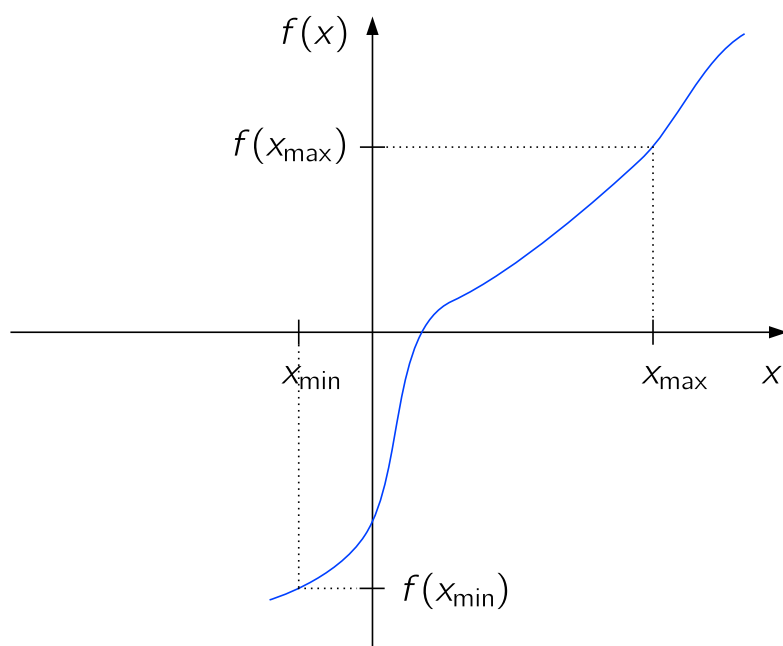
Równanie (2) służące uzyskaniu zależności $\alpha_0(l)$ rozwiązujemy [metodą bisekcji](#). Polega to na wzięciu początkowego przedziału $(0; \pi/2)$ dla α_0 i *kontynuowaniu dzielenia go na połowy tak, aby znaki lewej strony (1) były różne na końcach kolejnych przedziałów*.

W każdym nowym kroku tej metody przedział, do którego należy poszukiwany wynik, jest połową przedziału w kroku poprzednim. Jeśli wartość lewej strony dla ustalonych l i l_0 (a więc L i M) jest odpowiednio mała (w naszych obliczeniach była to liczba rzędu 10^{-5}),

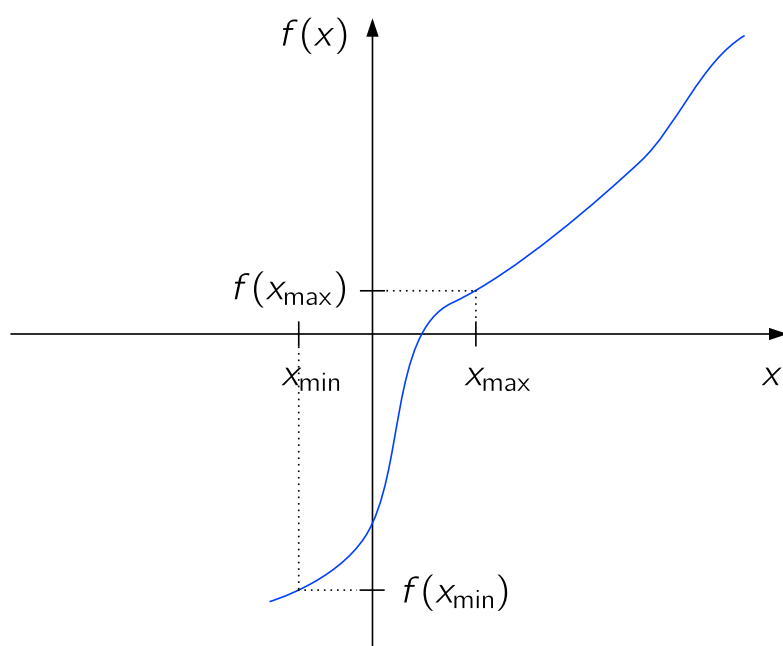
zwracamy jako rozwiązanie odpowiednią wartość kąta α_0 . Graficzną ilustrację tego algorytmu obejrzysz w harmonii poniżej.

Poszukiwanie rozwiązania równania $f(x) = 0$ metodą bisekcji. Od rysunku 3. począwszy - dla lepszej widoczności detali - opuściliśmy znaczniki i odpowiednio wyskalowaliśmy wykres.

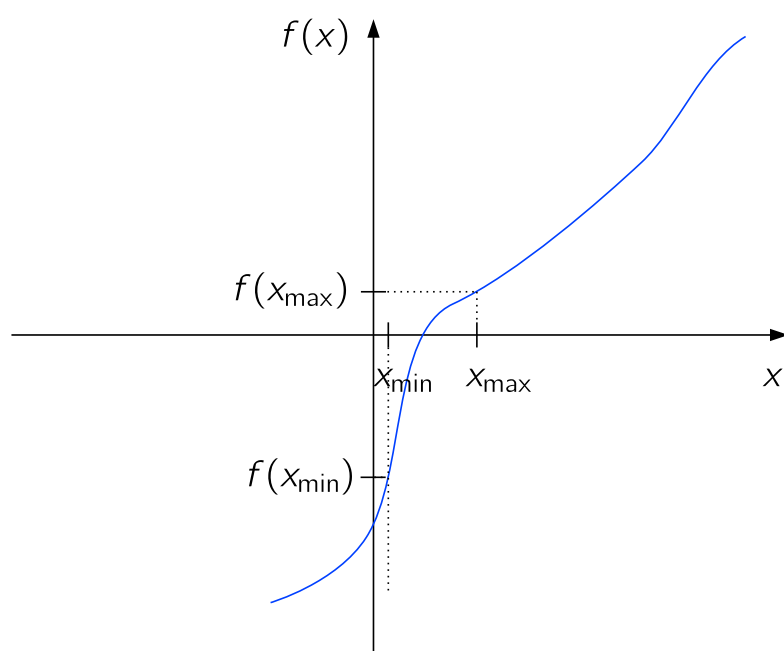
Krok 1



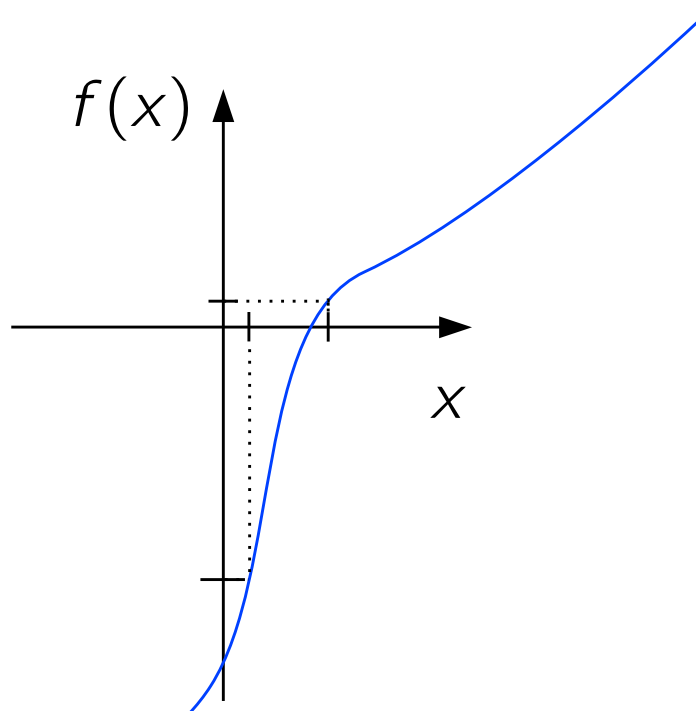
Krok 2



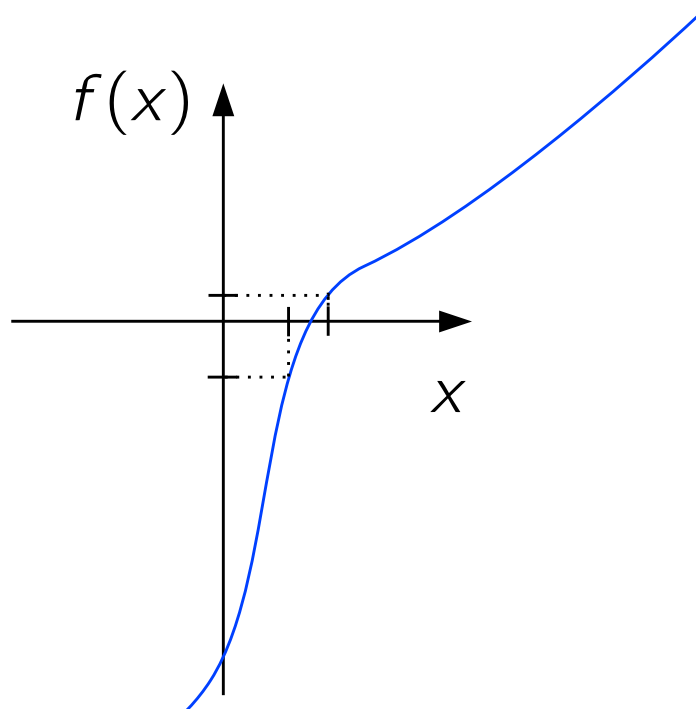
Krok 3



Krok 4



Krok 5

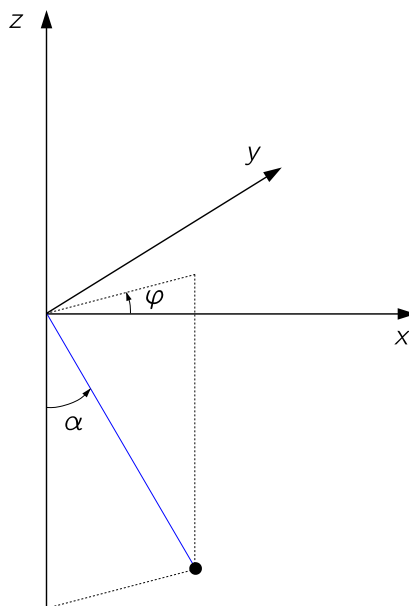


Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Wyniki

Wahadło sferyczne

Aby uzyskać ogólny obraz, jak zachowuje się nasz układ, zaczniemy od wahadła o ustalonej długości. Na Rys. 2a. pokazane są współrzędne, których będziemy używać - tzw. współrzędne sferyczne, w których określenie położenia punktu - zamiast trójki współrzędnych kartezjańskich - polega na podaniu jego odległości od pewnego punktu wyróżnionego (początku pokazanego układu kartezjańskiego) oraz dwóch kątów. Jeden z nich - zwany *azymutalnym* - mierzy kąt między linią przerywaną a osią Ox w płaszczyźnie $z = 0$. Drugi mierzy odchylenie nici wahadła od pionu, wyznaczonego przez oś Oz . Oba kąty podajemy zawsze w radianach; w razie potrzeby można je przeliczyć na stopnie, mnożąc wynik przez $180^\circ/\pi$ rad. Kąty te są - z dokładnością do wyboru początku odliczania i zakresu - analogiem odpowiednio długości i szerokości geograficznej znanych z lekcji geografii.



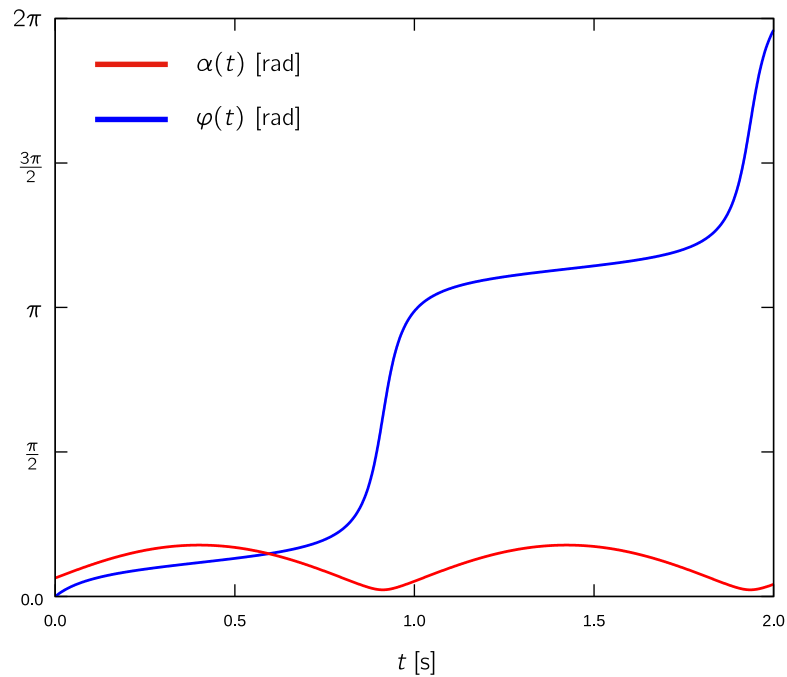
Rys. 2a. Współrzędne używane w opisie wahadła. Kąt azymutalny φ mierzony jest w płaszczyźnie xy i przebiega zakres $[0; 2\pi)$, kąt α mierzy odchylenie nici wahadła od pionu. W zasadzie jego dziedziną, obejmującą także obszar dodatnich z , jest przedział $[0; \pi]$, ale dla potrzeb naszego problemu wystarczy zakres kątów ostrych, tj. $[0; \pi/2)$

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Związek między przedstawionymi współrzędnymi a typowo używanymi kartezjańskimi jest następujący

$$\begin{aligned}x(r, \alpha, \varphi) &= r \sin \alpha \cos \varphi, \\y(r, \alpha, \varphi) &= r \sin \alpha \sin \varphi, \\z(r, \alpha) &= -r \cos \alpha.\end{aligned}$$

W przypadku ogólnego ruchu wahadła sferycznego, tj. z $\vec{L} \neq 0$ i ze zmiennym kątem α , ciężarek zakreśla ciekawe krzywe na powierzchni sfery, której promień ma długość równą długości nici. Zwykle krzywe te - nieformalnie - nazywa się *rozetkami*. Zobaczysz taką krzywą na animacji poniżej. Póki co zwróć uwagę, że kształt wykresu $\alpha(t)$ w ogólności odbiega wyraźnie od kształtu „czystej” sinusoidy (Rys. 2b. i 2c.).



Rys. 2b. Wahadło sferyczne - zależność kątów α oraz φ od czasu dla pełnego obiegu wahadła dookoła osi pionowej (kąt φ raz przebiega przedział $[0; 2\pi)$). Widać, że w miejscach największej stromizny niebieskiej krzywej (tj. największych wartości $\Delta\varphi/\Delta t$) krzywa czerwona ma minimum i jest ono "ostrzejsze" niż maksimum.

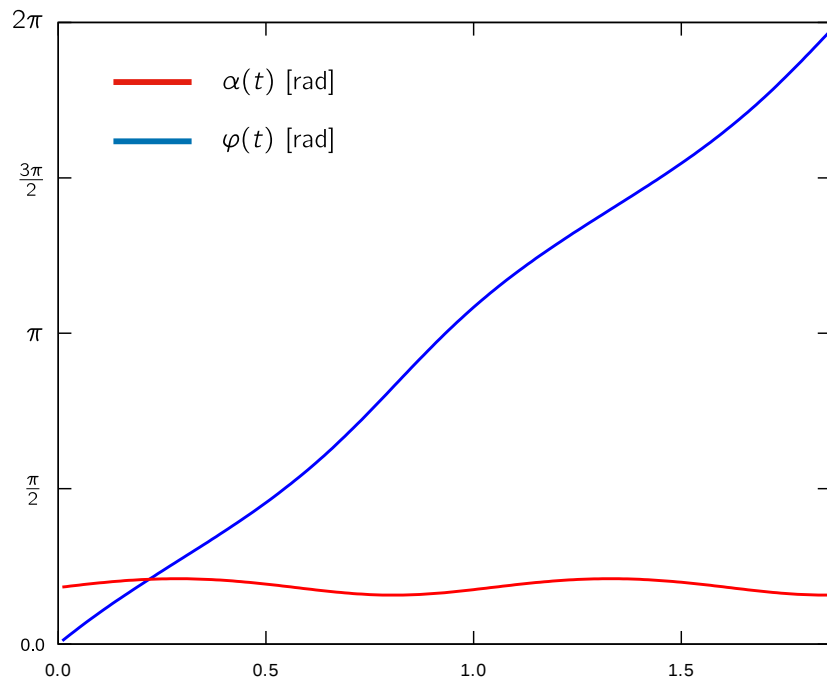
Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Można jakościowo wytłumaczyć ten fakt: punkty odpowiadające maksymalnej i minimalnej wartości α znajdują się na różnych wysokościach, różnią się więc energią potencjalną, więc mają prawo różnić się wartością siły „zawracającej” wahadło do położenia równowagi.

Trzeba też pamiętać, że podział energii kinetycznej między prędkości kątowe $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ oraz $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ musi uwzględniać stałość pionowej składowej momentu pędu, $L = Ml^2 \sin^2 \alpha \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

W skrajnym uproszczeniu można powiedzieć, że zależność obu kątów od czasu jest na tyle skomplikowana - ze względu na postać równań ruchu - że na pewno nie jest sinusoidalna.

Poniżej (Rys. 2c.) prezentujemy podobne wykresy, ale dla mniejszej masy wahadła przy tym samym momencie pędu. Tu wykres $\alpha(t)$ bardziej przypomina wykres funkcji sinus niż poprzednio. Funkcja $\varphi(t)$ rośnie praktycznie liniowo w czasie - odstępstwa od linii prostej są tu zauważalnie mniejsze niż dla niebieskiej krzywej z Rys. 2b.



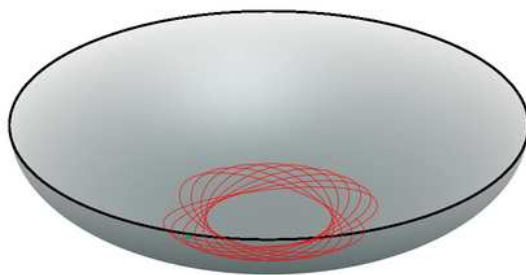
Rys. 2c. Wahadło sferyczne o mniejszym niż dla Rys. 2b. ilorazie M/L . Kąt azymutalny φ rośnie praktycznie liniowo, z niewielkimi oscylacjami. Wykres zależności czasowej kąta α bardziej przypomina sinusoidę niż przedstawiony na Rys. 2b.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Różnica w częstotliwościach widocznych oscylacji wynika z różnych mas przy jednakowym momencie pędu. W przybliżeniu odpowiada za to związek opisujący wielkość Ω powyżej, przed Poleceniem 2.

Wizualizacja wyników

Zacznijmy od obiecanych „rozetek” dla wahadła sferycznego – prześledź Animację 1. poniżej:



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/R1bbOzi4HbxMT](#)

Animacja 1. Wahadło sferyczne - punkt zakreślający czerwony tor na sferze. Zauważ, że zakres kąta α jest ograniczony. Postaraj się wyobrazić sobie przebieg zmienności prędkości kątowych dla kątów α oraz φ .

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

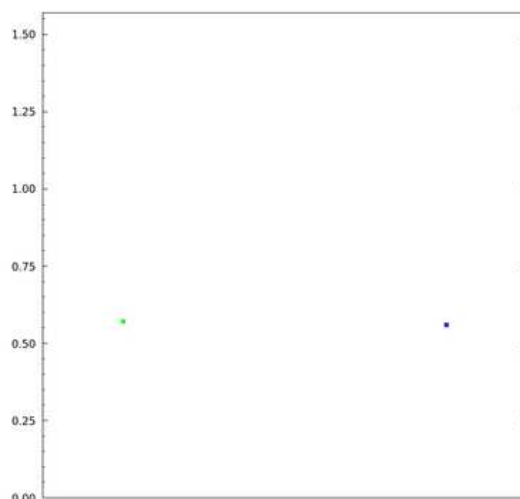
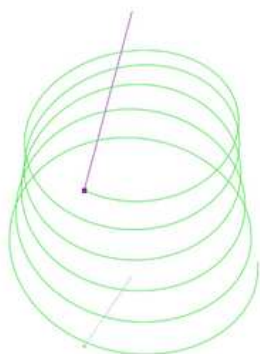
W animacji pokazano wycinek sfery, symbolizującej dostępne dla wahadła stożkowego położenia oraz tor takiego przykładowego wahadła o ustalonej długości, w postaci czerwonej krzywej w kształcie rozetki. Animacja jest ruchomym obrazem przedstawionym bez udziału lektora.

Animacja 2. pokazuje zachowanie wahadła o nici skracanej liniowo w czasie, tj. wg przepisu

$$l(t) = l_0 - Vt ,$$

przy czym zawsze $l(t) \geq 0$. Symbolem V oznaczamy prędkość skracania wahadła wyrażoną w metrach na sekundę.

Symulacja kończy się - choć nie musi tak być, ale tak to zaprogramowaliśmy - w chwili, gdy kąt α pierwszy raz staje się prosty, tj. osiąga wartość $\pi/2$ rad. Obok wirującego wahadła (zakreślającego swój tor) oraz jego „cienia” - w zamyśle ułatwiającego śledzenie ruchu - pokazane są też wartości kąta równowagowego α_0 (punkt zielony) oraz rzeczywistego kąta α (punkt niebieski). Pionowa oś tej części animacji jest wyskalowana w radianach. Niewielkie drgania punktu niebieskiego - na tle „wznoszenia” punktu zielonego - są praktycznie nie do zaobserwowania na animacji po lewej stronie.



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/Ri23lRnxk3YO](https://preview/resource/Ri23lRnxk3YO)

Animacja 2. Stan początkowy: wahadło stożkowe. Nić skracamy liniowo w czasie.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:

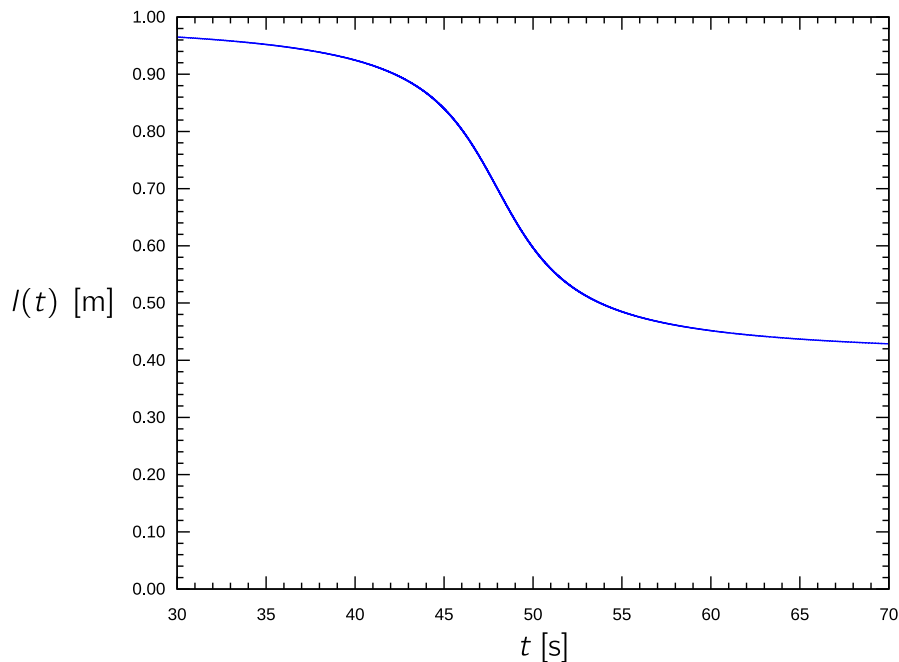
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

W animacji pokazano tor wahadła w przypadku, gdy skracamy sznur liniowo w czasie. Po lewej stronie rysowany jest fioletowy odcinek i fioletowa kulka symbolizujące wahadło oraz jego cień w świetle docierającym z góry, w postaci szarego odcinka i szarej kulki, nieco mniejszej niż fioletowa. Po prawej stronie pokazano dwa punkty oddające na pionowej skali w zakresie od zera do pi drugich radiana chwilowy kąt α w danej chwili oraz odpowiedni kąt równowagi α_0 . Punkt zielony opisuje kąt równowagi, punkt niebieski – kąt rzeczywisty. W miarę postępu animacji oba punkty poruszają się średnio rzecz biorąc w górę, przy czym punkt po lewej stronie porusza się wyłącznie w górę, a położenie punktu po prawej stronie oscyluje wokół położenia punktu po lewej stronie. Animacja jest ruchomym obrazem przedstawionym bez udziału lektora.

Tor wahadła może kojarzyć się z zieloną krzywą oplatającą szarą powierzchnię, zaprezentowaną na Rys. 7. w sekcji „Przeczytaj”. To naturalny kandydat na pierwsze skojarzenie. Jednak należy pamiętać, że rzeczywisty tor jedynie co jakiś czas przechodzi przez kolejne położenia równowagi α_0 , ale w żadnym wypadku nie jest tak dla każdej chwili czasu. Co więcej – żadnej tak prostej do opisanie i naturalnie wyróżnionej powierzchni tu nie ma. Jednak mamy prawo przypuszczać (i zasugerować to na drodze „eksperymentu numerycznego”), że im mniejsza prędkość skracania nici V , tym realny tor jest bliższy wspomnianej powierzchni. Dzieje się tak z uwagi na mniejsze odstępstwa $\alpha(t)$ od α_0 .

Kolejny przypadek to wahadło sferyczne (nie stożkowe), które skracamy inaczej niż poprzednio, bo niejednostajnie. Rys. 3a. pokazuje zależność $l(t)$; wybraliśmy funkcję arcus

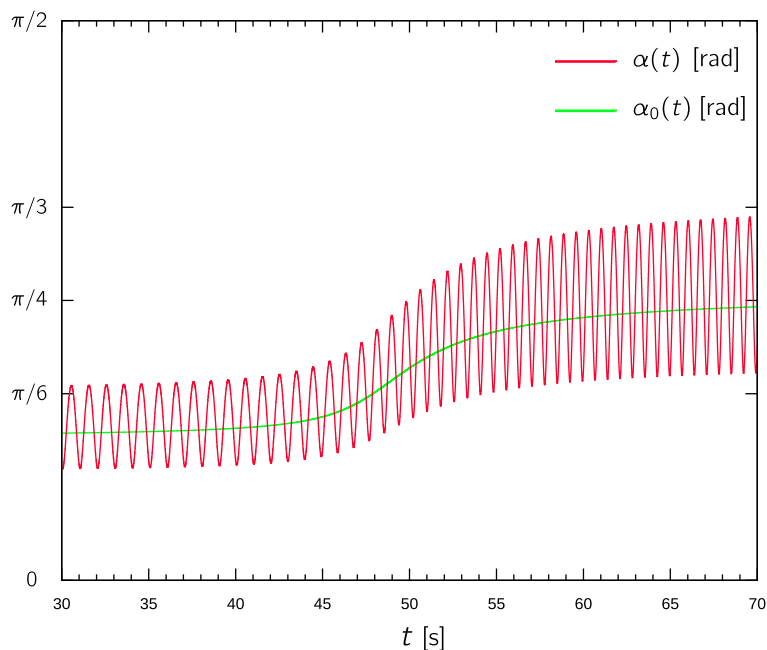
tangens, tj. odwrotną do tangensa. Dobrze modeluje ona sytuację, gdy zaczynamy ciągnąć nić powoli, następnie coraz szybciej, ale pod koniec zwalnimy.



Rys. 3a. Niejednostajne skracanie nici wahadła

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

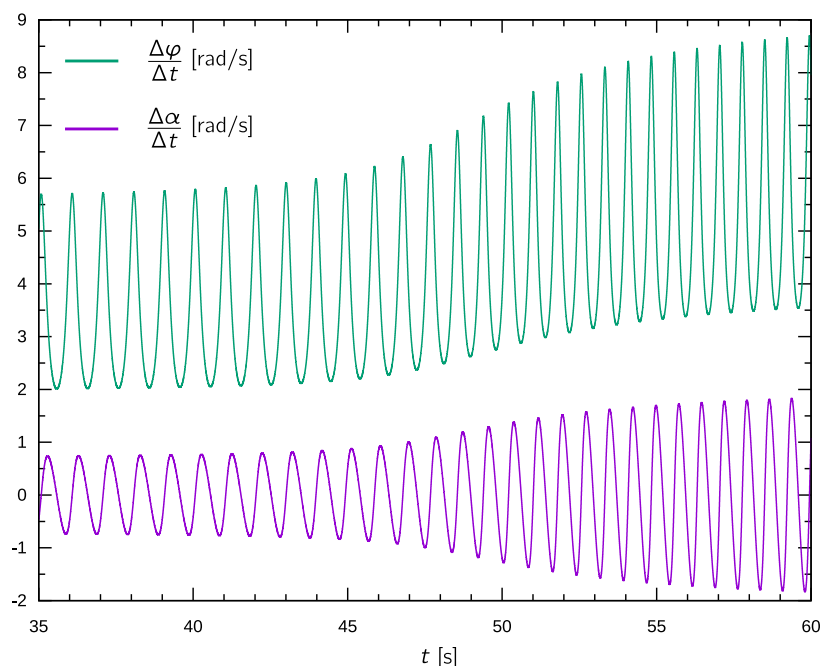
Na Rys. 3b. widać wykres zależności kąta $\alpha(t)$ (krzywa czerwona) oraz kąta odpowiadającego równowadze (krzywa zielona). Warto zauważyć, że w miarę wzrostu czasu (a zatem malenia l) oscylacje α wyraźnie zwiększają amplitudę i częstotliwość.



Rys. 3b. Zależność kąta wychyleń od pionu oraz kąta równowagowego od czasu dla $l(t)$ przedstawionej na Rys. 3a.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Na Rys. 3c. pokazujemy odpowiednie prędkości kątowe – dla kąta azymutalnego φ oraz kąta α .



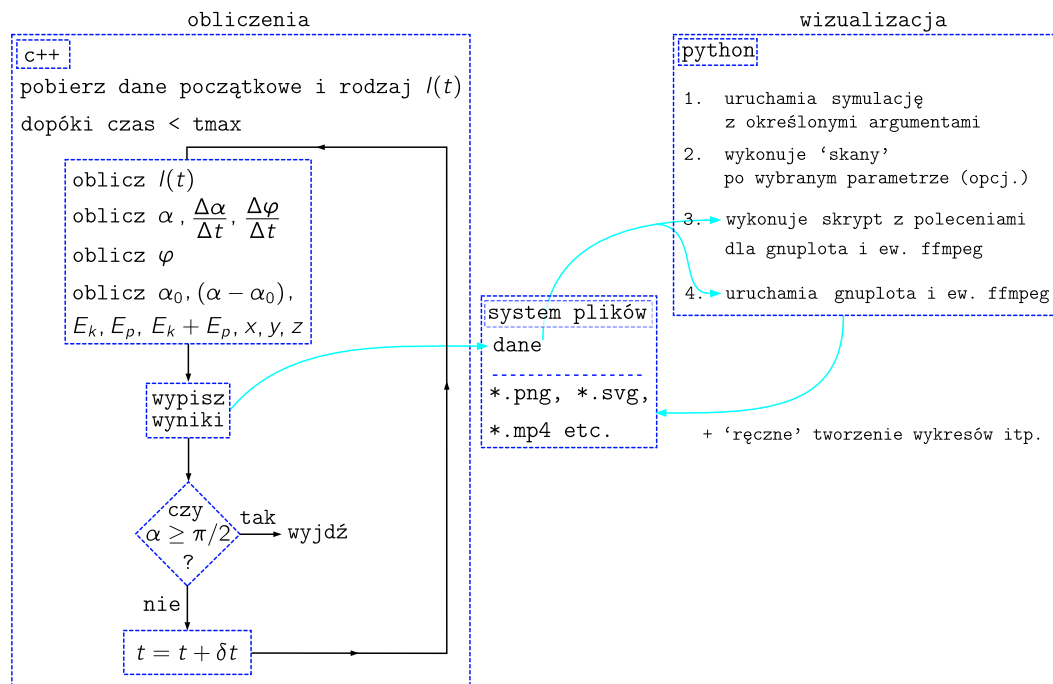
Rys. 3c. Fragment przedziału czasu z Rys. 3a. i 3b., obie prędkości kątowe dla wahadła. Widać różnice w kształcie minimów i maksimów na zielonej krzywej oraz różnice w stromiznach fioletowej przy przejściu przez wartość 0 - fragmenty rosnące są stromsze od malejących.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Algorytm, czyli wstęp do działalności własnej

Schemat 1. przedstawia sposób uzyskiwania wyników, które posłużyły do stworzenia powyższych rysunków i animacji. Zachęcamy do prześledzenia go, konsultacji na lekcjach informatyki i fizyki oraz twórczej modyfikacji, ew. stworzenia symulacji zachowania innego interesującego układu fizycznego. W szczególności: problemem, którego tu nie poruszyliśmy, a uważamy za ciekawy, jest zbadanie zależności stanu końcowego wahadła po ustaniu zmian jego długości od chwili, kiedy te zmiany ustały, w szczególności od tego, czy w chwili tej wahadło przechodziło przez punkt o zerowej, czy może maksymalnej prędkości kątowej dla kąta α .

Zastosowane tu środowisko, języki programowania i zewnętrzne narzędzia nie są w żadnym wypadku wyborem uniwersalnym. Jedną z „wad” wyboru C++ jest nieco trudniejsza obsługa powiązania argumentów wejściowych z rodzajem symulacji, tj. konkretną postacią $l(t)$. Łatwiej jest to zrobić w językach takich jak C# czy Java.



Schemat 1. Przykładowe postępowanie prowadzące do rysunków bądź animacji podobnych do zamieszczonych wyżej. Ostatnie trzy zmienne kartezjańskie służą wyłącznie do tworzenia rysunków trójwymiarowych, będących klatkami animacji.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Słowniczek

Metoda Rungego-Kutty

(ang. *Runge-Kutta algorithm*) – jedna z zaawansowanych metod do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych. Dla równań opisujących drgania okazuje się być dużo dokładniejsza od najprostszego schematu polegającego na traktowaniu ruchu w każdym kroku czasowym jako ruchu jednostajnie przyspieszonego.

Metoda bisekcji

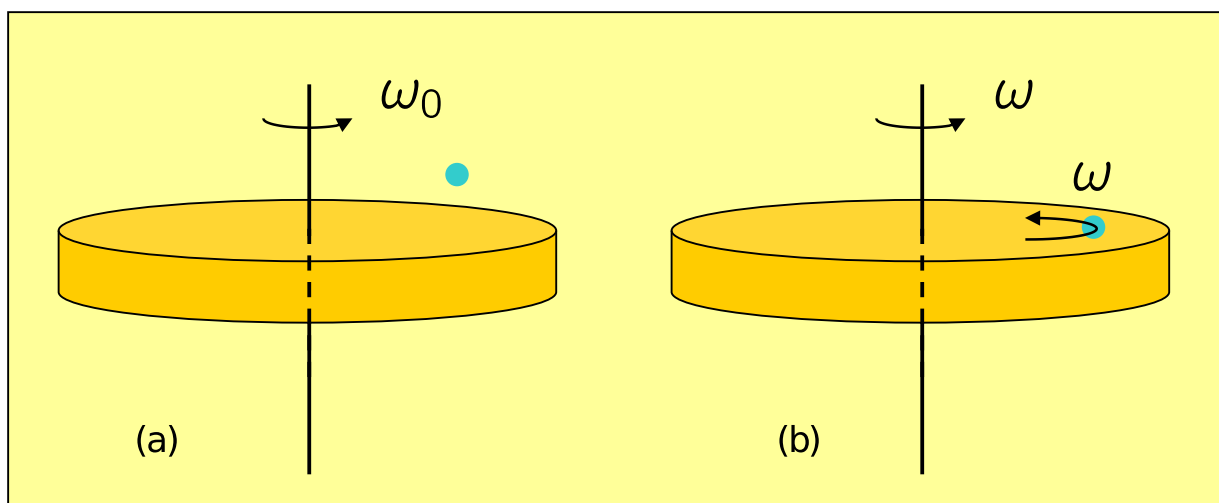
(ang.: *binary search algorithm*) – tu: sposób rozwiązywania równań metodą kolejnych podziałów na dwie równe części odcinka, o którym wiemy, że zawiera rozwiązanie. Szerzej – sposób przeszukiwania tablic ew. struktur drzewowych w programowaniu.

Symulacja interaktywna

Zasada zachowania momentu pędu w zderzeniu niesprężystym

Przypomnij sobie podstawowe fakty o zderzeniach niesprężystych punktów materialnych, np. w e-materiałach „Co to jest zderzenie niesprężyste?” i „Zasada zachowania pędu a zderzenia niesprężyste”.

Czy może dojść do niesprężystego zderzenia punktowej masy z obracającą się bryłą? Tak, przedstawione jest to na rysunku poniżej:



(a) Na wirującą tarczę spada kulka.

(b) Po przyklejeniu się kulki do tarczy układ wiruje z mniejszą prędkością kątową.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Wykorzystaj symulację do zbadania stosowalności zasady zachowania momentu pędu do opisu takiego niesprężystego zderzenia.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Polecenie 1

W symulacji prędkości kątowe podawane są w jednostkach o skrótce „rpm” - z angielskiego: *revolutions per minute*. Jest to często używana jednostka oraz jej skrót dla opisywania prędkości obrotowych silników, spalinowych i elektrycznych, a także płyt gramofonowych.

Wskaż najbardziej trafny komentarz do zastosowania tej jednostki do prędkości kątowej.

- ☐ Jest to poprawne z punktu widzenia jednostki prędkości kątowej i dopuszczalne z punktu widzenia wykorzystania pozaukładowej jednostki czasu, jaką jest minuta.
- ☐ Jest to dopuszczalne, mimo że "obroty na minutę" to, formalnie rzecz biorąc, jednostka częstotliwości. Jednak związek pomiędzy częstotliwością a prędkością kątową jest proporcjonalny, więc bez problemu można zamienić **3 obroty** na minutę na $3 \cdot 2\pi$ **radianów** na minutę.
- ☐ Jest to niedopuszczalne: „obroty na minutę” nie jest jednostką układu SI, a tylko takie są dopuszczone do użytku.

Polecenie 2

Zastosuj zasadę zachowania momentu pędu do sytuacji przedstawionej w symulacji. Przyjmij te same oznaczenia i wyprowadź wyrażenie pozwalające obliczyć prędkość kątową ω , przy zadanych pozostałych parametrach układu.

Polecenie 3

Przeprowadź symulację dla kilku wartości odległości d . Zanotuj uzyskaną końcową prędkość ω . Następnie wykorzystaj wyrażenie wyprowadzone w poprzednim poleceniu i oblicz, czy Twój wynik jest zgodny z otrzymanym w symulacji.

Polecenie 4

Ustawiaj różne odległości punktu upadku kulki od osi obrotu. Dla każdej odległości:

- zbadaj, za pomocą symulacji, końcową prędkość kątową ω_1 układu w przybliżeniu punktu materialnego dla kulki;
- przełącz symulację na wersję „zaawansowaną” i zbadaj ω_2 uzyskaną przy założeniu, że kulka jest rozciągniętą bryłą;
- przygotuj w arkuszu kalkulacyjnym czterokolumnową tabelę i wpisuj do niej uzyskiwane wyniki; w ostatniej kolumnie wpisz procentową różnicę Δ pomiędzy tymi prędkościami kątowymi, zgodnie ze wzorem:

$$\Delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1}$$

Sporządź wykres zależności $\Delta(d)$ i skomentuj jego przebieg.
W komentarzu uwzględnij dokładność, z jaką podawane są wyniki symulacji.

Przykład organizacji tabeli z danymi z symulacji. Wypełniono przykładowy wiersz.

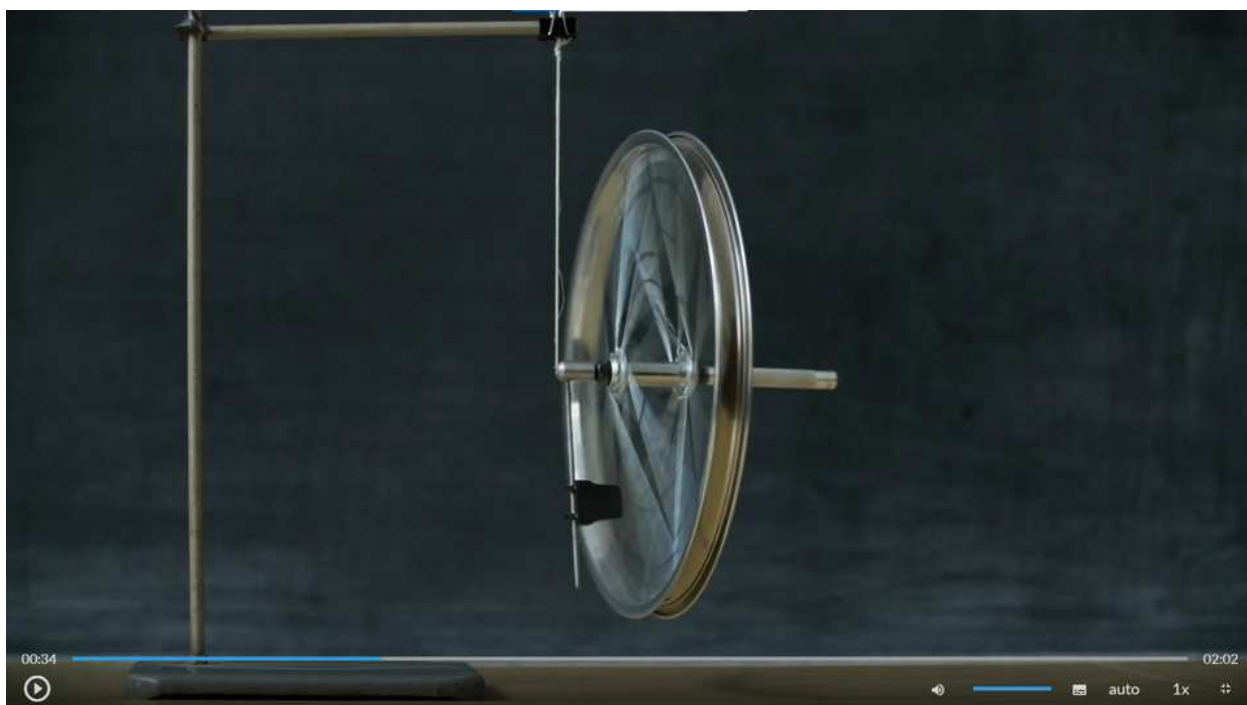
Lp.	d (cm)	ω_1 (rpm)	ω_2 (rpm)	Δ (%)
1	30	2,54	2,54	0

Film (standardowy)

Precesja a zasada zachowania momentu pędu

Dla zainteresowanych

Jednym ze sposobów zademonstrowania zasady zachowania momentu pędu jest pokazanie różnych aspektów zjawiska **precesji**. Nie przejmuj się, jeśli jeszcze niewiele wiesz o samym zjawisku. Obejrzyj film, rozpoznaj na czym ono polega – jest bardzo zaskakujące i widowiskowe.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RcZj2KlWfu4tR>

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Zapoznaj się z audiodeskrypcją filmu.

Polecenie 1

Koło rowerowe jednostronnie podparte

Opisz przebieg dwóch pierwszych eksperymentów z kołem rowerowym. Wskaż przyczynę różnicy w zachowaniu się koła. Staraj się użyć w swoim opisie słowa „precesja”, „ruch precesyjny” we właściwym kontekście.

Wskaż także lapsus językowy, który przytrafił się osobie przeprowadzającej i prezentującej eksperyment.

Polecenie 2

Jak wywołać precesję?

Obejrzyj przebieg trzeciego eksperymentu, w którym wirujący bąk, podparty w jednym punkcie, nie przewraca się.

Uzupełnij zdania:

1. Gdyby bąk nie wirował, to po zwolnieniu górnego mocowania ☐ przewróciłby się ☐ /
☐ utrzymałby się w pionie ☐.

2. Natomiast utrzymywanie się w pionie wirującego bąka jest przejawem zasady zachowania ☐ energii kinetycznej ☐ / pędu ☐ / momentu pędu ☐.

3. Tuż po rozkręceniu bąka i zwolnieniu górnego mocowania, jego precesja ☐ była wyraźnie widoczna ☐ / była praktycznie niewidoczna ☐ /
☐ w ogóle nie występowała ☐.

4. Z tego można wysnuć wniosek, że wirująca bryła o symetrii obrotowej podlega zjawisku precesji ☐ zawsze ☐ tylko gdy pojawi się krótkotrwały impuls momentu siły tarcia ☐ /
☐ gdy jest poddana działaniu dowolnej zewnętrznej siły o niezerowym momencie ☐.

Ćwiczenie 1

Wskaż najbardziej trafne uzupełnienia podstawowego opisu zjawiska precesji.

1. Zjawisko precesji dotyczy ciał, do których stosujemy opis ☐ punktu materialnego ☐
☐ bryły sztywnej ☐ zarówno punktu materialnego jak i bryły sztywnej ☐.

2. Ciało, by wykonywać ruch precesyjny, musi mieć niezerową ☐ prędkość liniową ☐
☐ prędkość kątową ☐
co najmniej jedną z dwóch prędkości, równie dobrze liniową jak kątową ☐.

Można więc przypuszczać, że precesja się w jakiś sposób łączy z zasadą zachowania
☐ pędu ☐ momentu pędu ☐ którejkolwiek z tych dwóch wielkości ☐.

3. Precesja pojawia się wskutek działania

☐ siły tarcia, która nieco zaburza oryginalny ruch ciała ☐
☐ siły grawitacji, która nieco zaburza oryginalny ruch ciała ☐
☐ dowolnej siły zewnętrznej, która jest zdolna zaburzyć oryginalny ruch ciała ☐
☐ precesja występuje zawsze, bez zewnętrznej przyczyny ☐.

4. Ruch precesyjny ciała objawia się tym, że ☐ wektor pędu ☐
☐ wektor momentu pędu ☐ ciała zmienia kierunek w stosunku do kierunku oryginalnego,
po czym obiega ten oryginalny kierunek.

Polecenie 3

Pstryknij monetę, a precesja się objawi

Znana jest zabawa w pstrykanie monety na poziomej, gładkiej powierzchni.

Weź monetę, możliwie masywną (np. współczesną 5-złotówkę), postaw ją pionowo na stole i delikatnie przytrzymaj od góry palcem jednej ręki. Palcem wskazującym (lub środkowym) drugiej ręki pstryknij ją w punkt obwodu możliwie odległy od osi obrotu - dzięki temu nadajesz monecie... *no właśnie, co?*

Opisz w kilku zdaniach charakterystyczny ruch monety. W swym opisie odpowiedz na zadane pytanie. Wykorzystaj także pojęcia „zasada zachowania momentu pędu” oraz „precesja”.

Polecenie 4

Precesja na scenie

Eksperymenty fizyczne mogą inspirować do twórczości artystycznej. Obejrzyj ostatnią część filmu, pozbawioną komentarza, pod kątem uczynienia z niej układu choreograficznego. Zaproponuj komentarz do takiego układu. Wybierz jedną z dwóch wersji (albo wymyśl inną):

- komentarz „artystyczny” - do przedstawienia baletowego „Taniec ze szprychami”;
- komentarz „sportowy” - do zawodów w dyscyplinie „Kolarstwo figurowe i artystyczne”.

Polecenie 5

Precesja w astronomii

Ziemia jest często opisywana jako bryła sztywna, co w wielu sytuacjach jest uzasadnione. Wiruje ona w ramach ruchu dobowego, a jej oś obrotu wskazuje na niebie kierunek północ-południe. Punkty wskazywane na niebie przez oś Ziemi zwane są w astronomii biegunami świata. Przyjmuje się, że Gwiazda Polarna leży w jednym z takich biegunów.

Wiadomo ponad wszelką wątpliwość, że oś Ziemi wykonuje ruch precesyjny. Ruch ten jest bardzo powolny - w skali ludzkiego życia nie powoduje zauważalnych efektów.

1. Wyszukaj informację o czasie trwania jednego cyklu tego ruchu.
2. Wymień przynajmniej jeden skutek tego ruchu, zauważalny na niebie w skali znacznie dłuższej niż życie ludzkie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Punkt materialny wprowadzono w ruch obrotowy z prędkością kątową ω_1 po okręgu o promieniu r_1 . Jeśli ciało to poruszać się będzie po okręgu o promieniu r_2 , to jaka będzie jego prędkość kątowa ω_2 ? Uzupełnij poniższy wzór.

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot (\quad \quad \quad)$$

+

$\frac{1}{r_1^2}$

—

$\frac{1}{r_2^2}$

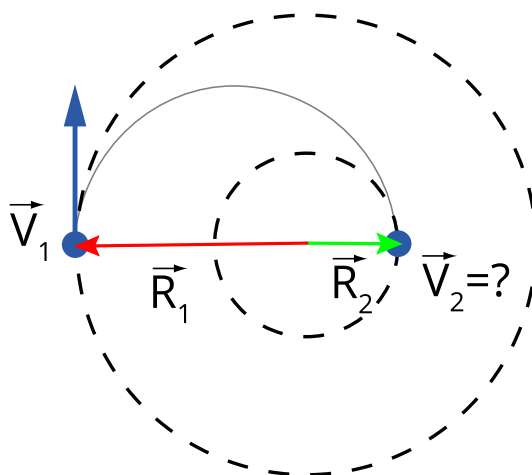
·

r_1^2

Ćwiczenie 2

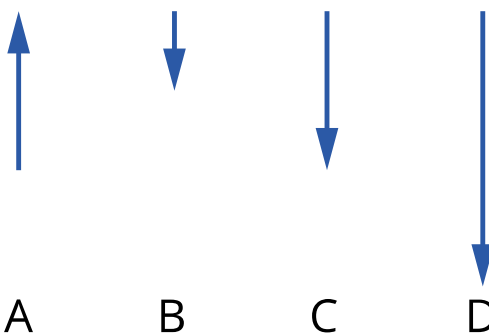


Poniższy rysunek prezentuje ciało poruszające się po spirali. W pewnej chwili położenie ciała względem środka spirali dane jest wektorem $\vec{R}_1$, a prędkość liniowa wynosi $\vec{v}_1$. Po przemieszczeniu się do punktu $\vec{R}_2$, w odległości o połowę mniejszej niż poprzednio, ciało porusza się z prędkością $\vec{v}_2$.



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Przyjmij, że w ruchu ciała zachowany jest moment pędu i wskaż, który z poniższych wektorów - z rozsądnym przybliżeniem - prezentuje prędkość $\vec{v}_2$ tego ciała:



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

☐ A



B



C



D

Ćwiczenie 3



Oblicz, ile razy większa będzie prędkość kątowna kulki o promieniu 5 cm, która obracała się dookoła pewnej osi w odległości 50 cm, jeśli znalazła się w odległości 25 cm od tej osi.

Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Przyjmij, że mimo zmiany odległości zachowany jest moment pędu kulki.

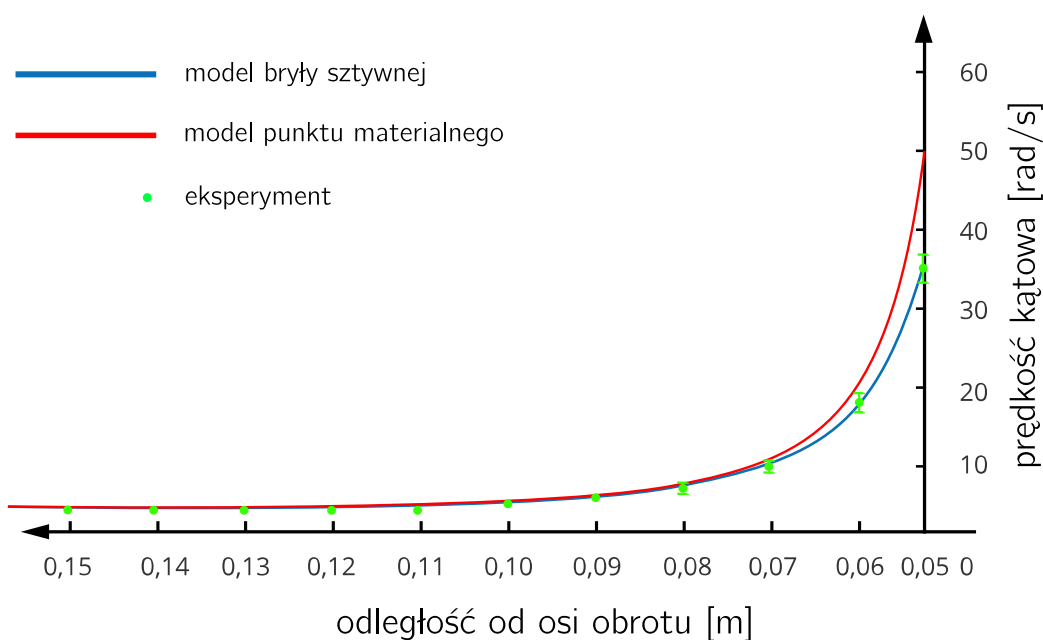
$$\omega_2 = \boxed{} \omega_1$$

Ćwiczenie 4



Kulka o promieniu $r = 5 \text{ cm}$ porusza się ruchem obrotowym wokół osi, która pierwotnie była odległa o 15 cm od środka kuli. W miarę jak kulka zmniejsza swoją odległość od osi obrotu, zwiększa się jej prędkość kątowna. Wynika to z zachowania przez kulkę momentu pędu - iloczyn malejącego momentu bezwładności i rosnącej prędkości kątowej jest stały.

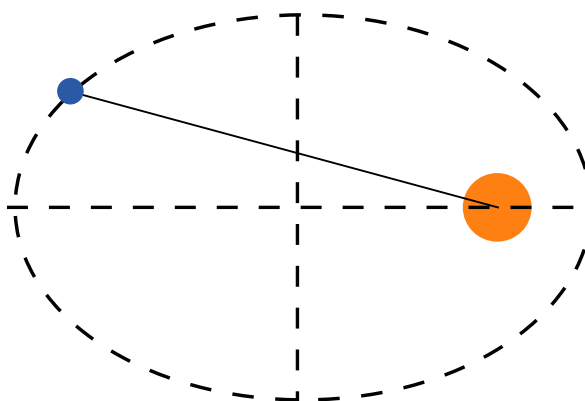
Pewien eksperymentator wykonał poniższy wykres. Pokazuje on zielonymi punktami zmierzoną prędkość kątową kulki w coraz mniejszych odległościach od osi, wokół której się obracała. Eksperymentator wyznaczył niepewności pomiaru. Stwierdził, że poza czterema punktami, odpowiadającymi największym prędkościom kątowym, odcinki niepewności nie byłyby na wykresie widoczne. Na tle punktów naniósł wyniki dwóch modeli fizycznych, opisujących zachowanie kulki. W jednym kulkę przybliżano punktem materialnym, w drugim traktowano ją jako bryłę sztywną.



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Na podstawie tego wykresu oceń, który z tych modeli jest poprawny.

Ćwiczenie 5



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Powyższy rysunek w sposób schematyczny prezentuje Ziemię (kulka niebieska) orbitującą wokół Słońca (kulka żółta).

Na rysunku widać, że orbita Ziemi ma kształt elipsy, a nie okręgu. Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy. Znaczy to, że odległość między Ziemią a Słońcem zmienia się w ciągu roku. Czy w związku z tym zmieniać się będzie także prędkość liniowa naszej planety? (Uwaga: nie jest zachowana skala, eliptyczność orbity oddana jest w sposób wyolbrzymiony.)

- ☐ Tak, będzie największa, gdy Ziemia będzie w największej odległości od Słońca.
- ☐ Tak, będzie największa, gdy Ziemia będzie w najmniejszej odległości od Słońca.
- ☐ Nie, prędkość jest stała, niezależnie od odległości Ziemi od Słońca.
- ☐ Żadne z powyższych.

Ćwiczenie 6



Bolas to dawna broń myśliwska. Składała się z ciężkich kul (dwóch lub więcej), połączonych sznurem. Kule były ciężkie, wykonane z kamienia lub metalu, a sznur dość długi. Jak myślisz, jaka była zasada działania tej broni?



Źródło: Roberto Fiadone, dostępny w internecie: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Boleadoras_02.jpg
[dostęp 24.08.2022], licencja: CC BY-SA 4.0.

Ćwiczenie 7



Jeśli ciało poruszało się z prędkością liniową v_1 po okręgu o promieniu r_1 , to - zakładając, że zmiana toru odbyła się z zachowaniem momentu pędu - poruszając się po okręgu o promieniu r_2 będzie miało prędkość:

☐ $v_2 = v_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}$

☐ $v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$

☐ $v_2 = v_1 \frac{r_2^2}{r_1^2}$

☐ $v_2 = v_1 \frac{r_2}{r_1}$

Ćwiczenie 8



Satelita geostacjonarny orbituje wokół Ziemi w płaszczyźnie równika. Jego orbita jest okręgiem o promieniu $r_s = 42000$ km, a prędkość orbitalna $v_s = 3,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Wyobraź sobie, że taki satelita utracił łączność z Ziemią i w niekontrolowany sposób włączał i wyłączał swoje silniki sterujące. Skutkiem takiego procesu mogłoby być poruszanie się satelity po linii krzywej, leżącej w płaszczyźnie równika, ale położonej coraz bliżej Ziemi. W momencie wyczerpania paliwa orbita satelity mogłaby ponownie mieć kształt okręgu, ale o mniejszym promieniu $r_b = 7000$ km. Na takiej orbicie jego prędkość orbitalna $v_b = 7,6 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Choć taki proces jest niezmiernie mało prawdopodobny, to jest możliwy.

Zbadaj, czy w opisanym procesie przejścia z jednej kołowej orbity na drugą, także kołową ale niższą, zachowany zostałby moment pędu satelity. Skomentuj wynik badania.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Jak zademonstrować zasadę zachowania momentu pędu
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji lub doświadczeń oraz wnioskowanie na podstawie ich wyników. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 6) tworzy teksty, tabele, diagramy lub wykresy, rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu; właściwie skaluje, oznacza i dobiera zakresy osi; 11) opisuje przebieg doświadczenia lub pokazu; wyróżnia kluczowe kroki i sposób postępowania oraz wskazuje rolę użytych przyrządów i uwzględnia ich rozdzielczość. III. Mechaniki bryły sztywne. Uczeń: 8) doświadcza: a) demonstruje zasadę zachowania momentu pędu.

Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: 1. dowiaduje się, jak zademonstrować zasadę zachowania momentu pędu. 2. przeprowadza symulację doświadczenia 3. wykonuje obliczenia rachunkowe wykorzystując zasadę zachowania momentu pędu.
Strategie i metody nauczania:	eksperymentalno-obserwacyjna
Formy zajęć:	praca grupowa
Środki dydaktyczne:	komputer z dostępem do Internetu i projektorem multimedialnym, lejek i kulki, oprogramowanie typu tracker, telefon komórkowy
Materiały pomocnicze:	brak
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel prezentuje uczniom duży lejek i zestaw kulek. Nauczyciel prosi wybranego ucznia, by ten wprowadził kulkę w ruch obrotowy wewnątrz lejka. Nauczyciel zauważa, że kulka nie opada na dno, ale pozostaje w tym ruchu przez pewien czas (ograniczony tarcie i oporem powietrza). Nauczyciel zwraca uwagę, że gdy kulka zaczyna opadać, krążąc po ciasniejszej orbicie, jej prędkość kątowna wzrasta. Uczeń, który się zgłosi na ochotnika, nagrywa to zjawisko np. za pomocą kamery w telefonie komórkowym. Nauczyciel zgrywa film i wgrywa go do programu typu tracker (np. https://physlets.org/tracker/).	
Faza realizacyjna:	

Jeśli istnieje możliwość pracy w pracowni komputerowej, uczniowie wykonują następujące czynności w parach lub grupowo. W przeciwnym wypadku obserwują prezentację na projektorze. Po wgraniu filmu do programu następuje jego analiza – oznacza się śledzony punkt, wprowadza skalę i włącza się tryb śledzenia tego punktu. Program analizuje położenie oznaczonej kulki w leju, jednocześnie rysując na wykresach jej prędkość liniową i kątową. Nauczyciel zwraca uwagę na kształt krzywych opisujących dane eksperymentalne – tłumaczy uczniom, że jest to efekt spełniania, w każdej chwili, zasady zachowania momentu pędu z uwzględnieniem obecności sił oporu. Nauczyciel prosi ochotnika o objaśnienie zmiany prędkości kątowej obracającej się kulki we wspomnianym wypadku.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel krótko demonstruje uczniom wahadło stożkowe wraz z możliwością jego skracania. Wyjaśnia – w świetle pracy domowej – ewentualne wątpliwości uczniów związane z obsługą takiego zestawu.

Nauczyciel prosi uczniów o rozwiązanie zadań: 1, 2, 3 i 7 z zestawu ćwiczeń. Uczniowie w parach przeprowadzają dyskusję podsumowującą w oparciu o rozwiązanie zadań. Nauczyciel obserwuje pracę uczniów, wspiera w realizacji zadania. W razie potrzeby nauczyciel dostarcza im informację zwrotną kształtującą.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują wahadło stożkowe, obserwują jego ruch, w tym podczas powolnego skracania oraz wykonują krótką notatkę ze spostrzeżeniami i wnioskami. Uczniowie utrwalają wiedzę i zdobyte umiejętności przez rozwiązanie w domu zadań: 4, 5 i 8 z zestawu ćwiczeń. Dla osób chętnych również zadanie 6.

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:

Symulacja może być wykorzystana po lekcji w celu powtórzenia i utrwalenia wiadomości dotyczących zasady zachowania momentu pędu.

Film edukacyjny jest punktem wyjścia do samodzielnej pracy uczniów szczególnie zainteresowanych zagadnieniem precesji, np. w astronomii.