



Równość wektorów w układzie współrzędnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równość wektorów w układzie współrzędnych

Źródło: DC Irvin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wiesz już, po czym poznać, że wektory na płaszczyźnie euklidesowej są równe: wystarczy, że mają takie same kierunki, zwroty i długości. W tym rozdziale poznasz proste kryterium równości wektorów umieszczonych w układzie współrzędnych.

Twoje cele

- Wykorzystasz warunek równości wektorów w układzie współrzędnych do rozwiązywania zadań dotyczących wielokątów.
- Wyznaczysz wartości parametru tak, aby wektory były równe.

Przeczytaj

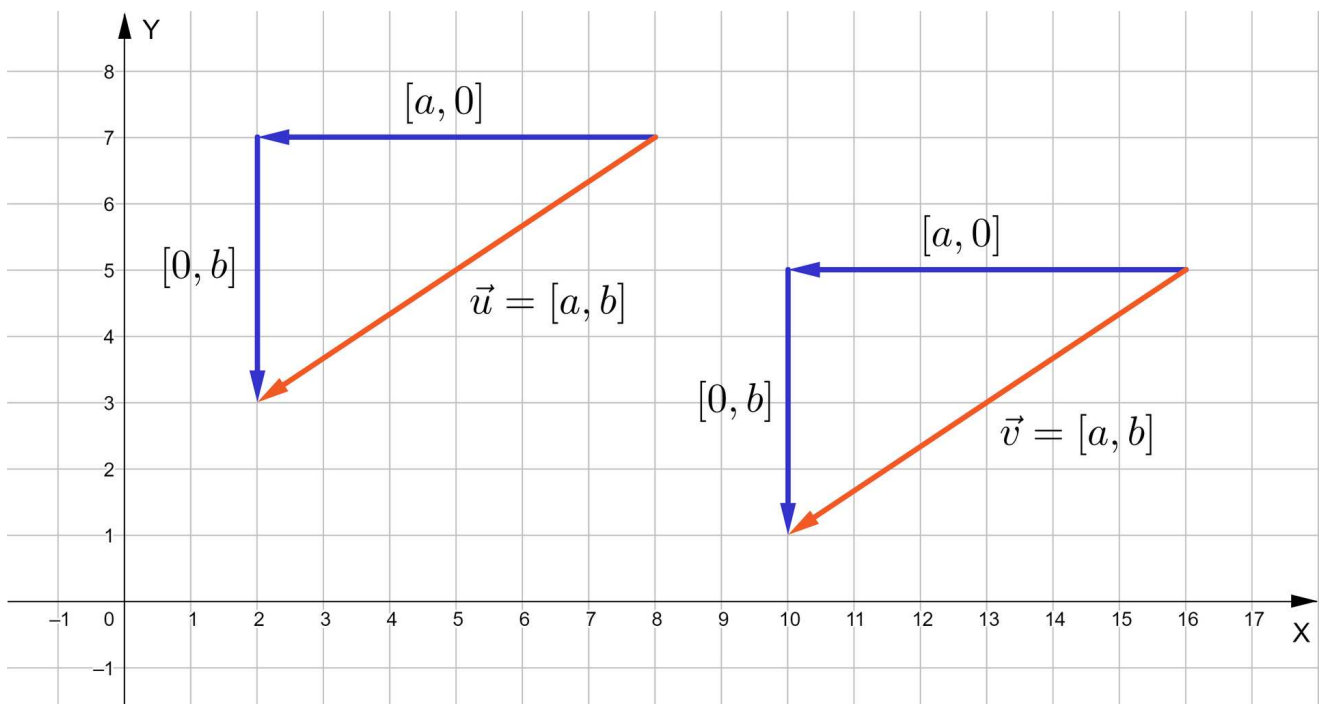
Przypomnijmy, że każdemu wektorowi umieszczonemu w układzie współrzędnych możemy przyporządkować dwie współrzędne. Pierwszą interpretujemy jako przesunięcie w poziomie: jeśli jest dodatnia, to przesunięcie następuje w prawo, jeśli ujemna - w lewo. Druga określa przesunięcie w pionie: jeśli jest dodatnia, przesunięcie następuje w górę, jeśli ujemna - w dół. Złożenie obu przesunięć to droga, jaką należy pokonać, aby dostać się od początku wektora do jego końca. Podamy teraz i udowodnimy dwa wzajemnie odwrotne twierdzenia.

Twierdzenie: o wektorach w układzie współrzędnych

Jeżeli wektory w prostokątnym układzie współrzędnych mają równe odpowiednie współrzędne, to są one wektorami równymi.

Dowód

Niech $\vec{u} = [a, b]$ oraz $\vec{v} = [a, b]$. Skorzystamy z interpretacji współrzędnych wektorów jako przemieszczenia w pionie i w poziomie, które prowadzą od początku do końca wektora. Możemy zauważyć, że w obu przypadkach, aby z początku wektora dotrzeć do jego końca, należy przemieścić się w poziomie o tę samą liczbę jednostek w tę samą stronę; przemieszczenie w pionie również jest takie samo w obu przypadkach. Oznacza to, że oba trójkąty prostokątne widoczne na rysunkach poniżej są przystające (na mocy [cechy bkb](#)), zatem wektory zawarte w przeciwprostokątnych są równe.

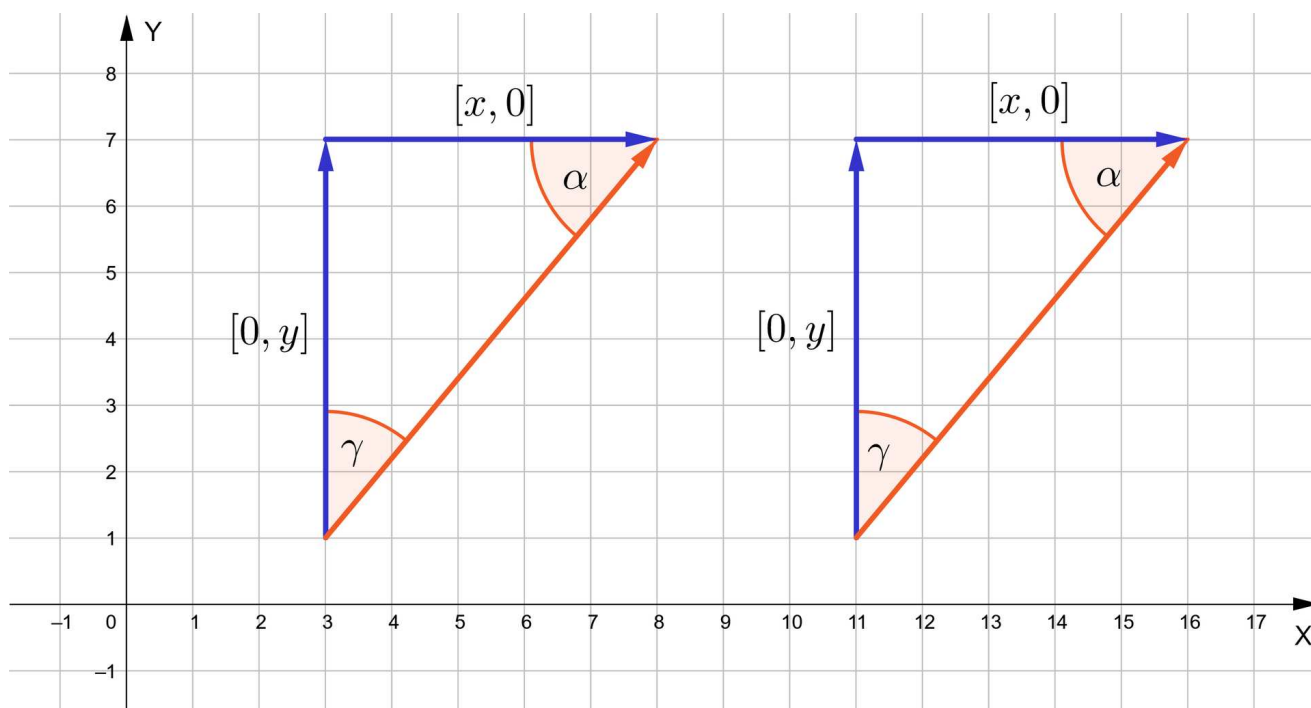


Twierdzenie: o równości współrzędnych dwóch wektorów

Jeśli wektory w układzie współrzędnych są równe, to mają równe współrzędne.

Dowód

Wektory równe mają ten sam kierunek, zwrot i długość, zatem trójkąty prostokątne zbudowane na tych wektorach jako na przeciwprostokątnych o przyprostokątnych równoległych do osi układu mają równe kąty i przystające przeciwprostokątne. Zatem na mocy cechy KBK są przystające.



Wektory zawarte w przyprostokątnych są wektorami parami równymi w obu trójkątach prostokątnych. Rrasa jaką należy pokonać, aby przemieścić się od początku wektora do końca jest taka sama dla wektorów zawartych w każdej z przeciwprostokątnych. Oznacza to, że wektory zawarte w przeciwprostokątnych mają równe współrzędne.

Powyższe dwa twierdzenia można zapisać jako jedno:

Twierdzenie: o równości wektorów w układzie współrzędnych

Wektory w układzie współrzędnych są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współrzędne.

Przykład 1

Wyznamy wartości parametru m tak, aby wektory o współrzędnych $[m^2 - 4; m + 3]$ oraz $[5; 2m + 6]$ były równe.

Zgodnie z **kryterium równości wektorów w układzie współrzędnych** wektory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współrzędne. Wobec tego, wektory będą równe dokładnie wtedy, gdy spełnione będą równania: $m^2 - 4 = 5$ i $m + 3 = 2m + 6$, czyli wystarczy rozwiązać układ

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 5 \\ m + 3 = 2m + 6, \end{cases}$$

który jest równoważny z układem

$$\begin{cases} m^2 = 9 \\ -3 = m \end{cases}$$

Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest liczba $m = -3$.

Przykład 2

Dane są punkty $A = (4; 0)$, $B = (6; 3)$, $C = (2; 5)$. Wyznamy wierzchołek $D = (x; y)$ równoległoboku $ABCD$. Zauważmy, że wektory

$\overrightarrow{BA} = [4 - 6; 0 - 3] = [-2; -3]$ oraz $\overrightarrow{CD} = [x - 2; y - 5]$ są równe. Oznacza to, że odpowiednie współrzędne są równe, czyli spełnione są równania: $-2 = x - 2$ oraz $-3 = y - 5$, czyli $x = 0$ i $y = 2$. Zatem $D = (0, 2)$.

Słownik

kryterium równości wektorów w układzie współrzędnych

twierdzenie orzekające, że wektory w prostokątnym układzie współrzędnych są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe odpowiednie współrzędne

cecha *bkb* przystawiania trójkątów

twierdzenie orzekające, że dwa trójkąty są przystające dokładnie wtedy, gdy dwa boki jednego trójkąta są przystające odpowiednio do dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty między tymi bokami w obu trójkątach również są przystające

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj poniższą infografikę. Na podstawie informacji w niej zawartych rozwiąż zadania.

Polecenie 2

Wpisz brakujące współrzędne, aby $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Przyjmujemy oznaczenia $A = (x_A; y_A)$, $B = (x_B; y_B)$ i $\vec{u} = [u_1; u_2]$

x_A	y_A	x_B	y_B	u_1	u_2
5	7	-4	-3		
	-2	7		1	-8
-3		-2	5		-12
3	-9		-5	0	

Polecenie 3

Wyznacz wartość parametru m tak, aby wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ były równe.

Współrzędne wektora $\vec{u}$	Współrzędne wektora $\vec{v}$	Wartość parametru m
$\vec{u} = [m - 1; 4]$	$\vec{v} = [3; 4]$	
$\vec{u} = [m, m + 2]$	$\vec{v} = [m; -4]$	
$\vec{u} = [a; 2m - 2]$	$\vec{v} = [a; m + 3]$	
$\vec{u} = [3m + 3; 30]$	$\vec{v} = [m + 5; 30]$	

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary wektory równe.

$$\overrightarrow{AB}, \text{ gdzie } A = (-5; -3), \\ B = (-4; -2)$$

$$\vec{u} = [2; 3]$$

$$\overrightarrow{AB}, \text{ gdzie } A = (-3; 4), B = (4; -3)$$

$$\vec{u} = [7; 8]$$

$$\overrightarrow{AB}, \text{ gdzie } A = (1; 2), B = (8; 10)$$

$$\vec{u} = [7; -7]$$

$$\overrightarrow{AB}, \text{ gdzie } A = (2; -5), B = (4; -2)$$

$$\vec{u} = [1; 1]$$

Ćwiczenie 2



Wpisz brakujące współrzędne, aby $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Przyjmujemy oznaczenia $A = (x_A; y_A)$, $B = (x_B; y_B)$ i $\vec{u} = [u_1; u_2]$.

x_A	y_A	x_B	y_B	u_1	u_2
2	3	9	10		
	-3	6		11	0
5		-3	3		8
-3	10		-7	1	

Ćwiczenie 3



Wyznacz wartość parametru m tak, aby wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ były równe.

Współrzędne wektora $\vec{u}$	Współrzędne wektora $\vec{v}$	Wartość parametru m
$\vec{u} = [m; 2]$	$\vec{v} = [5; 2]$	
$\vec{u} = [5, m]$	$\vec{v} = [5; -3]$	
$\vec{u} = [3; m - 2]$	$\vec{v} = [3; 3]$	
$\vec{u} = [m + 3; 3]$	$\vec{v} = [5; 3]$	

Ćwiczenie 4



Wyznacz wartość parametru m tak, aby wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ były równe.

Współrzędne wektora $\vec{u}$	Współrzędne wektora $\vec{v}$	Wartość parametru m
$\vec{u} = [2m; 2]$	$\vec{v} = [m - 1; 2]$	
$\vec{u} = [5, 3m - 1]$	$\vec{v} = [5; m - 5]$	
$\vec{u} = [3; m - 2]$	$\vec{v} = [3; 4m + 4]$	
$\vec{u} = [m + 3; 3]$	$\vec{v} = [5m + 7; 3]$	

Ćwiczenie 5



Dane są punkty: $A = (-3; 1)$, $B = (3; -2)$, $C = (7; 0)$. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, gdy:

☐ $D = (1; 3)$

☐ $D = (13; -3)$

☐ $D = (-7; 1)$

☐ $D = (11; -3)$

☐ $D = (1; 4)$

Ćwiczenie 6



Krótszą podstawą trapezu $ABCD$ jest odcinek AB , gdzie $A = (3; 2)$, $B = (2; -1)$. Podstawa CD jest dwa razy dłuższa od AB i ma środek $S = (1; 1)$. Wyznacz pozostałe wierzchołki trapezu.

Ćwiczenie 7



Uzupełnij tekst. Przeciągnij i upuść.

Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$, gdzie $B = (1; 0)$ i $C = (3; 0)$.

Długość boku sześciokąta $ABCDEF$ jest równa .

Krótsza przekątna sześciokąta $ABCDEF$ ma długość .

Dłuższa przekątna sześciokąta $ABCDEF$ ma długość .

Promień okręgu wpisanego w sześciokąt $ABCDEF$ ma długość .

Współrzędne punktu A mogą być równe: .

Współrzędne punktu D mogą być równe: .

Współrzędne punktu E mogą być równe: .

Współrzędne punktu F mogą być równe: .

Ćwiczenie 8



Dane są punkty A, B, C . Wyznacz punkt C tak, aby czworokąt $ABCD$ był kwadratem. Połącz w pary.

$$A = (2; 4), B = (6; 2), C = (8; 6)$$

$$D = (5; 8)$$

$$A = (1; 6), B = (4; 3), C = (7; 6)$$

$$D = (4; 8)$$

$$A = (1; 6), B = (3; 2), C = (7; 4)$$

$$D = (4; 9)$$

$$A = (2; 7), B = (2; 3), C = (4; 5)$$

$$D = (0; 5)$$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równość wektorów w układzie współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy.

Uczeń:

3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

Uczeń:

- Wykorzysta warunek równości wektorów w układzie współrzędnych do rozwiązywania zadań dotyczących wielokątów.
- Wyznaczy wartości parametru tak, aby wektory były równe.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja panelowa;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Równość wektorów w układzie współrzędnych”.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Infografika”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

[Wektory równoległe w układzie współrzędnych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Równość wektorów w układzie współrzędnych”.