



Modele kombinatoryczne z rozdzielanymi elementami

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Modele kombinatoryczne z rozdzielanymi elementami

Źródło: Sharon McCutcheon, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W prezentowanych w tym materiale przykładach i zadaniach rozwiązywać będziemy problemy kombinatoryczne dotyczące głównie takich permutacji pewnego zbioru skończonego, w których wyróżnione elementy tego zbioru należy rozdzielić.

Sposób rozdziału elementów jest zazwyczaj bezpośrednio zapisany w treści zadania, jednakże model z elementami rozdzielanymi może też pojawić się w wyniku szczególnej interpretacji treści zadania.

Zadania tego typu można też rozwiązywać rozpatrując każdy z rozłącznych przypadków spełniających warunki zadania, co w szczególnych przypadkach może być dość uciążliwe.

Pokażemy, jak zbudować model kombinatoryczny, dzięki któremu ostateczną liczbę obiektów spełniających warunki zadania obliczymy korzystając z reguły mnożenia.

Twoje cele

- Nauczysz się, jak wykorzystać modelowanie z rozdzielanymi elementami do rozwiązywania zadań polegających na zliczaniu liczby permutacji zbioru, w której wyróżnione elementy tego zbioru nie mogą sąsiadować ze sobą.
- Zapoznasz się z typowymi modelami kombinatorycznymi opisującymi obiekty z rozdzielanymi elementami.

- Będziesz doskonalić umiejętności posługiwania się takimi modelami w różnych zadaniach kombinatorycznych, m.in. dotyczących liczb naturalnych

Przeczytaj

Poniżej prezentowane są przykłady dotyczące liczby rozmieszczeń (permutacji) elementów pewnych zbiorów, w których wybrane elementy spełniają określone warunki.

W pierwszym przykładzie rozwiążemy zadanie dotyczące **liczby permutacji** pewnego zbioru, w którym należy rozdzielić dwa jego wyróżnione elementy.

W kolejnych przykładach liczba rozdzielanych elementów będzie się zwiększała.

Przykład 1

Obliczymy, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, w których każde dwie cyfry są różne oraz cyfry 1 i 2 nie są zapisane obok siebie.

Rozwiązanie

Pokażemy, że liczbie 7-cyfrowej, która spełnia warunki zadania można przyporządkować dokładnie jedną permutację 11-elementową utworzoną w pewien szczególny sposób ze wszystkich cyfr danej liczby oraz z 4 elementów równych 0.

W tym celu najpierw z kolejnych cyfr takiej 7-cyfrowej liczby naturalnej tworzymy 7-elementową permutację, do której dopisujemy cztery elementy równe 0 według zasad podanych w poniższych punktach:

- (1) wstawiamy po jednym zerze między każde dwa elementy nieparzyste, które są zapisane obok siebie – jeżeli w ten sposób wstawiliśmy cztery zera, to procedurę uzupełniania kończymy, w przeciwnym przypadku przechodzimy do kolejnego punktu;
- (2) jeżeli pierwszym elementem jest cyfra nieparzysta, to wstawiamy przed nim element 0 – jeżeli po wykonaniu tego kroku permutacja liczy 11 elementów, to procedurę uzupełniania kończymy, w przeciwnym przypadku jako ostatni, jedenasty element permutacji wstawiamy 0.

Rozpatrzmy z kolei 11-elementową **permutację** $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11})$, w której:

- na 5 miejscach o indeksach parzystych rozmieszczamy cyfry ze zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ (można to zrobić na $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ sposobów),
- na wybranych dwóch spośród 6 miejsc o indeksach nieparzystych rozmieszczamy elementy ze zbioru $\{1, 2\}$ (można to zrobić na $\binom{6}{2} \cdot 2! = 6 \cdot 5 = 30$ sposobów),
- na każdym spośród 4 pozostałych miejsc wstawiamy 0 (co można zrobić na 1 sposób).

Korzystając z **reguły mnożenia** stwierdzamy, że wszystkich takich **permutacji** jest $5! \cdot 6 \cdot 5 = 120 \cdot 30 = 3600$.

Zauważmy, że po usunięciu zer z tak otrzymanej **permutacji** dostaniemy 7-elementową **permutację**, której kolejne elementy tworzą liczbę 7-cyfrową spełniającą warunki zadania.

Pokazaliśmy w ten sposób, że każdej liczbie 7-cyfrowej spełniającej warunki zadania odpowiada dokładnie jedna permutacja 11-elementowa, w której na 5 miejscach o numerach parzystych rozmieszczone są elementy ze zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, a na pozostałych miejscach rozmieszczone są: 1, 2 i cztery zera.

Wynika stąd, że wszystkich 7-cyfrowych liczb naturalnych, które spełniają warunki zadania jest 3600.

Przykład 2

Rozpatrujemy wszystkie **permutacje** siedmioelementowego zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Obliczymy, ile jest wśród utworzonych ciągów takich, w których iloczyn każdych dwóch kolejnych elementów jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie

Zauważmy, że permutacja danego zbioru spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy żadne dwa spośród jej sąsiednich elementów nie są liczbami nieparzystymi. Należy więc rozdzielić elementy 3, 5, 7 używając do tego elementów $\{2, 4, 6, 8\}$.

Postępujemy podobnie, jak w poprzednim przykładzie.

Rozpatrujemy 9-elementową **permutację** $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$, w której:

- na 4 miejscach o indeksach parzystych rozmieszczamy cyfry ze zbioru $\{2, 4, 6, 8\}$ (można to zrobić na $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby),
- na wybranych trzech spośród 5 miejsc o indeksach nieparzystych rozmieszczamy elementy ze zbioru $\{3, 5, 7\}$ (można to zrobić na $\binom{5}{3} \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sposobów),
- na każdym spośród 2 pozostałych miejsc wstawiamy 0 (co można zrobić na 1 sposób).

Korzystając z **reguły mnożenia** stwierdzamy, że wszystkich takich **permutacji** jest $4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \cdot 60 = 1440$.

Na koniec zauważamy, że każdej **permutacji** spełniającej warunki zadania można wzajemnie jednoznacznie przypisać ciąg 11-elementowy, który tworzymy w sposób opisany powyżej.

Oznacza to, że jest 1440 wszystkich **permutacji** siedmioelementowego zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, w których iloczyn każdych dwóch kolejnych elementów jest liczbą parzystą.

Przykład 3

Z wyrazów 10-elementowego zbioru $\{a, d, e, l, o, p, r, t, u, x\}$ tworzymy dziesięcioliterowy ciąg, którego elementy się nie powtarzają. Obliczymy, ile jest takich ciągów, w których żadne dwie samogłoski (czyli elementy zbioru $\{a, e, o, u\}$) nie są zapisane na sąsiednich miejscach.

Uwaga. Przykładowym ciągiem spełniającym warunki zadania jest $(l, u, x, t, o, r, p, e, d, a)$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że permutacja zbioru $\{a, d, e, l, o, p, r, t, u, x\}$ spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy rozdzielimy 4 elementy: a, e, o, u , używając do tego 6 elementów: d, l, p, r, t, x .

Postępujemy podobnie, jak w poprzednich przykładach.

Rozpatrujemy 13-elementową **permutację** $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{13})$, w której:

- na 6 miejscach o indeksach parzystych rozmieszczamy litery ze zbioru $\{d, l, p, r, t, x\}$ (możemy to zrobić na $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ sposobów),
- na wybranych czterech spośród 7 miejsc o indeksach nieparzystych rozmieszczamy elementy ze zbioru $\{a, e, o, u\}$ (można to zrobić na $\binom{7}{4} \cdot 4! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ sposobów),
- na każdym spośród 3 pozostałych miejsc wstawiamy 0 (co można zrobić na 1 sposób).

Korzystając z **reguły mnożenia** stwierdzamy, że wszystkich tak utworzonych **permutacji** jest $6! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840 \cdot 720 = 604800$.

Ostatecznie zauważamy, że każdemu ciągowi spełniającemu warunki zadania można wzajemnie jednoznacznie przypisać 13-elementową **permutację**, którą tworzymy w sposób opisany powyżej.

Oznacza to, że jest 604800 wszystkich **permutacji** 10-elementowego zbioru $\{a, d, e, l, o, p, r, t, u, x\}$, w których żadne dwie samogłoski nie są zapisane na sąsiednich miejscach.

Przykład 4

Grupę 16 osób, wśród których jest 10 dorosłych oraz sześcioro dzieci: Ania, Basia, Czarek, Damian, Ewa i Franek, należy rozsadzić w rzędzie, w którym jest 16 miejsc siedzących. Rozpatrujemy wszystkie takie sposoby rozmieszczenia tej grupy osób, aby każde z dzieci siedziało pomiędzy dorosłymi.

Wykażemy, że liczba otrzymanych w ten sposób rozmieszczeń jest większa niż $2 \cdot 10^{11}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że rozmieszczenie opisanej w treści zadania grupy 16 osób spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy rozdzielimy każde spośród 6 dzieci sadzając je między dorosłymi w taki sposób, żeby żadne z dzieci nie zajęło żadnego z dwóch skrajnych miejsc.

Aby to osiągnąć zmodyfikujemy pomysły omówione w poprzednich przykładach.

Rozpatrujemy 19-elementową **permutację** $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{19})$, w której:

- na 10 miejscach o indeksach nieparzystych rozmieszczamy wszystkich dorosłych (możemy to zrobić na $10!$ sposobów),
- na wybranych sześciu spośród 9 miejsc o indeksach parzystych rozmieszczamy 6 dzieci (można to zrobić na $\binom{9}{6} \cdot 6! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ sposobów),
- każde spośród 3 pozostałych miejsc pozostawiamy puste.

Korzystając z **reguły mnożenia** stwierdzamy, że wszystkich tak utworzonych **permutacji** jest

$$10! \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 219469824000.$$

Na koniec zauważmy, że jeżeli z rozpatrywanej powyżej **permutacji** 19-elementowej usuniemy elementy puste, a następnie ponumerujemy od 1 do 16 kolejne elementy tak otrzymanej permutacji 16-elementowej, to w ten sposób przydzielimy każdej z osób rozpatrywanego zbioru unikalny numer miejsca w rzędzie, a także spełnione będą warunki zadania.

Oznacza to, że jest 219469824000 wszystkich takich rozmieszczeń omawianej grupy 16 osób, że każde z dzieci będzie siedziało pomiędzy dorosłymi.

Ostatecznie stwierdzamy, że $219469824000 > 200000000000 = 2 \cdot 10^{11}$.

W ten sposób zakończyliśmy dowód.

Słownik

permutacja zbioru n -elementowego

każdy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru n -elementowego

liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego

liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest równa $P_n = n!$

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga

– na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej prezentacją multimedialną. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania dotyczącego rozmieszczeń liczb ze zbioru

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, w dwóch rzędach po cztery liczby.

Pokazane jest w niej w jaki sposób można obliczyć, ile wśród tych rozmieszczeń jest takich, w których żadne dwie liczby parzyste nie sąsiadują ze sobą.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DoR2fDIdS>

Polecenie 2

W grupie 12 osób jest 10 dorosłych oraz dwoje dzieci: Jaś i Małgosia.

Całą tę 12-osobową grupę ustawiamy na trzy różne sposoby:

- (1) w dwóch szeregach po 6 osób,
- (2) w trzech szeregach po 4 osoby,
- (3) w czterech szeregach po 3 osoby.

Ile jest w każdym z tych trzech przypadków wszystkich możliwych ustawień takich, że Jaś i Małgosia nie stoją obok siebie?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rozpatrujemy 7-elementowe ciągi utworzone z liczb siedmioelementowego zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, w których żaden element się nie powtarza. Oblicz, w ilu spośród tych ciągów żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami.

☐ $5! \cdot 2 \cdot 1$

☐ $4! \cdot 4 \cdot 3$

☐ $4! \cdot 5 \cdot 4$

☐ $5! \cdot 6 \cdot 5$

Ćwiczenie 2



Rozpatrujemy wszystkie ośmiocyfrowe liczby naturalne zapisane za pomocą cyfr z ośmioelementowego zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, w których cyfry nie powtarzają się. Oblicz, ile jest wśród nich takich liczb, w których iloczyn każdych dwóch sąsiednich cyfr jest liczbą niepodzielną przez 9.

Odp.

Ćwiczenie 3



W grupie 9 osób jest 7 dziewczynek oraz dwóch chłopców: Bolek i Lolek. Całą tę 9-osobową grupę ustawiamy w trzech szeregach po 3 osoby. Ile jest wszystkich możliwych ustawień takich, że Bolek i Lolek nie stoją obok siebie?

☐ $7! \cdot 58$

☐ $7! \cdot 60$

☐ $7! \cdot 49$

☐ $7! \cdot 56$

Ćwiczenie 4



Rozpatrujemy ośmioliterowe ciągi utworzone z wyrazów ośmioelementowego zbioru $A = \{o, s, t, u, w, x, y, z\}$, w których elementy się nie powtarzają. Oznaczmy przez k liczbę tych spośród rozpatrywanych ciągów, w których każda samogłoska sąsiaduje zarówno z lewej jak i z prawej strony ze spółgłoską. Wynika stąd, że

☐ $k < 3000$

☐ $k < 14000$

☐ $k > 14000$

☐ $k \leq 14400$

Ćwiczenie 5



Dane są zbiory:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11\},$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 14\}.$$

Oznaczamy:

przez a – liczbę wszystkich permutacji zbioru A , w których iloczyn każdych dwóch kolejnych elementów jest liczbą parzystą,

przez b – liczbę wszystkich permutacji zbioru B , w których iloczyn każdych dwóch kolejnych elementów jest liczbą parzystą,

przez c – liczbę wszystkich permutacji zbioru C , w których iloczyn każdych dwóch kolejnych elementów jest liczbą parzystą,

przez d – liczbę wszystkich permutacji zbioru D , w których iloczyn każdych dwóch kolejnych elementów jest liczbą parzystą.

Odszukaj pary równych liczb.

a

$$4! \cdot 3!$$

d

$$120 \cdot 4!$$

b

$$(4!)^2 \cdot 25$$

c

$$(4!)^2 \cdot 2$$

Ćwiczenie 6



Miejsca siedzące w auli szkolnej podzielone są na rzędy, przy czym w rzędzie najbliższej sceny jest 10 miejsc. Miejsca w tym rzędzie należy przydzielić 10 osobom, wśród których jest 6 chłopców oraz 4 dziewczynki: Ania, Basia, Ewa i Ola. Oznaczmy przez n liczbę wszystkich takich rozmieszczeń tych 10 osób, w których żadne dwie osoby z grupy: Ania, Basia, Ewa, Ola nie będą siedziały na sąsiednich miejscach.

Zakoduj poniżej kolejno, od lewej cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $\frac{n}{100}$.

Odp. .

Ćwiczenie 7



Na przedstawienie do teatrzyku wybrała się grupa przedszkolaków: 11 dziewczynek i 7 chłopców, wraz z dwiema opiekunkami. Dostali oni bilety w tym samym rzędzie, w którym jest 20 miejsc. Panie opiekunki planują zająć 2 skrajne miejsca (pierwsze i dwudzieste), a na pozostałych chcą rozsadzić dzieci tak, żeby żadnych dwóch chłopców nie siedziało obok siebie.

Wynika stąd, że liczba wszystkich możliwych rozmieszczeń dzieci według pomysłu pań opiekunek jest równa

☐ $11 \cdot 7! \cdot 2$

☐ $\frac{11! \cdot 12!}{5!} \cdot 2$

☐ $11! \cdot 7! \cdot 791 \cdot 2$

☐ $11! \cdot 7! \cdot 2$

Ćwiczenie 8



Liczby z 9-elementowego zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ rozmieszczamy (bez powtórzeń) w trzech rzędach po trzy liczby. Oblicz, w ilu spośród tych rozmieszczeń żadne dwie liczby parzyste nie sąsiadują ze sobą.

Odp.

Ćwiczenie 9



Oznaczamy:

przez n - liczbę tych permutacji zbioru $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 31, 32, 33\}$, w których iloczyn każdych dwóch sąsiednich wyrazów nie jest kwadratem liczby całkowitej,

przez k - liczbę tych permutacji zbioru $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19\}$, w których iloczyn każdych dwóch sąsiednich wyrazów nie jest dzielnikiem liczby 240.

Wówczas:

☐ $\frac{n}{8!} + \frac{k}{7!} > 7$

☐ $\frac{7!}{k} > \frac{5! \cdot 6!}{n}$

☐ $\frac{4! \cdot n}{9!} - \frac{k}{(5!)^2} > 10$

☐ $\frac{n}{7!} + \frac{k}{6!} < 51$

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Modele kombinatoryczne z rozdzielanymi elementami

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne

Uczeń:

- wykorzystuje modelowanie z rozdzielanymi elementami do rozwiązywania zadań polegających na zliczaniu liczby permutacji zbioru, w której wyróżnione elementy tego zbioru nie mogą sąsiadować ze sobą,
- opisuje typowe modele kombinatoryczne z obiektami z rozdzielanymi elementami.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Prezentacja multimedialna”. Następnie uczniowie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji

„Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują polecenia związane z medium w sekcji „Prezentacja multimedialna”.

Materiały pomocnicze:

[Reguła mnożenia, reguła dodawania](#)

Wskazówki metodyczne:

- Prezentacja multimedialna może zostać wykorzystana na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Modele kombinatoryczne z rozdzielanymi elementami”.