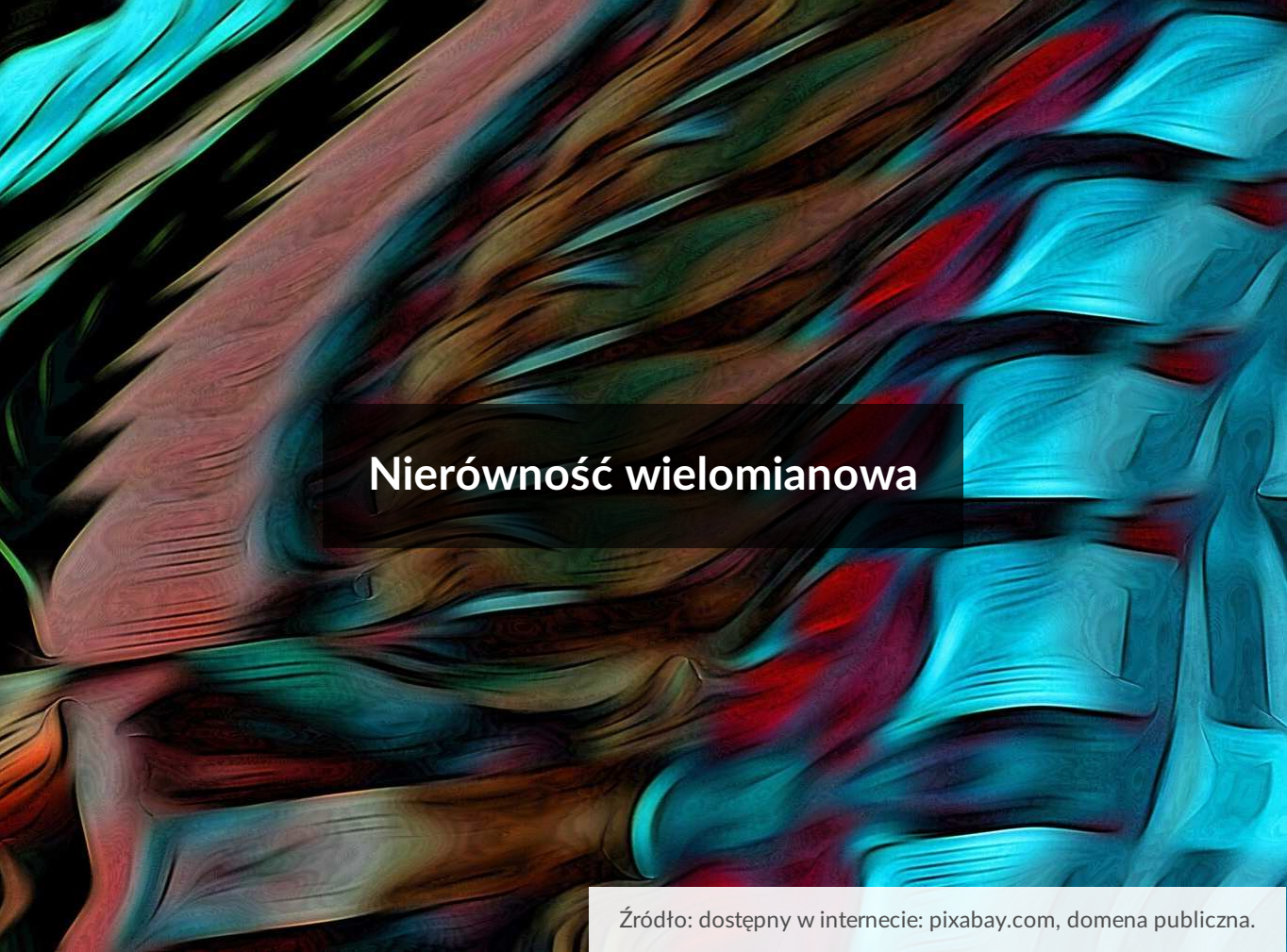


Nierówność wielomianowa

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Nierówność wielomianowa

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Rozwiązywanie nierówności liniowych, kwadratowych oraz nierówności wyższych stopni umożliwia nam dokonywanie opisu zjawisk współczesnego świata. Dzięki rozwiązaniom możemy modelować rzeczywistość i dostosować ją do naszych potrzeb.

W tym materiale zapoznasz się z definicją nierówności wielomianowej i sposobami jej rozwiązania. Pokażemy zasadnicze różnice między rozwiązaniem równania i obliczeniem zbioru rozwiązań nierówności.

Twoje cele

- Opiszysz za pomocą nierówności sytuację przedstawioną słownie.
- Rozwiążesz prostą nierówność wielomianową różnymi metodami.

Przeczytaj

Definicja: Nierówność wielomianowa

Nierównością wielomianową stopnia n nazywamy każdą nierówność postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0,$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n .

Aby rozwiązać nierówność wielomianową, postępujemy podobnie, jak podczas rozwiązywania równań. Najpierw można np. rozłożyć wielomian $W(x)$ na czynniki i obliczyć jego pierwiastki.

Następnie należy odpowiedzieć na pytanie, dla jakich wartości x wielomian przyjmuje wartości dodatnie lub nieujemne lub ujemne lub niedodatnie. W tym celu sporządzamy „siatkę znaków” lub metodą graficzną określamy znaki wielomianu w poszczególnych przedziałach.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $(x - 1)(x + 3)(x + 5) \geq 0$ metodą „siatki znaków”.

Lewa strona nierówności jest wielomianem zapisanym w postaci iloczynowej

$$W(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 5).$$

Wielomian posiada trzy pierwiastki $-5, -3, 1$.

Narysujemy tabelę, znaną jako „siatka znaków”.

W pierwszej kolumnie zapisujemy czynniki wielomianu, a w pierwszym wierszu zapisujemy przedziały liczbowe, które są wyznaczone przez pierwiastki wielomianu.

W kolumnach zapisujemy znaki przyjmowane w poszczególnych przedziałach przez odpowiednie sumy algebraiczne.

Ostatni wiersz tabeli to znaki wielomianu.

	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, \infty)$
$x - 1$	–		–		–	0	+
$x + 3$	–		–	0	+		+
$x + 5$	–	0	+		+		+

$W(x)$	-	0	+	0	-	0	+
--------	---	---	---	---	---	---	---

$$W(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -5, -3 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $\langle -5, -3 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $x(x - 1)(x + 2) < 0$, wykorzystując wykres funkcji wielomianowej.

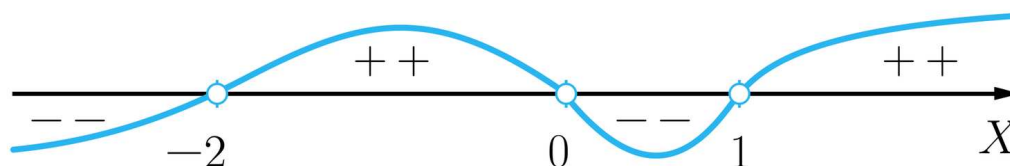
$$\text{Niech } y = x(x - 1)(x + 2).$$

Funkcja ma trzy pojedyncze miejsca zerowe $-2, 0, 1$.

Aby wykonać szkic wykresu funkcji, zaznaczamy na osi liczbowej miejsca zerowe.

Wykres rozpoczynamy od prawej strony i od góry, ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze niewiadomej jest dodatni ($1 > 0$).

Wykres ma kształt „wężyka”, który spotykając się z pierwiastkiem pojedynczym „przechodzi” na drugą stronę osi X .



$$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $5x^4 - 20x^2 \leq 0$ metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias i wykorzystania wzoru skróconego mnożenia.

$$5x^4 - 20x^2 \leq 0$$

Wyłączymy przed nawias jednomian $5x^2$.

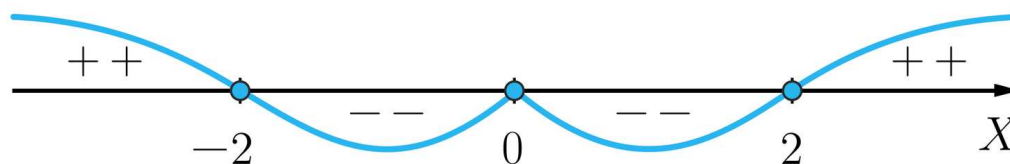
$$5x^2(x^2 - 4) \leq 0$$

$$5x^2(x-2)(x+2) \leq 0$$

Wyznamy miejsca zerowe wielomianu.

$$5x^2 = 0 \text{ lub } x - 2 = 0 \text{ lub } x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ (podwójny) lub } x = 2 \text{ lub } x = -2$$



$$x \in \langle -2, 2 \rangle$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -2, 2 \rangle$.

Przykład 4

Rozwiążemy **nierówność wielomianową** $x^3 + x^2 - x - 1 \leq 0$ metodą grupowania wyrazów.

$$x^3 + x^2 - x - 1 \leq 0$$

$$x^2(x+1) - (x+1) \leq 0$$

$$(x+1)(x^2-1) \leq 0$$

$$(x+1)(x+1)(x-1) \leq 0$$

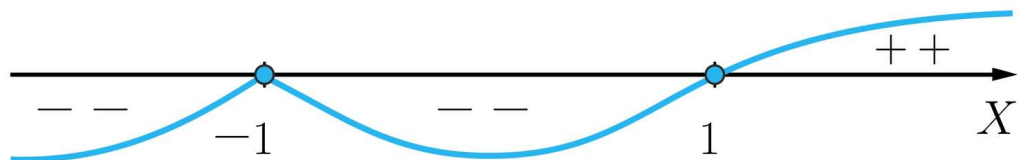
$$(x+1)^2(x-1) \leq 0$$

Obliczamy pierwiastki wielomianu $W(x) = (x+1)^2(x-1)$.

$$(x+1)^2(x-1) = 0$$

$$(x+1)^2 = 0 \text{ lub } x - 1 = 0$$

$$x = -1 \text{ (podwójny) lub } x = 1$$



$$x \in (-\infty, 1)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty, 1)$.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność $81x^4 - 1 \geq 0$, rozkładając lewą stronę nierówności na czynniki za pomocą wzorów skróconego mnożenia.

$$81x^4 - 1 \geq 0$$

Wykorzystamy wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

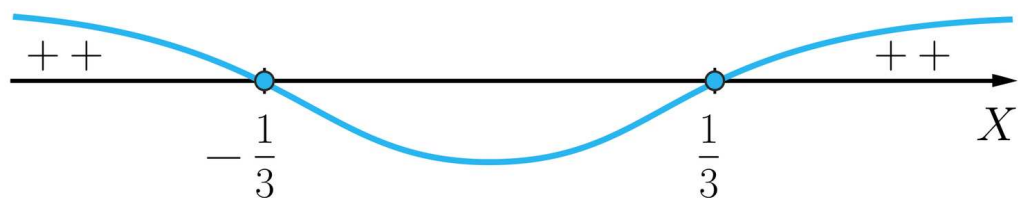
$$(9x^2 - 1)(9x^2 + 1) \geq 0$$

$$(3x - 1)(3x + 1)(9x^2 + 1) \geq 0$$

Obliczymy miejsca zerowe wielomianu $W(x) = (3x - 1)(3x + 1)(9x^2 + 1)$.

$$(3x - 1)(3x + 1)(9x^2 + 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ lub } x = -\frac{1}{3}, (9x^2 + 1) > 0 \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{R}$$



$$x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$.

Przykład 6

Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych dodatnich jest mniejszy lub równy 6. Jakie to liczby?

Kolejne liczby naturalne to $x, x + 1, x + 2, x \in \mathbb{N}_+$. Zapiszemy i rozwiążemy nierówność.

$$x(x + 1)(x + 2) \leq 6$$

$$x(x^2 + 2x + x + 2) \leq 6$$

$$x(x^2 + 3x + 2) \leq 6$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 6 \leq 0$$

Zastosujemy metodę grupowania wyrazów. W tym celu zapiszemy nierówność w postaci równoważnej.

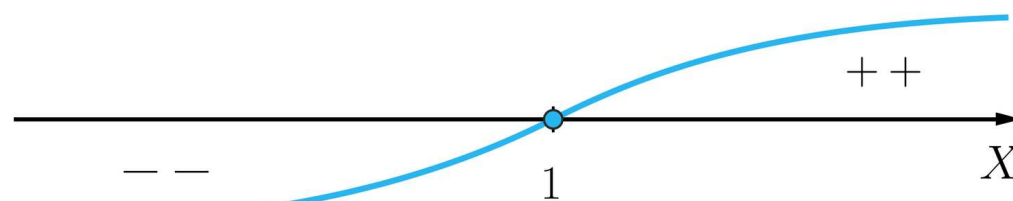
$$x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 6x - 6 \leq 0$$

$$x^2(x - 1) - 4x(x - 1) + 6 \cdot (x - 1) \leq 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 4x + 6) \leq 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ lub } x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 6 = 16 - 24 = -8 < 0 \text{ (brak rozwiązań)}$$



$$x \in (-\infty, 1)$$

Uwzględniając warunki zadania $x = 1$.

$$x + 1 = 2$$

$$x + 2 = 3$$

Szukane liczby to 1, 2, 3. Są to jedyne liczby naturalne dodatnie spełniające warunki zadania.

Słownik

nierówność wielomianowa

każda nierówność postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Najpierw spróbuj samodzielnie rozwiązać zadanie, a następnie przeanalizuj sposób obliczenia szukanych liczb zapisany w galerii zdjęć interaktywnych i porównaj ze swoim rozwiązaniem.

Polecenie 2

Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest mniejszy lub równy od 105 . Jakie to liczby?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Nierówność wielomianowa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje proste nierówności wielomianowe różnymi metodami
- opisuje za pomocą nierówności sytuację przedstawioną słownie
- tworzy procedury budowy nierówności wielomianowej

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych zależności dających się zapisać w postaci nierówności wielomianowej.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów różnych nierówności. Następnie stara się podzielić nierówności na grupy, według własnych kryteriów.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy, dyskutują i porównują dokonane podziały. Tworzą wspólny schemat ilustrujący rodzaje nierówności ze względu na liczbę niewiadomych i stopień nierówności, podział na nierówności liniowe, kwadratowe i wielomianowe stopnia wyższego niż 2.
3. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i analizują ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi za pomocą rozmowy nauczającej.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące określania rodzaju nierówności ze względu na liczbę niewiadomych, stopień nierówności, podział na nierówności liniowe, kwadratowe i wielomianowe stopnia wyższego niż 2.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Równania i nierówności liczbowe. Przedziały liczbowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Galeria zdjęć interaktywnych może być wykorzystana do pracy na zajęciach pokazujących zastosowanie rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki .