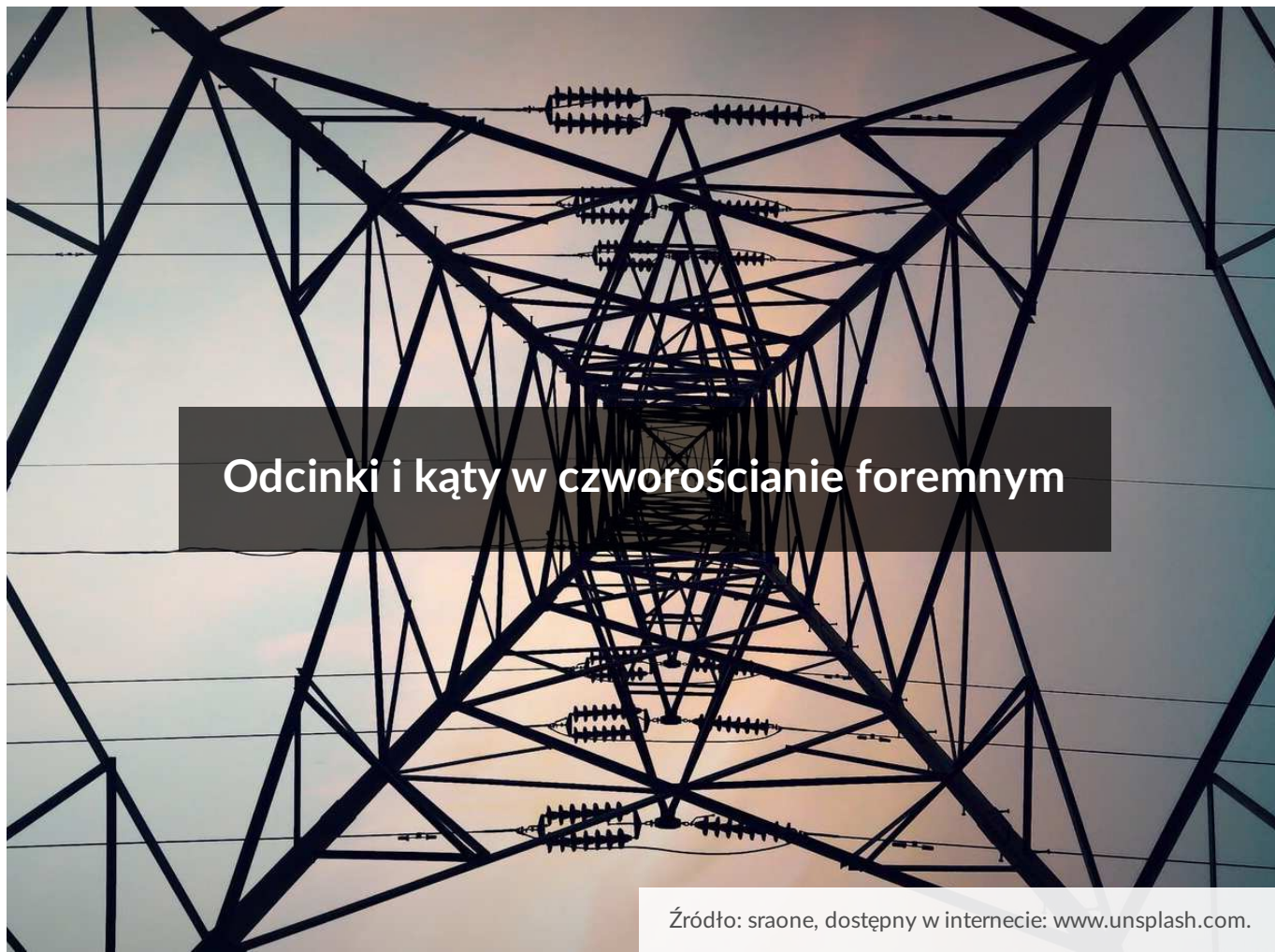




## Odcinki i kąty w czworobłacie foremnym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Odcinki i kąty w czworóścianie foremnym

Źródło: sraone, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com).

Znasz już pojęcie czworóścianu oraz jego własności. W tym materiale celem naszym jest zaznajomienie się z wyróżnionym rodzajem czworóścianu, a mianowicie czworóścianem foremnym. Ponadto zamysłem naszym jest nauczenie wyznaczania pola powierzchni i objętości tej bryły geometrycznej. Nim jednak to nastąpi, zaznajomimy czytelnika z podstawową teorią.

### Twoje cele

- Poznasz definicję czworóścianu foremnego, jego kształt i siatkę.
- Wyznaczysz kąty i odcinki w czworóścianie foremnym.

# Przeczytaj

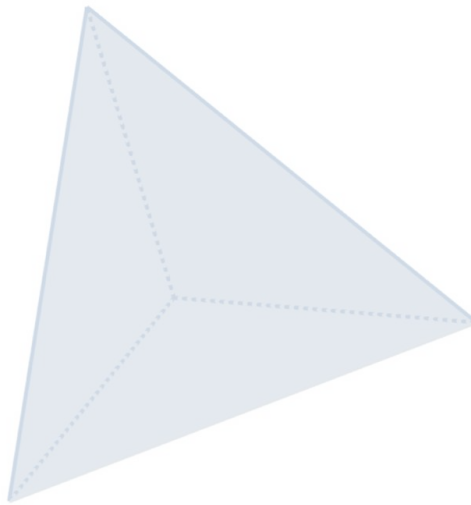
---

## Definicja: Czworóścian foremny

Definicja czworóścianu foremnego jest podobna do definicji zwykłego czworóścianu, a zatem jest to bryła przestrzenna, dokładniej ostrosłup trójkątny, czyli jest to wielościan o czterech ścianach będących trójkątami, jednak tym razem wszystkie ściany bryły są przystającymi trójkątami równobocznymi. Podobnie jak zwykły ostrosłup trójkątny, czworóścian foremny posiada:

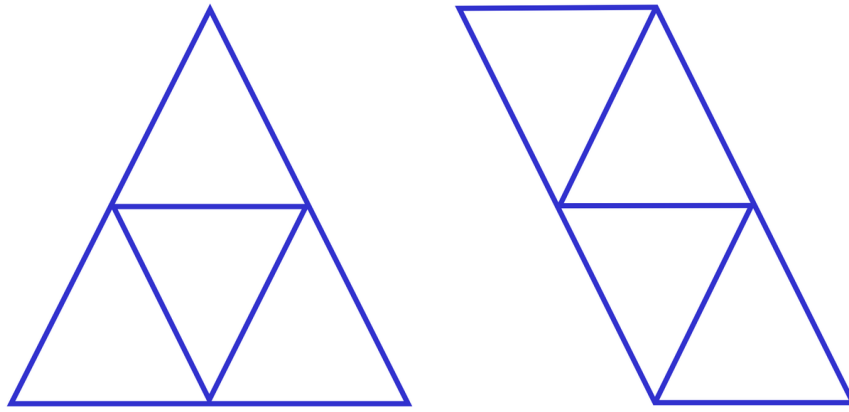
- 6 krawędzi,
- 4 wierzchołki.

Czworóścian foremny może wyglądać następująco:



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D12e1wOKD>

Będąc w tematyce brył geometrycznych nie sposób nie wspomnieć o [siatkach brył](#), które omawiamy. Skoro na czworóścian składają się przystające trójkąty równoboczne, zatem siatka może mieć następującą postać:



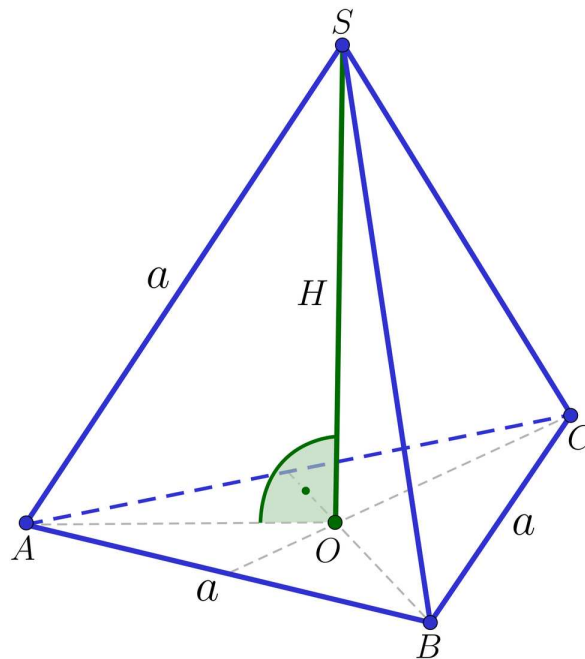
Widzimy, że złożona jest z 4 trójkątów równobocznych ułożonych w taki sposób, aby bez „rozcinania” dało się złożyć z niej omawianą bryłę. Przypomnijmy, że wysokość ściany bocznej czworościanu foremnego o krawędzi  $a$  wynosi  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

### Przykład 1

Udowodnij, że dla czworościanu foremnego o długości krawędzi równej  $a$  jego wysokość jest wyrażona wzorem:  $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

### Rozwiązanie:

Niech podstawą naszego czworościanu foremnego będzie trójkąt  $ABC$ , natomiast  $S$  będzie czwartym wierzchołkiem bryły. Ponadto niech  $O$  będzie spodkiem wysokości  $H$  opuszczonej z wierzchołka  $S$ .



Zauważamy, że punkt  $O$  jest także środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

Zatem:

$$|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Rozpatrując teraz trójkąt prostokątny  $AOS$ , mamy:

$$|AO|^2 + |OS|^2 = |AS|^2$$

Po podstawieniu odpowiednich wielkości:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + H^2 = a^2$$

Skąd:

$$H^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9}$$

zatem:

$$H^2 = \frac{6a^2}{9}$$

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

## Przykład 2

Z drutu o długości 1, 2 m zbudowano szkielet czworościanu foremnego. Obliczmy długość krawędzi czworościanu.

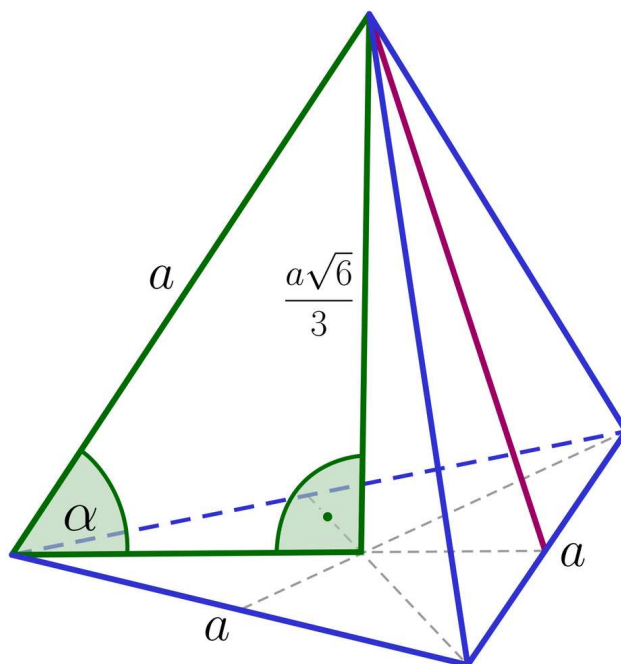
### Rozwiązanie:

Czworościan foremny ma sześć krawędzi tej samej długości, więc długość jednej krawędzi to jedna szósta ze 120 cm, tj. 20 cm.

## Przykład 3

Wyznamy kąt między krawędzią boczną czworościanu foremnego a płaszczyzną jego podstawy.

### Rozwiązanie:

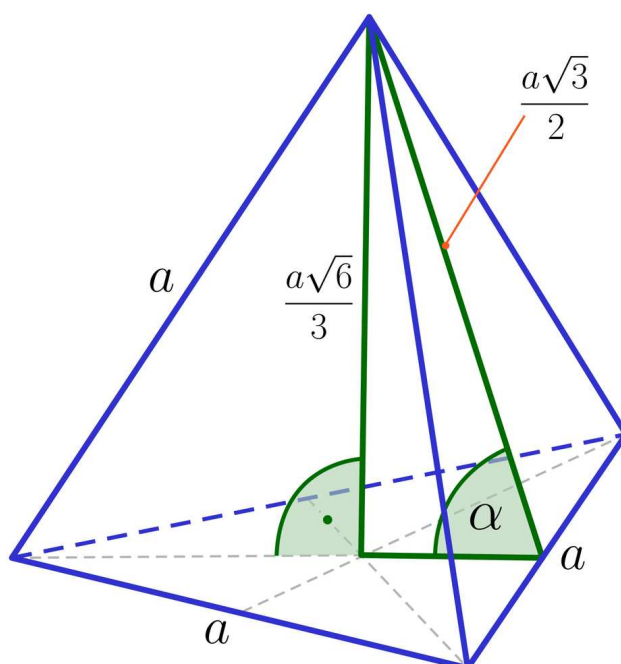


Korzystając z oznaczeń na rysunku widzimy, że  $\sin \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,82$ , więc  $\alpha \approx 55^\circ$ .

#### Przykład 4

Wyznamy kąt między wysokością ściany bocznej czworościanu foremnego a płaszczyzną jego podstawy.

**Rozwiązanie:**

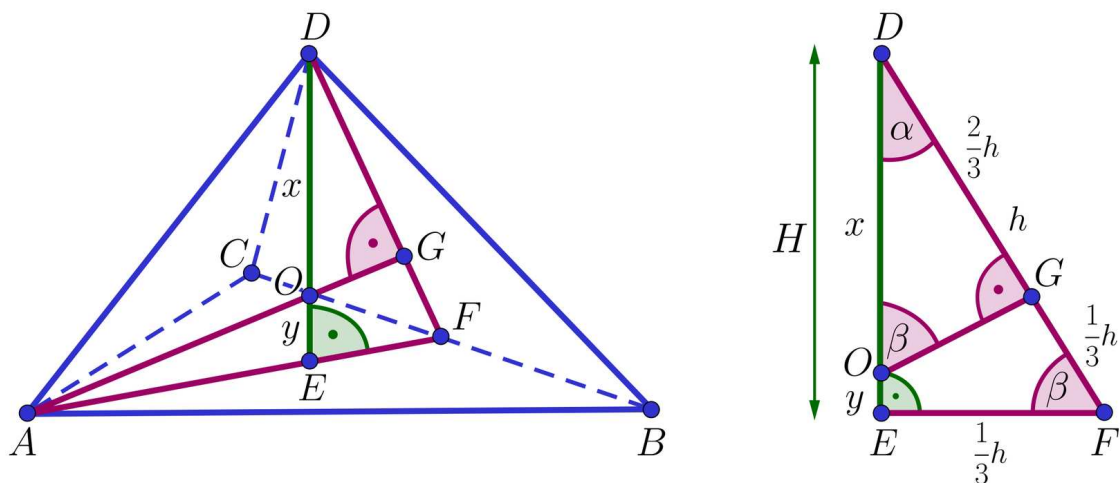


Korzystając z oznaczeń na rysunku widzimy, że  $\sin \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94$ , więc  $\alpha \approx 70^\circ$ .

### Przykład 5

Wyznamy, w jakim stosunku punkt przecięcia wysokości czworościanu dzieli każdą z tych wysokości.

**Rozwiązanie:**



Punkt  $O$  jest punktem przecięcia się wysokości  $AG$  i  $DE$  czworościanu  $ABCD$ .

$AG$  i  $DE$  – wysokości czworościanu foremnego  $ABCD$ ,  $|AG| = H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ,

$AF$  i  $DF$  – wysokości ścian bocznych czworościanu foremnego  $ABCD$ , trójkątów równobocznych o bokach długości  $a$ ,  $|AF| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Niech  $x$  oznacza długość odcinka  $DO$ , a  $y = H - x$ .

Trójkąty  $DEF$  i  $DGO$  są trójkątami prostokątnymi posiadającymi wspólny kąt  $\alpha$ . Zachodzi więc  $\frac{x}{\frac{2}{3}h} = \frac{h}{H}$ , czyli

$$x = \frac{2}{3}h \cdot \frac{h}{H} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{a\sqrt{6}} = \frac{3a}{2\sqrt{6}} = \frac{3a\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \text{ Stąd}$$

$$y = H - x = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{4a\sqrt{6}}{12} - \frac{3a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

$$\text{Zatem } \frac{x}{y} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{12}} = \frac{3}{1}.$$

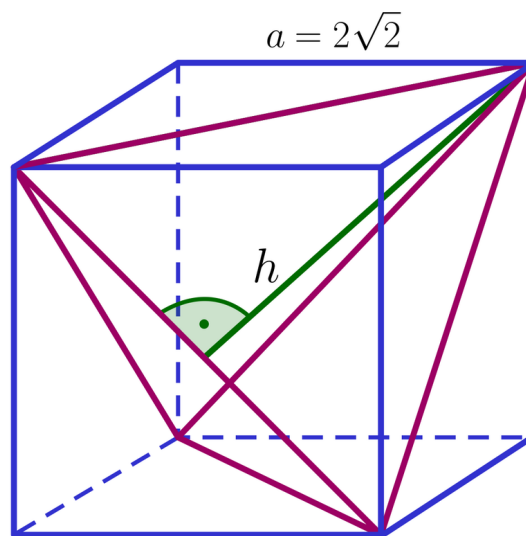
### Przykład 6

Czworościan foremny wpisano w sześcián o długości krawędzi  $2\sqrt{2}$  cm tak, że każda krawędź czworościanu jest przekątną ścian tego sześciánu. Obliczymy długość

wysokości ściany czworościanu.

**Rozwiązanie:**

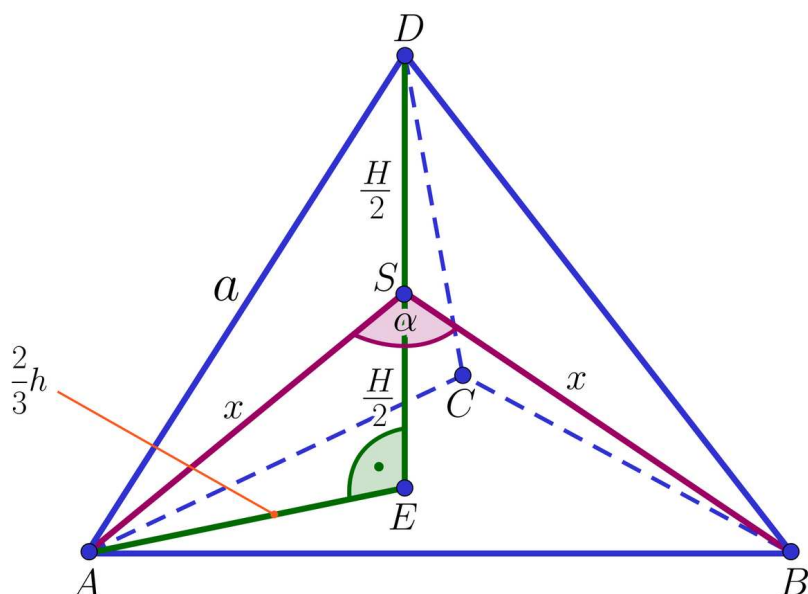
Oznaczmy długość krawędzi sześciangu przez  $a$ . Z treści zadania  $a = 2\sqrt{2}$ . Długość przekątnej ściany sześciangu obliczamy ze wzoru  $d = a\sqrt{2}$ . Stąd  $d = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$  cm. Ściany czworościanu foremnego są trójkątami równobocznymi o długości 4. Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego otrzymujemy  $h = \frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$  cm.



**Przykład 7**

W czworościanie foremnym o krawędzi długości  $a$  środek wysokości czworościanu połączono odcinkami z dwoma wierzchołkami nie należącymi do tej wysokości. Wyznamy kąt między tymi odcinkami.

**Rozwiązanie:**



Z warunków zadania wynika, że  $|DS| = |SE| = \frac{1}{2}H = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ . Długość odcinka  $|AE| = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Trójkąt  $AES$  jest trójkątem prostokątnym zatem, korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy  $x^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2$ . Stąd  $x^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{6a^2}{36} = \frac{12a^2}{36} + \frac{6a^2}{36} = \frac{a^2}{2}$ .

Stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta  $ASB$  otrzymujemy:

$a^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cos \alpha$ . Stąd  $\cos \alpha = \frac{2x^2 - a^2}{2x^2} = \frac{2\frac{a^2}{2} - a^2}{2\frac{a^2}{2}} = 0$ , czyli kąt  $\alpha = 90^\circ$ , a więc odcinki są prostopadłe względem siebie.

## Słownik

### czworościan foremny

bryła przestrzenna (ostrosłup trójkątny), wielościan o ścianach będących przystającymi trójkątami równobocznymi

### ostrosłup

bryła geometryczna, której wszystkie wierzchołki poza jednym leżą w jednej płaszczyźnie

### siatka bryły

przedstawienie bryły na płaszczyźnie, powstające poprzez „rozcięcie” niektórych jej krawędzi tak, aby dało się rozłożyć ściany na płaszczyźnie

# Animacja 3D

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją 3D, a następnie wykonaj polecenia pod nią.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D104a7npt>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego odcinków i kątów w czworościanie foremnym.

---

## Polecenie 2

Wyznacz długość krawędzi czworościanu dualnego do czworościanu o krawędzi  $a$ .

## Polecenie 3

Wyznacz stosunek pola ściany czworościanu dualnego do pola ściany czworościanu foremnego  $ABCD$  oraz stosunek objętości czworościanu dualnego do objętości czworościanu foremnego  $ABCD$ .

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Krawędź czworościanu foremnego ma długość  $6\sqrt{3}$  cm. Wyznacz długość wysokości tego czworościanu. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $6\sqrt{2}$  cm

☐  $3\sqrt{6}$  cm

☐  $6\sqrt{3}$  cm

☐  $2\sqrt{6}$  cm

## Ćwiczenie 2



Uzupełnij poniższe zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę.

Wysokość czworościanu foremnego ma długość  $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ , wtedy długość krawędzi tego czworościanu wynosi .

$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

6

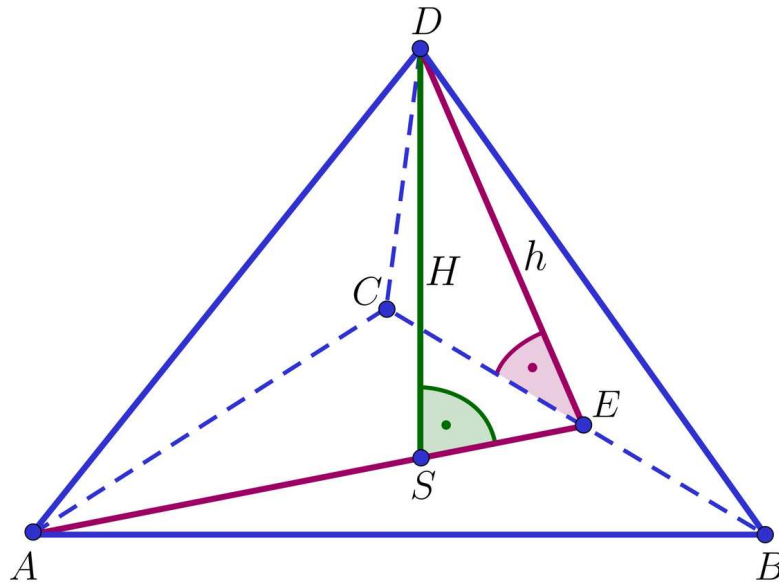
$\frac{\sqrt{3}}{2}$

4

### Ćwiczenie 3



Wyznacz sinus kąta dwuściennego między dwiema sąsiednimi ścianami w czworościanie foremnym przedstawionym na rysunku.



Zaznacz poprawną odpowiedź.

$\bigcirc \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\bigcirc \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\bigcirc \quad \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\bigcirc \quad \frac{1}{3}$

## Ćwiczenie 4



a) W czworokącie foremnym  $ABCD$  krawędź ma długość  $a$ . Wyznacz obwód czworokąta, którego wierzchołkami są środki krawędzi  $AB$ ,  $AC$ ,  $BD$  i  $CD$ .

b) Jakiego rodzaju jest to czworokąt?

### Ćwiczenie 5



Uzupełnij lukę w zdaniu, wpisując odpowiednią liczbę.

Długość łącznej sumy wszystkich długości krawędzi czworościanu foremnego wynosi 48, wtedy długość krawędzi czworościanu wynosi .

### Ćwiczenie 6



Czworościan foremny wpisano w sześcián o długości krawędzi  $2\sqrt{2}$  cm tak, że każda krawędź czworościanu jest przekątną ściany tego sześciánu. Oblicz długość wysokości ściany czworościanu.

### Ćwiczenie 7

Wyznacz odległość między dwiema krawędziami skośnymi czworościanu o krawędzi długości  $a$ .

### Ćwiczenie 8



Dokończ zdanie, wybierając poprawne odpowiedzi.  
Płaszczyzna symetrii czworościanu foremnego przechodzi przez:

☐ krawędź i wysokość czworościanu foremnego.

☐ krawędź i dwie wysokości ścian.

☐ krawędź.

☐ krawędź i tylko jedną wysokość ściany.

### Ćwiczenie 9



Krawędź czworościanu foremnego  $ABCS$  jest równa  $a$ . Oblicz pole przekroju bryły, który przechodzi przez krawędź  $CS$  i środek krawędzi  $AB$ .

## Ćwiczenie 10



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Łącząc ze sobą środki ciężkości sąsiednich ścian czworościanu foremnego o krawędzi długości  $a$  otrzymujemy nowy czworościan foremny o krawędzi długości:

☐  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

☐  $\frac{a}{3}$

☐  $\frac{a}{4}$

☐  $\frac{a}{2}$

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Beata Kuna

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Odcinki i kąty w czworościanie foremnym

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zakres rozszerzony.

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje obywatelskie.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wyznacza osie symetrii, osie obrotu i płaszczyzny symetrii czworościanu foremnego;
- wyznacza wzór na wysokość czworościan foremnego;
- wyznacza wzór na objętość czworościanu foremnego i znajduje relację między tą objętością, a objętością równoległościanu.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

### **Metody i techniki nauczania:**

- rozmowa kierowana;
- dyskusja.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie warunku istnienia trójkąta. Wyjaśnia, że analogiczny warunek można określić dla czworościanu i wyjaśnia definicję czworościanu foremego i trójkąta foremnego, będącego ścianą czworościanu.
2. Następnie wraz z uczniami określa cele i kryteria sukcesu.
3. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel z pomocą uczniów wyznacza wzór na wysokość czworościanu foremnego oraz miary kątów między krawędzią boczną i wysokością ściany bocznej a płaszczyzną podstawy.
2. Nauczyciel prosi uczniów o obejrzenie animacji 3D i wyobrażenie sobie położenia czworościanu dualnego a następnie z pomocą uczniów wyznacza długość krawędzi czworościanu dualnego.
3. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie ćwiczeń 1-5 z sekcji „Sprawdź się”.

#### **Faza podsumowująca:**

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem Przykładów i Ćwiczeń, które pojawiły się na lekcji.

**Praca domowa:**

- Uczniowie wykonują ćwiczenia 6-10 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- [Czworościan foremny](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Polecenia związane z animacją 3D można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału w temacie „Czworościan foremny” lub przygotowania do matury.