



Obraz okręgu w symetrii względem osi Y

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Obraz okręgu w symetrii względem osi Y

Źródło: Marcel Schreiber, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Symetria względem prostej zachowuje długość promienia przekształcanego okręgu – zatem przy wyznaczaniu jego obrazu musimy znaleźć jedynie obraz środka. Znalezienie obrazu okręgu w symetrii względem osi Y jest łatwe – wystarczy zmienić pierwszą współrzędną środka okręgu na liczbę przeciwną. Jeśli jako oś symetrii wybierzemy prostą równoległą do osi Y musimy zachować czujność – łatwo się pomylić! W tym materiale przybliżymy problem wyznaczania obrazu okręgu w symetrii względem osi Y oraz w symetrii względem prostej równoległej do osi Y .

Twoje cele

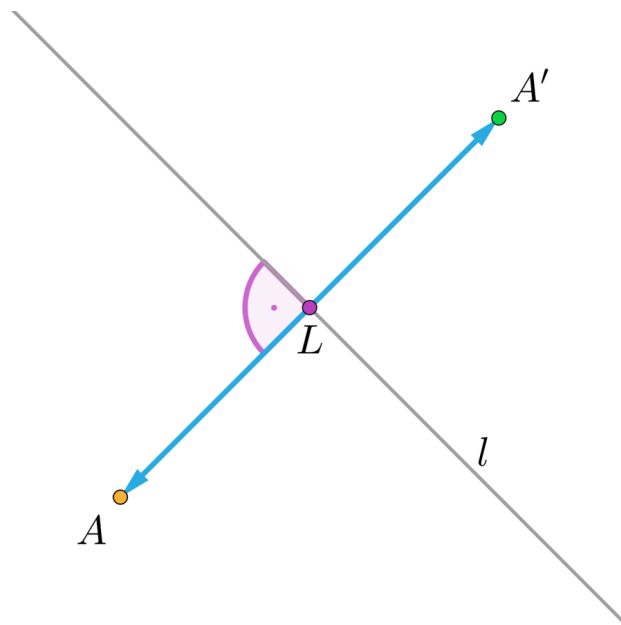
- Wyznaczysz równanie okręgu symetrycznego do danego względem osi Y .
- Wyznaczysz równanie okręgu symetrycznego do danego względem prostej równoległej do osi Y .
- Zastosujesz poznane zależności do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Przeczytaj

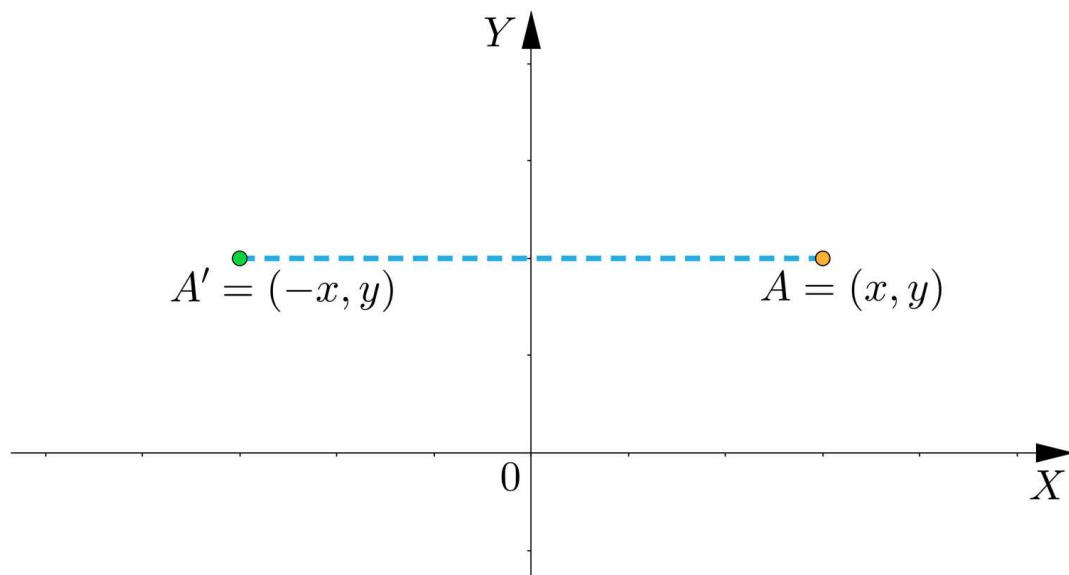
Przypomnimy pojęcie symetrii względem prostej.

Definicja: Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej l nazywamy przekształcenie geometryczne, w którym każdemu punktowi A , $A \notin l$, przyporządkowujemy taki punkt A' , dla którego prosta AA' jest prostopadła do prostej l i wektory $\overrightarrow{LA}$ oraz $\overrightarrow{LA'}$ są przeciwne i równej długości, gdzie punkt L jest punktem wspólnym prostej AA' i prostej l . Jeśli $A \in l$, to obrazem tego punktu w symetrii osiowej względem prostej l jest ten sam punkt. Symetrię osiową względem prostej l oznaczamy S_l .



Określimy zależności między współrzędnymi [punktów symetrycznych względem prostej](#) o równaniu $x = 0$ (oś Y):



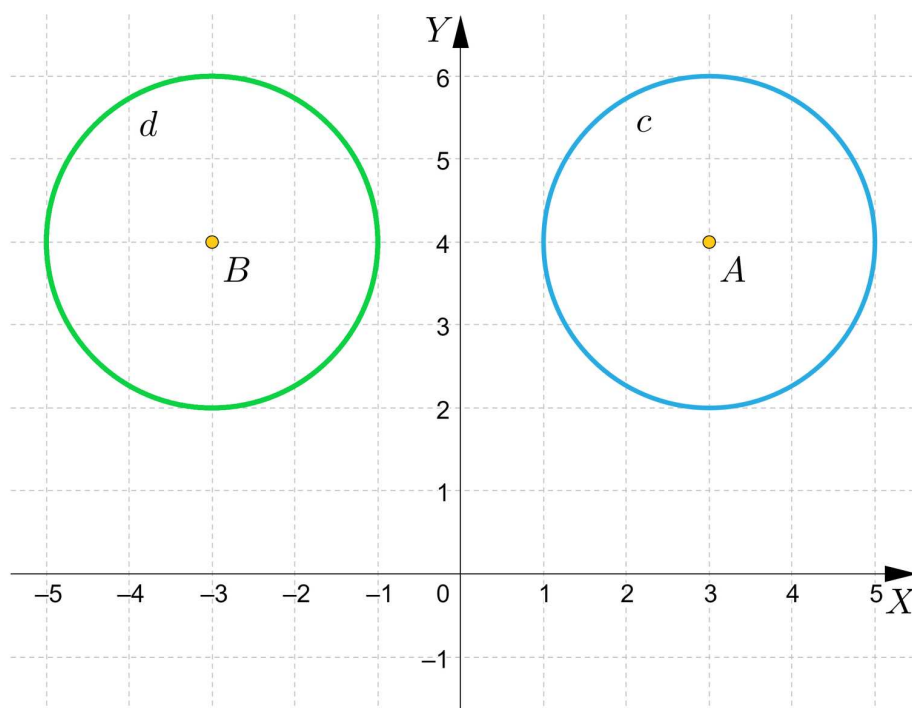
Zauważmy, że:

- odcięte punktów A i A' są liczbami przeciwnymi,
- rzędna punktu A' jest równa rzędnej punktu A .

Zatem:

$$S_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}.$$

Narysujemy teraz okręgi symetryczne względem osi Y .



Zauważmy, że ich promienie mają równe długości, a środki są **punktami symetrycznymi względem osi Y** .

Przykład 1

Wyznamy równanie obraz okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$ w symetrii osiowej względem osi Y .

Rozwiązanie:

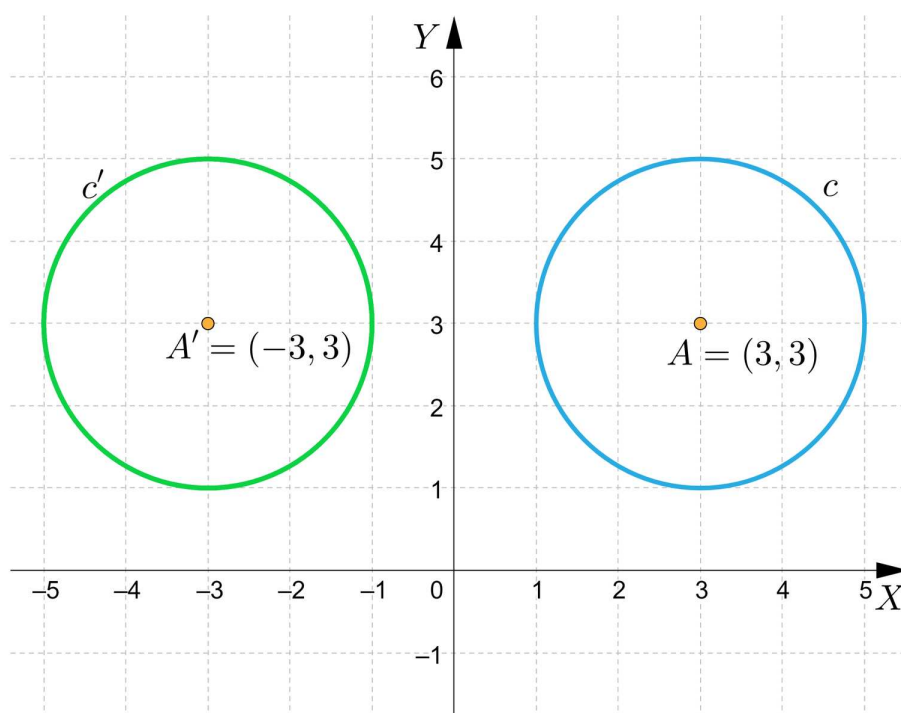
Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii osiowej względem osi Y jest punkt $A' = (-x, y)$. Zmieniając x na $(-x)$, otrzymujemy:

$$(-x - 3)^2 = (-(x + 3))^2 = (x + 3)^2.$$

Zatem równanie okręgu ma postać:

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

Poniższy rysunek przedstawia dany okrąg oraz jego obraz w symetrii osiowej względem osi Y .



Przykład 2

Napišemy równanie okręgu, którego obrazem w symetrii względem osi Y jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy zależności między współrzędnymi punktów symetrycznych względem osi Y . Zmieniając x na $(-x)$, otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0.$$

Przykład 3

Sprawdźmy czy okrąg o średnicy AB jest symetryczny do okręgu o średnicy CD względem osi Y , jeśli: $A = (0; 3)$; $B = (6; 1)$; $C = (-2; 5)$ i $D = (-4; -1)$.

Rozwiązanie:

Wyznamy współrzędne środków oraz długości promieni obydwu okręgów.

Dla okręgu o średnicy AB :

$$r_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(6-0)^2 + (1-3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{40} = \sqrt{10},$$

$$S_1 = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{3+1}{2} \right), \text{ czyli } S_1 = (3; 2).$$

Dla okręgu o średnicy CD :

$$r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(-4+2)^2 + (-1-5)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{40} = \sqrt{10},$$

$$S_2 = \left(\frac{-2-4}{2}, \frac{-1+5}{2} \right), \text{ czyli } S_2 = (-3, 2).$$

Promienie okręgów mają równe długości, a środki są punktami symetrycznymi względem osi Y , zatem okręgi są symetryczne względem osi Y .

Przykład 4

Wyznamy pole trójkąta ABC , jeśli A jest środkiem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$, B jest środkiem okręgu o' symetrycznego do danego okręgu względem osi Y , zaś C jest punktem wspólnym prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 7$ i okręgu o' o współrzędnych całkowitych.

Rozwiązanie:

Wyznamy najpierw współrzędne środka okręgu o równaniu:

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$. Skorzystamy z równania ogólnego okręgu:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (punkt $A = (a; b)$ jest jego środkiem, zaś promień r ma długość: $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$). Zatem:

$$-2a = 4, \text{ stąd } a = -2,$$

$$-2b = -6, \text{ stąd } b = 3,$$

$$r_1 = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 - 4} = \sqrt{4 + 9 - 4} = 3.$$

Ponieważ punkt B jest środkiem okręgu symetrycznego do danego okręgu względem osi Y , to $B = (2; 3)$ i $r_2 = 3$. Równanie tego okręgu ma postać: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$.

Wyznamy teraz współrzędne punktu C .

Rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 7 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

Po podstawieniu równania 1 do równania 2 mamy:

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 7\right)^2 - 4x - 6\left(-\frac{1}{2}x + 7\right) + 4 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 7x + 49 - 4x + 3x - 42 + 4 = 0$$

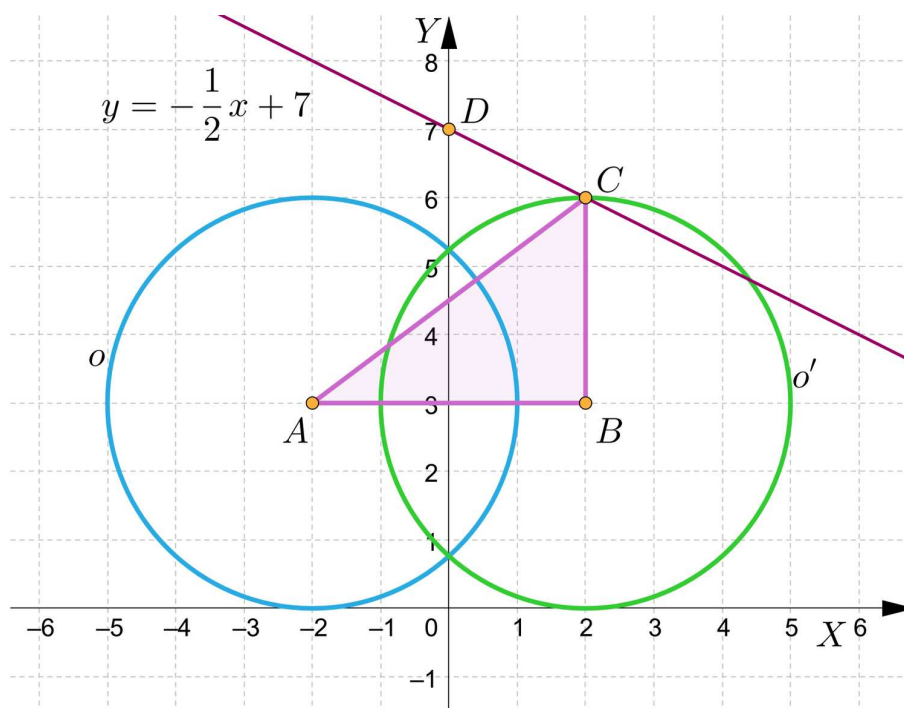
$$\frac{5}{4}x^2 - 8x + 11 = 0$$

$$\Delta = 64 - 55 = 9$$

$$x_1 = \frac{8+3}{\frac{5}{2}} = \frac{22}{5} - \text{nie jest liczbą całkowitą}$$

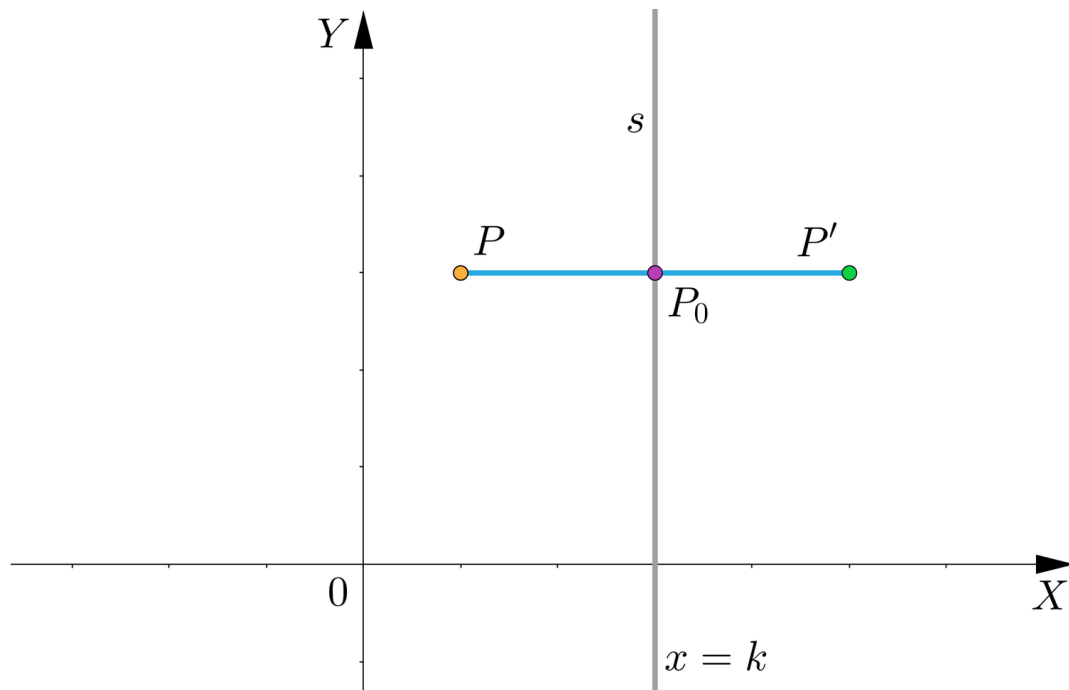
$$x_1 = \frac{8-3}{\frac{5}{2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Punkt C ma współrzędne: $C = (2; 6)$.



Zauważmy, że jest to trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 i 3, zatem jego pole jest równe: $P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

Niech prosta s o równaniu $x = k$ będzie prostą równoległą do osi Y , a punkt $P' = (x', y')$ – obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem tej prostej.



Widzimy, że $y' = y$. Punkt P_0 , jako środek odcinka PP' , ma odciętą $x_0 = \frac{x+x'}{2}$, gdzie $x_0 = k$, skąd

$$S_k : \begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}.$$

Zauważmy, że jeżeli $k = 0$, to z powyższych wzorów otrzymamy współrzędne punktu symetrycznego względem osi Y :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}.$$

Przykład 5

Punkt P' jest symetryczny do punktu P o współrzędnych $(-\sqrt{7}; \sqrt{3})$ względem prostej o równaniu $x = -4$. Wyznamy współrzędne punktu P' oraz równanie okręgu o środku w punkcie P' i promieniu długości 5.

Rozwiązanie:

Wyznamy współrzędne punktu P' .

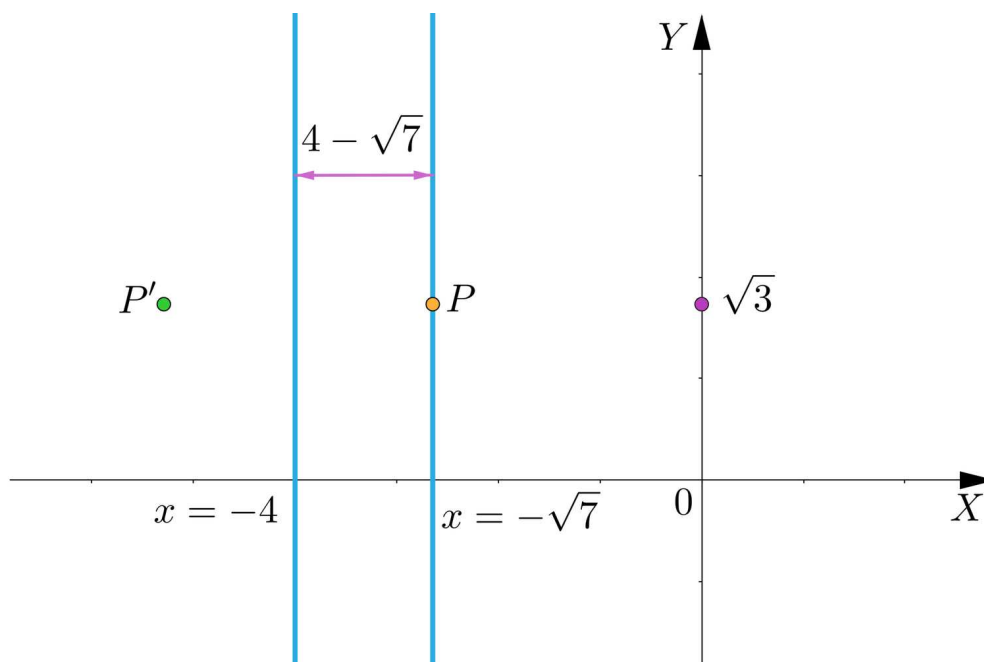
• I sposób

Wykorzystamy wzory $S_k : \begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}$, zatem:

$$P' = (2k - x, y) = (2 \cdot (-4) - (-\sqrt{7}), \sqrt{3}) = (-8 + \sqrt{7}, \sqrt{3}).$$

- II sposób

Wykonamy rysunek pomocniczy.



$$P' = (x_1, y_1)$$

$$x_1 = -4 - (4 - \sqrt{7}) = -8 + \sqrt{7},$$

$$y_1 = \sqrt{3},$$

$$P' = (-8 + \sqrt{7}, \sqrt{3}).$$

Równanie okręgu ma postać:

$$(x + 8 - \sqrt{7})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 25.$$

Słownik

punkty symetryczne względem prostej

punkty, które leżą na prostej prostopadłej do danej prostej, po przeciwnych jej stronach i w równych od niej odległościach

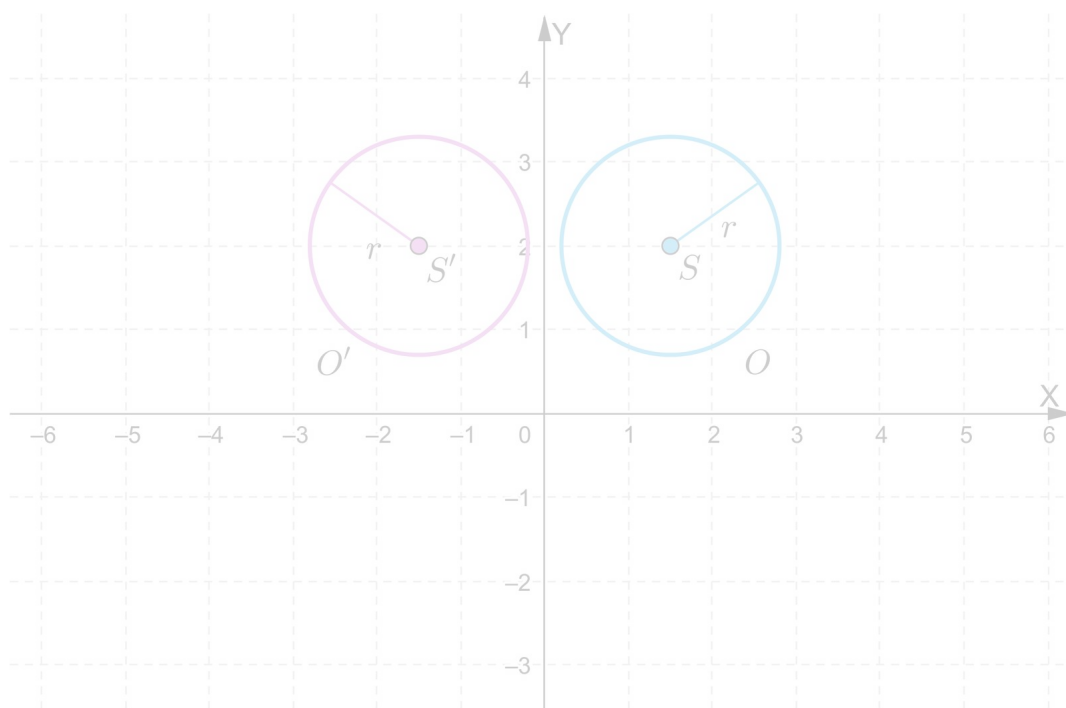
punkty symetryczne względem osi Y

punkty, które leżą na prostej prostopadłej do osi Y , po przeciwnych jej stronach i w równych od niej odległościach

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zmieniaj położenie środka S oraz długość promienia r okręgu O . Obserwuj, jak zmienia się równanie okręgu symetrycznego do okręgu O względem osi Y .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaFhwwf7A>

Polecenie 2

Odczytaj z apletu równanie obrazu okręgu o środku $S = (1; 0, 9)$ i promieniu długości $r = 1, 3$ w symetrii względem osi Y . Sprawdź, jakie jest wzajemne położenie tych okręgów. Jaką długość powinien mieć promień, by okrąg o środku w tym punkcie i okrąg do niego symetryczny były styczne zewnętrznie?

Polecenie 3

Uzupełnij luki, wpisując odpowiednie wartości.

Dany jest okrąg o środku w punkcie $S(-6; 5)$ i o promieniu $r = 3$. Okrąg symetryczny względem podanego ma środek w punkcie $S(\text{ };\text{ })$ i promień $r = \text{ }.$

Aby okręgi były styczne zewnętrznie, ich promienie powinny mieć długość $r =$

$\text{ }.$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Środek obrazu okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$ w symetrii względem osi Y ma współrzędne:

☐ (2; 4)

☐ (-2; -4)

☐ (2; -4)

☐ (-2; 4)

Ćwiczenie 2



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Obrazem okręgu o środku w punkcie (6; -9) i promieniu długości 3 w symetrii względem osi Y jest okrąg o równaniu:

☐ $x^2 + y^2 + 12x - 18y + 108 = 0$

☐ $(x + 6)^2 + (y + 9)^2 = 9$

☐ $(x + 6)^2 + (y - 9)^2 = 9$

☐ $x^2 + y^2 + 12x + 18y + 108 = 0$

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Okręgi o równaniach $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$ oraz $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 33 = 0$ są symetryczne względem prostej o równaniu:

☐ $x = -3$

☐ $x = -1$

☐ $x = 0$

☐ $x = 2$

Ćwiczenie 4



Napisz równanie okręgu współśrodkowego z okręgiem o równaniu o_1 : $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, na którym leży punkt o współrzędnych $(1; -8)$ i wyznacz równanie jego obrazu w symetrii względem osi Y . Uzupełnij rozwiązanie.

Przedstawiamy równanie okręgu o_1 w postaci kanonicznej: .

Środek okręgu o_1 ma współrzędne i promień długości .

Okrąg współśrodkowy o_2 ma zatem środek w punkcie S , a jego promień jest równy długości odcinka o końcach $(1; -2)$ i $(1; -8)$. Zatem: $r_2 =$.

Równanie okręgu o_2 ma postać .

Ponieważ w symetrii względem osi Y : , więc obrazem symetrycznym tego okręgu w symetrii względem osi Y jest okrąg o równaniu .

Ćwiczenie 5



Wyznacz obraz okręgu o środku $(2; -3)$ i promieniu 1, 5 względem prostej o równaniu $x = 3$.

Ćwiczenie 6



Okrąg o środku w punkcie $A' = (10\sqrt{2}, \sqrt{2})$ jest symetryczny do okręgu o równaniu $o_1: x^2 + y^2 + 20x - 2\sqrt{2}y + 94 = 0$ względem pewnej prostej równoległej do jednej z osi układu współrzędnych. Napisz równanie tej prostej.

Ćwiczenie 7



Wyznacz równanie obrazu okręgu symetrycznego względem osi Y do okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $A = (-3; 1)$ i $B = (2; 5)$.

Ćwiczenie 8



Dany jest okrąg o środku w punkcie $C = (-2, -3)$, styczny do prostej o równaniu $y = 3x - 1$. Wyznacz równanie jego obrazu w symetrii osiowej względem osi Y .

Dla nauczyciela

Autor: Janusz Karkut, Aneta Rogalska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obraz okręgu w symetrii względem osi Y

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

Zakres podstawowy

Uczeń:

4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zakres rozszerzony

Uczeń:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne i informatyczne;
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza równania okręgów symetrycznych do danych względem osi Y ;
- wyznacza równania okręgu symetrycznego do danego względem prostej równoległej do osi Y ;
- stosuje poznane zależności do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- lekcja odwrócona
- liga zadaniowa

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora;
- materiały zawarte w e-podręczniku

Przebieg lekcji**Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie zależności między współrzędnymi punktów symetrycznych względem osi Y .
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie wiadomości dotyczących wyznaczania obrazów figur w symetrii osiowej.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi jednego z uczniów o przypomnienie zależności między współrzędnymi punktów symetrycznych względem osi Y .
2. Następnie inny uczeń przypomina wiadomości dotyczące wyznaczania obrazów figur w symetrii osiowej.
3. Nauczyciel przedstawia cele zajęć i formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.

2. Nauczyciel uruchamia symulację interaktywną. Uczniowie obserwują zachodzące zmiany i wspólnie z nauczycielem wykonują Polecenie 2.
3. Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia 1-6 z sekcji „Sprawdź się”. Uczniowie rywalizują rozwiązując zadania. Uczeń, który jako pierwszy bezbłędnie wykona zadania, wygrywa rywalizację.
4. Nauczyciel wraz z uczniami analizuje ćwiczenia, które sprawiły najwięcej problemów.

Faza podsumowująca:

- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do postawionych na początku lekcji celów i kryteriów sukcesu.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Symetria osiowa](#)
- [Symetria punktu w układzie współrzędnych](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu przed sprawdzianem.