



Przykłady ciągów liczbowych nieskończonych

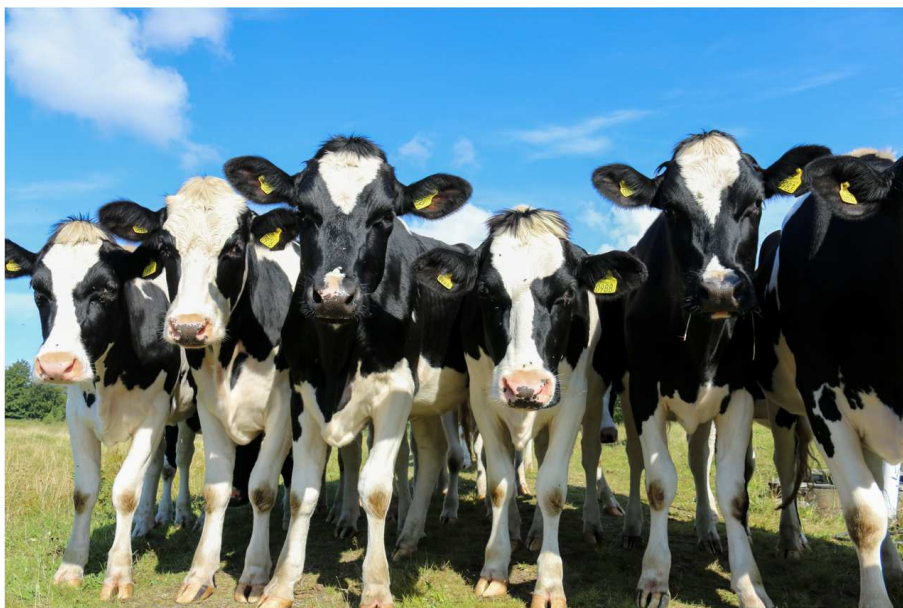
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przykłady ciągów liczbowych nieskończonych

Źródło: [Prettysleepy](#) from [Pixabay](#), domena publiczna.

Narayana Pandita był czternastowiecznym głównym matematykiem Indii. Jego traktaty uważane są za najważniejsze traktaty sanskrytu. Zawierają wiele nowatorskich pomysłów, między innymi reguły obliczania przybliżonych wartości pierwiastków kwadratowych, magiczne kwadraty.



Źródło: [Pixabay.com](#), dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Narayan Pandita jest twórcą niezwykłego ciągu liczbowego, zwanego dzisiaj krowami Narayana. Jeśli chcesz poznać własności tego ciągu i jeszcze innych nieskończonych ciągów liczbowych – zapoznaj się z tym materiałem.

Twoje cele

- Określisz wyrazy danych ciągów liczbowych.
- Odkryjesz własności ciągów liczbowych znanych z historii matematyki.
- Zapiszesz wzór ogólny danego ciągu.

Przeczytaj

Od tysięcy lat naukowcy poszukują uniwersalnych metod wyznaczania liczb określonego rodzaju. Na przykład liczb pierwszych, czy liczb doskonałych (liczb równych sumie swoich dzielników właściwych). Poszukiwania te doprowadziły do odkrycia wielu ciągów liczbowych, które obecnie mają zastosowanie w prawie wszystkich dziedzinach wiedzy – na przykład meteorologii, statystyce, kosmologii, medycynie.

Definicja: Ciąg liczbowy

Ciąg, w którym wyrazy są liczbami, nazywamy **ciągiem liczbowym**.

Przykład 1

Jednym z najstarszych znanych **ciągów liczbowych** jest ciąg, zwany ciągiem krów Narayana, od nazwiska jego odkrywcy Pandity Narayana. **Krowy Narayana** to ciąg liczb naturalnych, za pomocą którego Narayana opisał liczbę krów żyjących w kolejnych latach, zaczynając od jednej krowy w pierwszym roku. Przy czym każda krowa wydaje na świat jedną młodą krowę każdego roku, począwszy od czwartego roku życia i wszystkie krowy żyją.

Kilka początkowych wyrazów ciągu:

1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, ...

Możemy wywnioskować, że na przykład po 10 latach stado będzie składało się z 19 krów (jeśli zaczynamy liczyć od wyrazu z indeksem zero).

Ciąg (k_n) krów Narayana można opisać wzorem:

$$k_0 = k_1 = k_2 = 1 \text{ i } k_n = k_{n-1} + k_{n-3} \text{ dla } n \geq 3.$$

Przykład 2

Liczba Germain to taka liczba pierwsza p , dla której liczba $q = 2p + 1$ też jest liczbą pierwszą. Na przykład dla liczby 11 liczba $q = 2p + 1$ będzie równa 23.

$$q = 2 \cdot 11 + 1 = 23$$

Liczby Germain zostały tak nazwane na cześć francuskiej dziewiętnastowiecznej matematyczki Marie Sophie Germain, która odkryła te liczby przy okazji prób udowodnienia twierdzenia Fermata. Liczby te mają zastosowanie w kryptografii.

Przypuszczalnie ciąg, którego wyrazy są liczbami Germain jest ciągiem nieskończonym.

Kilka początkowych wyrazów ciągu (p_n) liczb Germain:

2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179, 191, 233, 239, 251, 281, 293, 359, 419, 431, 443, 491, 509, 593, 641, 653, 659, ...

Kilka początkowych wyrazów ciągu (q_n) , liczb stowarzyszonych z liczbami Germain:

5, 7, 11, 23, 47, 59, 83, 107, 167, 179, 227, 263, 347, 359, 383, 467, 479, 503, ...

Wyznamy wyraz p ciągu Germain, dla którego wyraz stowarzyszony q to 263.

$$2p + 1 = 263$$

$$2p = 262$$

$$p = 131$$

Szukany wyraz to dwunasty wyraz ciągu Germain.

Przykład 3

Liczby Wagstaffa to liczby pierwsze $p = \frac{1+2^q}{3}$, gdzie q jest liczbą pierwszą nieparzystą.

Na przykład liczba 11 jest liczbą Wagstaffa:

$$11 = \frac{2^5+1}{3}$$

Liczby Wagstaffa zostały tak nazwane na cześć matematyka Samuela Wagstaffa, który podał informację o ich odkryciu w 1990 r. Liczby te mają oczywiście zastosowanie w kryptografii.

Obecnie znane są liczby Wagstaffa z ponad 4 milionami cyfr.

Kilka początkowych liczb ciągu Wagstaffa:

3, 11, 43, 683, 2731, 43691, 174763, 2796203, 715827883, 2932031007403, 76861433640, ...

Przykłady liczb q wykorzystywanych do tworzenia liczb Wagstaffa:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 43, 61, 79, 101, 127, 167, 191, 199, 313, 347, 701, 1709, 2617, 3539, ...

Przykład 4

Liczba palindromiczna to liczba, która pozostaje taka sama, gdy jej cyfry zapisane są w odwrotnym porządku. Taką liczbą jest na przykład 123321.

Nazwa palindromiczny pochodzi od nazwy wyrażenia, które czytane od prawej strony do lewej brzmi tak samo, jak czytane od lewej do prawej, np. KOBYŁA MA MAŁY BOK.

Kilka początkowych wyrazów ciągu liczb palindromicznych to:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 202, ...

W ciągu liczb palindromicznych nieskończenie wiele wyrazów to kwadraty liczb naturalnych:

0, 1, 4, 9, 121, 484, 676, 10201, 12321, ...

Przykład 5

Ciąg liczb Karoliny to ciąg liczb całkowitych, nazwany tak na cześć Karoliny, przyjaciółki amerykańskiego matematyka Emmanuela Cletusa, odkrywcy tych liczb.

Ciąg (K_n) , którego wyrazami są liczby Karoliny, można opisać wzorem ogólnym

$$K_n = (2^n - 1)^2 - 2, \text{ gdzie } n \geq 1$$

Kilka początkowych wyrazów ciągu:

-1, 7, 47, 223, 959, 3967, 16127, 65023, 261119, 1046527, ...

Słownik

ciąg liczbowy

ciąg, w którym wyrazy są liczbami, nazywamy ciągiem liczbowym

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną pokazującą przykłady ciągów, których wyrazy są liczbami wielokątnymi.

Polecenie 2

Liczby wielokątne otrzymuje się przez dodanie początkowych n wyrazów odpowiedniego ciągu liczbowego, zaczynając od liczby 1.

Na przykład:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ – otrzymujemy liczby naturalne – 1, 2, 3, 4, 5, ...

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ – otrzymujemy liczby trójkątne – 1, 3, 6, 10, 15, ...

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$ – otrzymujemy liczby kwadratowe – 1, 4, 9, 16, 25, ...

$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \dots$ – otrzymujemy liczby pięciokątne – 1, 5, 12, 22, 35, ...

Dopisz kolejne dwa wiersze do powyższego zapisu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Najmniejszy palindrom pięciocyfrowy, będący kwadratem liczby naturalnej to:

☐ 10201

☐ 12321

☐ 13231

☐ 10001

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Ciąg (T_n) liczb trójkątnych można określić dla $n \geq 1$ za pomocą wzoru:

☐ $T_1 = 1$ i $T_n = T_{n-1} - n$

☐ $T_1 = 1$ i $T_n = n - T_{n-1}$

☐ $T_1 = 1$ i $T_n = n \cdot T_{n-1}$

☐ $T_1 = 1$ i $T_n = n + T_{n-1}$

Ćwiczenie 3



Liczby sfeniczne (z gr. *sphen* to klin) to liczby naturalne, które są iloczynem trzech różnych liczb pierwszych.

Kilka początkowych wyrazów ciągu (S_n) liczb sfenicznych:

30, 42, 66, 70, 78, 102, 105, ...

Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby.

Ósmy wyraz ciągu liczb sfenicznych to $S_8 =$.

Każda liczba sfeniczna ma dokładnie dzielników.

Liczba sfeniczna 385 zapisana w postaci iloczynu liczb pierwszych to $385 = 5 \cdot$

$\cdot 11$.

Ćwiczenie 4



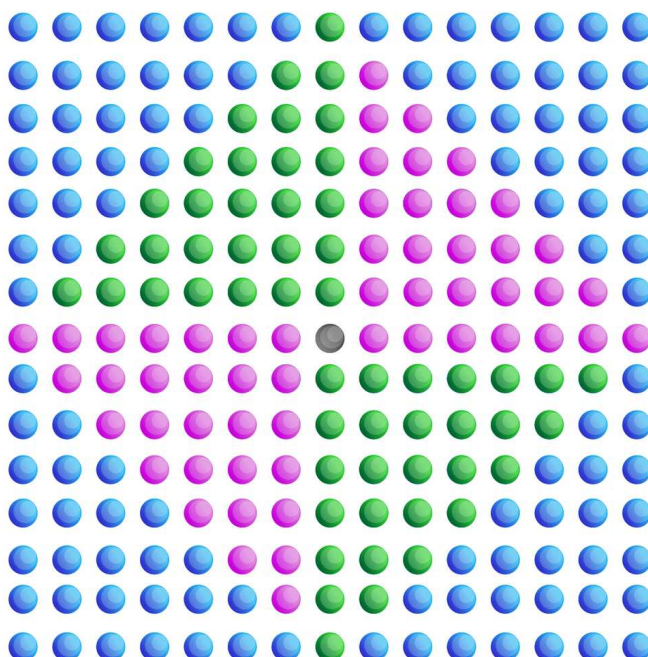
Do liczby p Germain dopisz liczbę q z nią stowarzyszoną.

Liczba Germain p	Liczba stowarzyszona q
53	
239	
5	
509	

Ćwiczenie 5



Niech T_n oznacza n -tą liczbę trójkątną.



Korzystając z rysunku, uzupełnij równość, przeciągając odpowiednie liczby.

$$(\boxed{} \cdot n + 1)^2 - \boxed{} = \boxed{} \cdot T_n$$

4 8 2 6 1

Ćwiczenie 6



Ciąg liczb ośmiokątnych (A_n) można dla $n \geq 1$ opisać wzorem ogólnym $A_n = 3n^2 - 2n$. Uzupełnij, wpisując kolejne wyrazy ciągu liczb ośmiokątnych.

1, 8, , , 65, , 133, , ...

Ćwiczenie 7



Wykaż, że ciąg Karoliny można opisać nie tylko wzorem

$$K_n = (2^n - 1)^2 - 2,$$

ale też wzorem równoważnym

$$K_n = 4^n - 2^{n+1} - 1.$$

Ćwiczenie 8



Oblicz, czy więcej jest trzycyfrowych wyrazów ciągu palindromicznego, czy czterocyfrowych.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przykłady ciągów liczbowych nieskończonych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa II lub III, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach

a)
$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_n = a_n + \frac{1}{2} \cdot a_n(1 - a_n) \end{cases} ,$$

b)
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases} .$$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wyrazy danych ciągów liczbowych
- odkrywa własności ciągów liczbowych znanych z historii matematyki
- zapisuje wzór ogólny bądź rekurencyjny danego ciągu

- prowadzi proste rozumowania, aby uzasadnić postawione hipotezy, oparte na zaobserwowanych analogiach

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- papierowa wstęga
- tarcza strzelnicza

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie powtarzają wiadomości na temat ciągów – jeden z uczniów zadaje pytania, a inni odpowiadają.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą papierowej wstęgi.
2. Zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj” i prezentacją multimedialną. Pierwsza grupa na papierowym pasku zapisuje po jednej zauważonej własności (innej niż podana w materiale) do każdego z omawianych ciągów i podaje pasek dalej. Pasek zawija tak, aby następna grupa nie widziała zapisanych własności.
3. Kolejna grupa postępuje podobnie. Wstęga krąży tak długo, aż uczniom zabraknie pomysłów.
4. Jeden z uczniów odczytuje zapisy na wstędze. Dyskusja – czy zauważone własności są prawdziwe i dlaczego.
5. Uczniowie wspólnie rozwiązują problem określony w sekcji Polecenie 2 i wspólnie ustalają wzory ogólne zapisanych ciągów.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
Liderzy grup dzielą się informacjami na temat sposobu pracy grup, ciekawych pomysłów lub trudności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.
3. Uczniowie na „tarczy strzelniczej” zaznaczają stopień swoich dotychczasowych umiejętności dotyczących ciągów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną można wykorzystać na zajęciach wprowadzających pojęcie ciągu liczbowego.