



Przesunięcie prostej o wektor

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Założmy, że stałeś się posiadaczem pięknego obrazu namalowanego przez koleżankę. Jako osoba dokładna rysujesz na ścianie dwie linie – lewą pionową i górną poziomą – żeby potem w ich miejscu zawiesić obraz.

Gdy oceniasz swoją pracę z daleka, dostrzegasz, że obraz nie wisi na środku ściany i należy przesunąć go nieco w lewo. Odmierzasz więc 3 cm w poziomie od miejsca pierwszej pionowej prostej – w dwóch miejscach – a następnie „przesuwasz” prostą o wektor 3 cm w lewo. I właśnie tym zajmiemy się w tym materiale – zasadami przesuwania prostych o wektor w układzie współrzędnych.

Twoje cele

- Utrwalisz wiadomości dotyczące wektorów.
- Obliczysz współrzędne obrazów punktów po przesunięciu o wektor.
- Napiszesz równanie prostej będącej obrazem danej prostej w przesunięciu o wektor.
- Zastosujesz poznane wzory do rozwiązywania zadań.

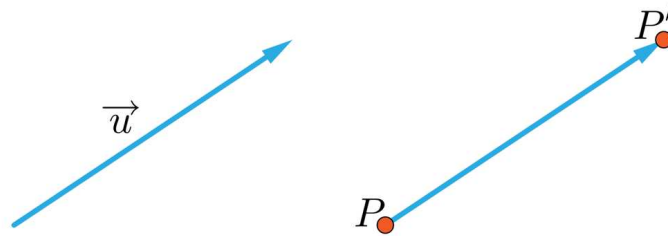
Przeczytaj

Zanim przejdziemy do wyznaczenia obrazu prostej w przesunięciu o wektor $\vec{u}$ przypomnijmy podstawowe wiadomości dotyczące tego przekształcenia.

Definicja: Przesunięcie (translacja) o wektor

Przesunięciem (translacją) o wektor $\vec{u}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi P płaszczyzny (przestrzeni) takiego punktu P' , że:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{u}.$$



Wyznamy teraz współrzędne obrazu danego punktu.

Założmy, że obrazem punktu $P = (x, y)$ w **przesunięciu o wektor** $\vec{u} = [p, q]$ jest punkt $P' = (x', y')$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{PP'}$ zapisujemy następująco:

$$\overrightarrow{PP'} = [x' - x, y' - y].$$

Dwa wektory są równe, gdy mają równe odpowiednie współrzędne, stąd

$$x' - x = p, \quad y' - y = q,$$

a zatem

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

Definicja: Izometria

Przekształcenie płaszczyzny na siebie zachowujące odległości punktów nazywamy izometrią.

Wykażemy teraz, że przesunięcie o wektor jest izometrią.

Niech A i B będą dowolnymi punktami płaszczyzny a $\vec{u}$ dowolnym wektorem. Umieszczamy w układzie współrzędnych punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$ oraz wektor $\vec{u} = [p, q]$.

Obrazy A' i B' punktów A i B w przesunięciu o wektor $\vec{u}$ mają współrzędne $A' = (x_1', y_1')$ i $B' = (x_2', y_2')$.

Ponieważ $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ oraz $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}$ wnioskujemy, że: $A' = (x_1 + p, y_1 + q)$ i $B' = (x_2 + p, y_2 + q)$.

Wyznamy długość odcinka $A'B'$:

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \sqrt{((x_2 + p) - (x_1 + p))^2 + ((y_2 + q) - (y_1 + q))^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |AB|. \end{aligned}$$

Zatem każde **przesunięcie o wektor** jest izometrią, co oznacza, że obrazem prostej w przesunięciu o wektor jest też prosta.

Udowodnimy teraz, że obrazem prostej w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [p, q]$ jest prosta do niej równoległa.

Rozważymy dwie sytuacje: gdy prosta jest postaci $y = ax + b$ lub postaci $x = c$.

Korzystamy ze związków między współrzędnymi punktu $P = (x, y)$ i jego obrazu $P' = (x', y')$:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases},$$

z których otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}.$$

Wyznaczone wartości x, y podstawiamy do równania prostej $y = ax + b$ i otrzymujemy równanie jej obrazu w postaci:

$$y' - q = a(x' - p) + b, \text{ stąd } y' = ax' - ap + b + q.$$

Zatem obrazem prostej o równaniu $y = ax + b$, w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [p, q]$ jest prosta o równaniu

$$y = ax + b - ap + q.$$

Zauważmy, że w równaniach obu prostych współczynniki kierunkowe są równe, czyli proste są równoległe.

Wykażemy teraz, że obrazem prostej $x = c$ jest prosta do niej równoległa.

Wykorzystując związki

$$\begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$$

dostajemy prostą o równaniu $x' - p = c$ czyli $x' = c + p$.

Zatem obrazem prostej o równaniu $x = c$ w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [p, q]$ jest prosta o równaniu $x = p + c$. Jest to równanie prostej równoległej do prostej $x = c$.

Obrazem prostej w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [p, q]$ jest prosta do niej równoległa.

Przykład 1

Wyznamy równanie obrazu prostej o równaniu $y = 2x + 5$ w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [2, 3]$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze związków pomiędzy współrzędnymi punktu i jego obrazu w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [p, q]$ mamy:

$$x' = x + 2, \text{ stąd } x = x' - 2,$$

$$y' = y + 3, \text{ stąd } y = y' - 3.$$

Podstawiając wyznaczone wielkości x i y do wzoru $y = 2x + 5$ otrzymujemy

$$y' - 3 = 2(x' - 2) + 5 \text{ więc } y' = 2x' - 4 + 5 + 3.$$

Prosta o równaniu $y = 2x + 4$ jest obrazem prostej $y = 2x + 5$ po przesunięciu o wektor $\vec{u} = [2, 3]$.

Przykład 2

Wyznamy współrzędne wektora, o który należy przesunąć prostą o równaniu $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, aby otrzymać prostą o równaniu $y = \frac{2}{3}x$.

Rozwiązanie:

Korzystając z równania $y = ax + b - ap + q$ obrazu prostej o równaniu $y = ax + b$ w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [p, q]$ mamy

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}p + \frac{1}{3} + q.$$

Obrazem prostej $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ ma być prosta $y = \frac{2}{3}x$, stąd: $-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3} + q = 0$.

Otrzymujemy następującą zależność między współrzędnymi p i q wektora $\vec{u}$:

$$-2p + 3q + 1 = 0.$$

Każda para liczb p i q spełniająca warunek $-2p + 3q + 1 = 0$ wyznacza współrzędne wektora tego przesunięcia.

$$\text{Stąd: } \vec{v} = [p, \frac{2}{3}p - \frac{1}{3}].$$

Przykład 3

Wyznamy współrzędne niezerowego wektora, o który należy przesunąć prostą $y = 4x + 1$, aby otrzymać prostą o tym samym równaniu.

Rozwiązanie:

Korzystając z równania $y = ax + b - ap + q$ obrazu prostej o równaniu $y = ax + b$ w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [p, q]$ mamy

$$y = 4x - 4p + 1 + q.$$

Prosta $y = 4x - 4p + 1 + q$ ma być postaci $y = 4x + 1$, stąd: $-4p + 1 + q = 1$ więc: $4p = q$.

$$\text{Stąd: } \vec{u} = [p, 4p], \text{ gdzie } p \neq 0.$$

Przykład 4

Obliczymy pole figury ograniczonej osiami układu współrzędnych, prostą $y = -\frac{1}{2}x + 1$ oraz obrazem tej prostej w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [2, 2]$.

Rozwiązanie:

Napiżemy równanie obrazu prostej $y = -\frac{1}{2}x + 1$ w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [2, 2]$.

Korzystając z równania $y = ax + b - ap + q$ obrazu prostej o równaniu $y = ax + b$ w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [p, q]$ otrzymujemy: $y = -\frac{1}{2}x + 1 - (-\frac{1}{2}) \cdot 2 + 2$,

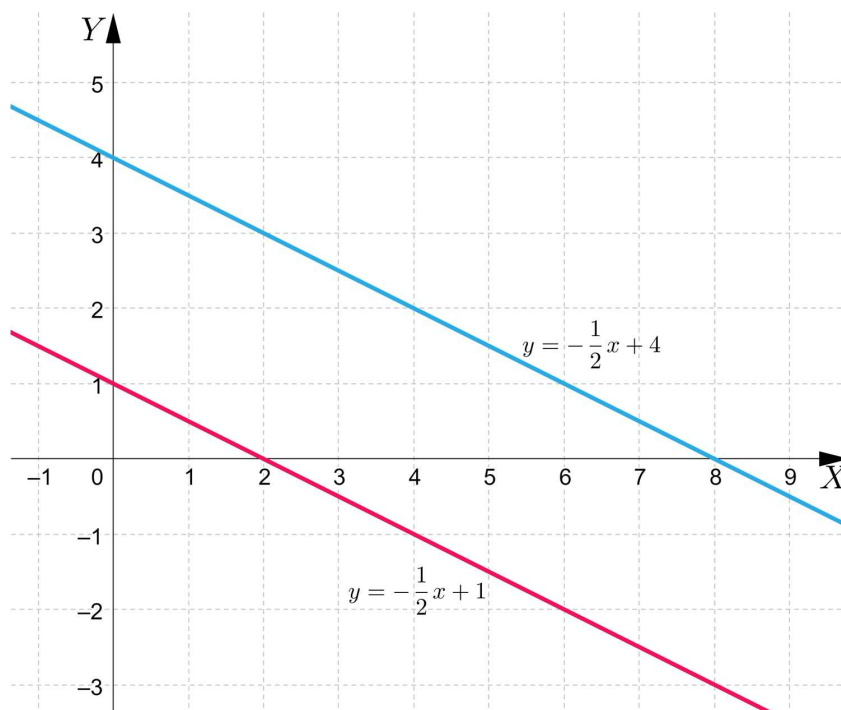
$$\text{zatem: } y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Wyznamy punkty przecięcia prostych z osiami układu współrzędnych.

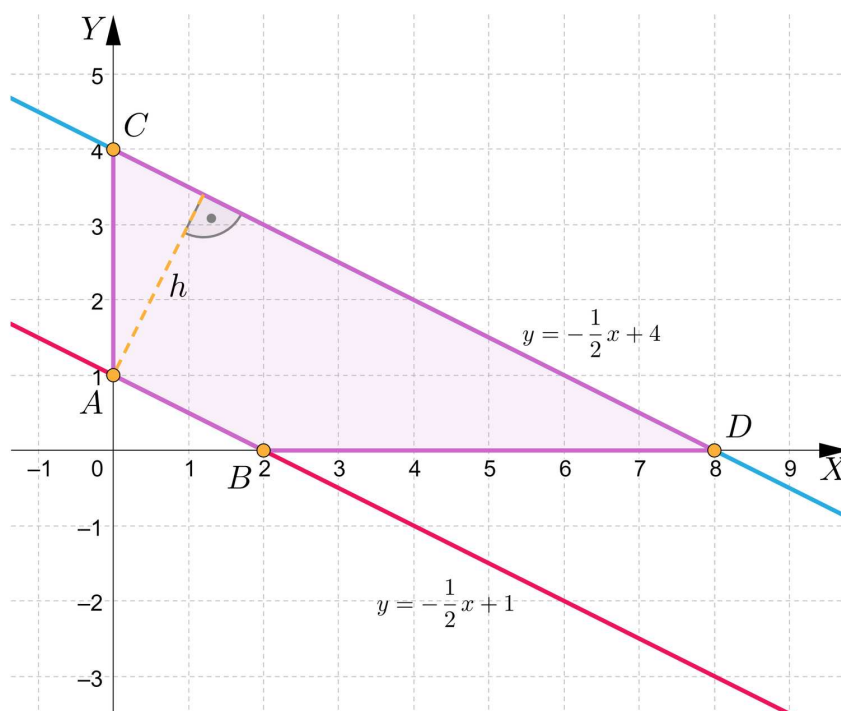
Punkt przecięcia prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ z osią Y : $A = (0, 1)$; z osią X : $B = (2, 0)$.

Punkt przecięcia prostej $y = -\frac{1}{2}x + 4$ z osią Y : $C = (0, 4)$; z osią X : $D = (8, 0)$.

Rysujemy wykresy obu prostych:



Z rysunku wynika, że otrzymaną figurą jest trapez.



Obliczamy długości podstaw trapezu, korzystając ze wzoru:

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ na odległość dwóch punktów:

$$|CD| = \sqrt{(8 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = \sqrt{5 \cdot 16} = 4\sqrt{5},$$

$$|AB| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

Długość wysokości jest równa odległości punktu A od prostej $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Wykorzystamy wzór: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ na odległość punktu (x_0, y_0) od prostej $Ax + By + C = 0$.

Równanie prostej $y = -\frac{1}{2}x + 4$ zapisujemy w postaci ogólnej: $x + 2y - 8 = 0$.

Obliczamy wysokość trapezu:

$$h = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{|-6|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

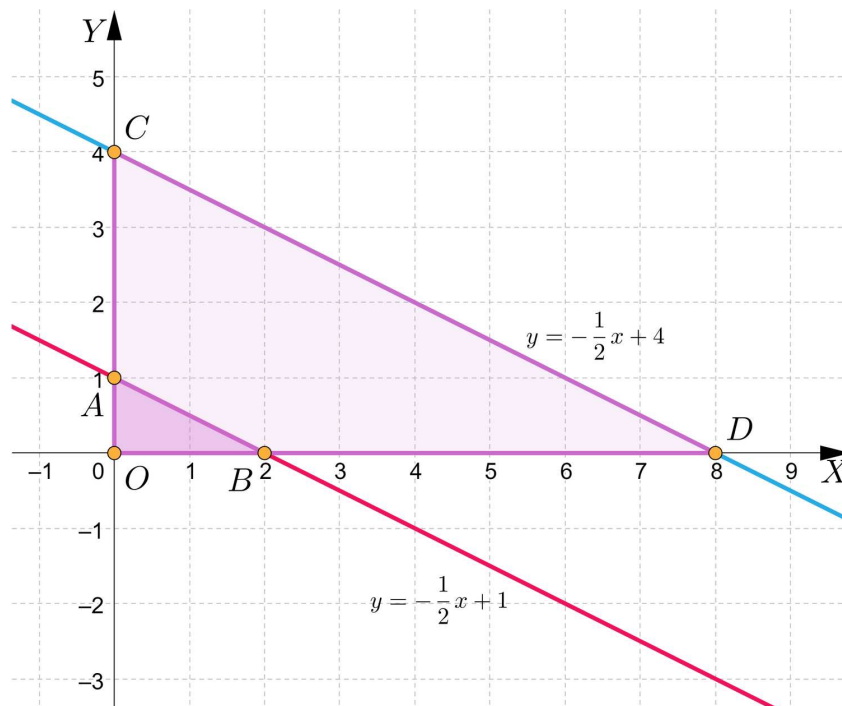
Korzystamy ze wzoru na pole trapezu: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, gdzie a , b - długości podstaw trapezu a h - długość jego wysokości.

$$\text{Ostatecznie otrzymujemy: } P = \frac{4\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = 15.$$

Pole trapezu wynosi 15.

Pokażemy drugą metodę rozwiązania tego zadania.

Możemy zauważyć, że szukane pole trapezu jest różnicą pól dwóch trójkątów: trójkąta prostokątnego ODC i trójkąta prostokątnego OBA .



Obliczamy pole trójkąta OCD : $P_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$.

Obliczamy pole trójkąta OBA : $P_{\triangle OBA} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Pole trapezu: $P_{ABDC} = P_{\triangle OCD} - P_{\triangle OBA}$, więc $P_{ABDC} = 16 - 1 = 15$.

Odpowiedź:

Pole figury ograniczonej osiami układu współrzędnych, prostą $y = -\frac{1}{2}x + 1$ oraz obrazem tej prostej w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [2, 2]$ wynosi 15.

Słownik

przesunięcie (translacja) o wektor

przesunięcie o wektor $\vec{u}$ to przyporządkowanie każdemu punktowi P płaszczyzny (przestrzeni) takiego punktu P' , że:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą przesunięcie prostej o wektor $\vec{a}$ a następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Do6Tv7xI5>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej przesunięcia prostej o wektor.

Polecenie 2

Napisz równanie prostej, która jest obrazem prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + 2$ w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [-6, 3]$.

Polecenie 3

Obrazem prostej $y = 3x + 7$ w przesunięciu o wektor $[1, q]$ jest prosta $y = 3x - 3$. Wyznacz współrzędną q wektora $\vec{u}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Obrazem prostej l o równaniu $y = \frac{1}{5}x$ w przesunięciu o wektor $[5, 1]$ jest prosta k o równaniu:

☐ $y = \frac{1}{5}x + 1$

☐ $y = \frac{1}{5}x - 1$

☐ $y = \frac{1}{5}x$

☐ $y = \frac{1}{5}x + 2$

Ćwiczenie 2



Do równania prostej l dobierz równanie prostej k tak, aby prosta k była obrazem prostej l w przesunięciu o wektor $[-1, 3]$.

$l : y = 3x$

$k : y = -3x + 2$

$l : y = -3x + 1$

$k : y = 3x + 8$

$l : y = 3x + 2$

$k : y = -3x + 1$

$l : y = -3x + 2$

$k : y = 3x + 6$

Ćwiczenie 3



O jaki wektor należy przesunąć prostą o równaniu $y = -\frac{3}{4}x + 7$, aby otrzymać prostą o równaniu $y = -\frac{3}{4}x - 1$? Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ $[-1; -7]$

☐ $[-2; -2, 5]$

☐ $[-4; -5]$

☐ $[-2; -6, 5]$

Ćwiczenie 4



Dane są dwie proste: k o równaniu $y = \frac{5}{7}x - 1$ oraz l o równaniu $y = \frac{5}{7}x + 4$. Uzupełnij współrzędne wektora, o który należy przesunąć prostą k , aby otrzymać prostą l . Wpisz poprawne liczby.

1) $[0, \text{ }]$

2) $[\text{ }, 0]$

3) $[14, \text{ }]$

4) $[p, \frac{5}{7}p + \text{ }]$

Ćwiczenie 5



Dane są dwie proste: k o równaniu $y = -3x + 2$ oraz l o równaniu $y = -3x - 5$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Współrzędne wektora, o który należy przesunąć prostą k , aby otrzymać prostą l , to np. $[-4, 5]$.

☐

Współrzędne wektora, o który należy przesunąć prostą k , aby otrzymać prostą l , mają postać $[p, -3p - 7]$.

☐

Współrzędne wektora, o który należy przesunąć prostą k , aby otrzymać prostą l , to np. $[-\frac{3}{7}, 0]$.

☐

Współrzędne wektora, o który należy przesunąć prostą k , aby otrzymać prostą l , to np. $[0, -7]$.

Ćwiczenie 6



Dane są dwie proste o równaniach: $k : y = \frac{1}{2}x - 3$ oraz $l : y = \frac{1}{2}x - 7$.
Oceń prawdziwość poniższych zdań.

	Prawda	Fałsz
Prosta k jest obrazem prostej l w przesunięciu o wektor $[-2, 3]$.	☐	☐
Prosta l jest obrazem prostej k w przesunięciu o wektor $[-4, 0]$.	☐	☐
Prosta k jest swoim obrazem w przesunięciu o wektor $[2, -1]$.	☐	☐
Prosta l jest swoim obrazem w przesunięciu o wektor $[6, 3]$.	☐	☐

Ćwiczenie 7



Przeciągnij poprawną odpowiedź.

Pole figury ograniczonej osiami układu współrzędnych, prostą $y = \frac{1}{3}x - 1$ oraz obrazem tej prostej w przesunięciu o wektor $[6, 1]$ wynosi .

☐ $1\frac{1}{2}$

☐ $7\frac{1}{2}$

☐ $4\frac{1}{2}$

☐ 6

Ćwiczenie 8



Dane są dwie proste o równaniach: $k: y = \frac{2}{3}x - 3$ oraz $l: y = -4x + 7$. Obrazem prostej k w przesunięciu o wektor $[-3, 3]$ jest prosta m , zaś obrazem prostej l w przesunięciu o wektor $[1, 5]$ jest prosta n .

Wybierz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Pole figury ograniczonej osią X oraz prostymi m i n wynosi 14.

☐ Prosta m można opisać równaniem $y = \frac{2}{3}x - 2$.

☐ Prosta n można opisać równaniem $y = -4x + 16$.

☐ Punkt $P = (2, 3)$ jest punktem przecięcia prostych m i n .

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przesunięcie prostej o wektor

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
- 2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostokąt do innej prostej, styczność do okręgu;
- 3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- posługuje się pojęciem wektora
- oblicza współrzędne wektora
- zna definicję przesunięcia o wektor
- podaje związki między współrzędnymi punktu i jego obrazu w przesunięciu o wektor
- podaje równanie obrazu prostej w przesunięciu o wektor
- planuje czynności mające doprowadzić do wyznaczenia równania prostej będącej obrazem prostej o danym równaniu
- wykorzystuje wzór na odległość punktu od prostej w rozwiązaniach zadań
- kształci umiejętność stosowania metod geometrii analitycznej
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania posługując się poznanymi twierdzeniami i definicjami
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- pokaz multimedialny
- metoda odwróconej klasy
- burza mózgów
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny
- e-podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie podają związki między współrzędnymi punktu i jego obrazu w przesunięciu o wektor.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje animację.
2. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne niejasności zgłoszone przez uczniów.
3. Uczniowie w parach opracowują metodę analitycznego otrzymania równania prostej będącej obrazem danej prostej w przesunięciu o wektor – mogą skorzystać z pomocy nauczyciela lub materiałów zawartych w sekcji „Przeczytaj”.
4. Po określonym przez nauczyciela czasie, chętny uczeń zapisuje równanie obrazu prostej po przesunięciu o podany wektor.
5. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości zgłoszone przez uczniów.
6. Uczniowie samodzielnie rozwiązują, wybrane przez nauczyciela, ćwiczenia interaktywne.
7. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów, zwraca uwagę na poprawność zapisu i jego estetykę, wyjaśnia niezrozumiałe dla uczniów elementy.

Faza podsumowująca:

1. Chętni uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych.
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie pozostałych ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

- [Pojęcie wektora](#)
- [Współrzędna wektora na osi liczbowej](#)
- [Przykłady](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą, przed lekcją zapoznać się z animacją, umożliwi im to samodzielne przygotowanie się do lekcji i ułatwi im przyswojenie materiału podawanego na lekcji.