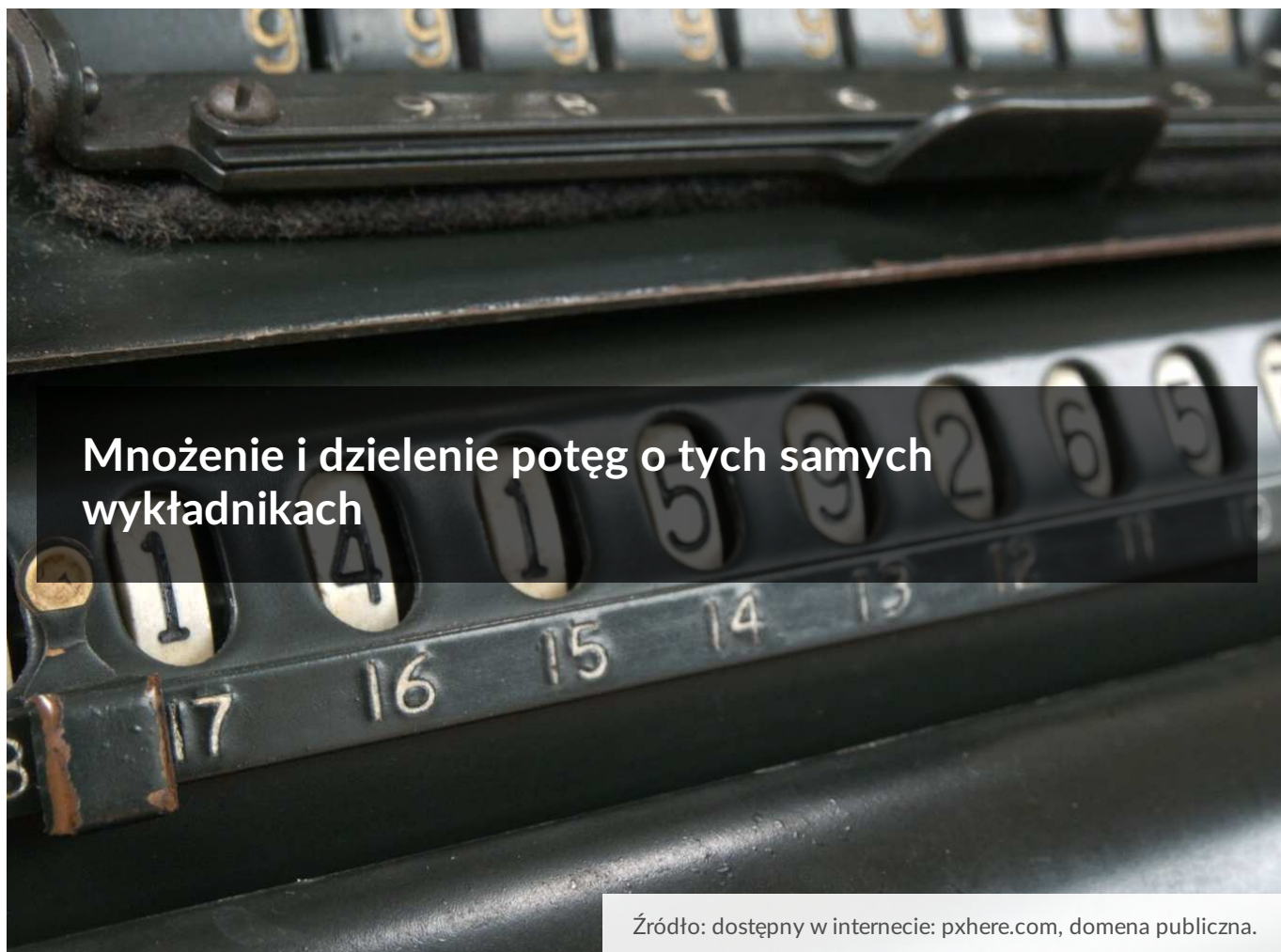




Mnożenie i dzielenie potęg o tych samych wykładnikach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Mnożenie i dzielenie potęg o tych samych wykładnikach

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W tej lekcji skupimy się na omawianiu przykładów wykorzystujących zależności między potęgami o takich samych wykładnikach, ale pozostałe poznane wcześniej własności również zastosujemy. Głównym celem tej lekcji jest nabieranie biegłości w zauważaniu zależności i stosowaniu przekształceń związanych z potęgowaniem.

Twoje cele

- Zastosujesz rozdzielność potęgowania względem mnożenia.
- Zastosujesz rozdzielność potęgowania względem dzielenia.

Przeczytaj

Od szkoły podstawowej wiemy, że dla niezerowych liczb a i b oraz naturalnej liczby k prawdziwe są wzory:

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k,$$

$$a^k : b^k = (a : b)^k.$$

Przypomnijmy dowody, powyższych równości:

- rozdzielność potęgowania względem mnożenia

$$(a \cdot b)^k = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{k \text{ czynników}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k \text{ czynników}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{k \text{ czynników}} = a^k \cdot b^k,$$

- rozdzielność potęgowania względem dzielenia

$$(a : b)^k = \left(\frac{a}{b}\right)^k = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{k \text{ czynników}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{k \text{ czynników}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{k \text{ czynników}}} = \frac{a^k}{b^k} = a^k : b^k.$$

W dowodach tych korzystamy z przemienności i łączności mnożenia.

Dla wykładników należących do zbiorów innych niż zbiór liczb naturalnych, definicje potęg konstruujemy tak, aby powyższe równości były prawdziwe.

Zatem dla dodatnich liczb a i b oraz dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi:

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x,$$

$$a^x : b^x = (a : b)^x.$$

Przykład 1

Obliczmy wartości wyrażeń:

$$0,4^{\frac{1}{2}} \cdot 1000^{\frac{1}{2}} = (0,4 \cdot 1000)^{\frac{1}{2}} = 400^{\frac{1}{2}} = 20$$

$$\begin{aligned} 12^{\frac{2}{3}} \cdot 18^{\frac{2}{3}} &= (12 \cdot 18)^{\frac{2}{3}} = (3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2)^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3^3)^{\frac{2}{3}} = ((2 \cdot 3)^3)^{\frac{2}{3}} = \\ &= 6^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 6^2 = 36 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}} : \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{2}{3} : \frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

Przykład 2

Przekształćmy wyrażenia:

$$\begin{aligned}\left(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right) = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right) + 3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right) = \\&= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \\&= 2 + 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3 = 5 + 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 5 + 2 \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 5 + 2\sqrt{6} \\(5^{1,5} - 3^{1,5})^2 &= (5^{1,5} - 3^{1,5})(5^{1,5} - 3^{1,5}) = \\&= 5^{1,5} \cdot (5^{1,5} - 3^{1,5}) - 3^{1,5} \cdot (5^{1,5} - 3^{1,5}) = \\&= 5^{1,5} \cdot 5^{1,5} - 5^{1,5} \cdot 3^{1,5} - 3^{1,5} \cdot 5^{1,5} + 3^{1,5} \cdot 3^{1,5} = \\&= 5^3 - 5^{1,5} \cdot 3^{1,5} - 5^{1,5} \cdot 3^{1,5} + 3^3 = 125 - 2 \cdot 15^{1,5} + 27 = 152 - 2 \cdot 15^{1,5} = \\&= 152 - 2 \cdot 15^{\frac{3}{2}} = 152 - 2 \cdot \left(\sqrt{15}\right)^3 = 152 - 2 \cdot 15\sqrt{15} = 152 - 30\sqrt{15}\end{aligned}$$

W niektórych zadaniach będziemy korzystać z następującego twierdzenia:

Twierdzenie: Twierdzenie o równości potęg

Potęgi o równych podstawach, które są liczbami dodatnimi różnymi od 1, są równe dokładnie wtedy, gdy mają równe wykładniki.

Przykład 3

Wyznamy liczbę x , dla której $2^x \cdot 3^x = 36$.

Korzystając z własności potęgowania możemy równanie przekształcić do postaci:

$$(2 \cdot 3)^x = 36$$

$$6^x = 6^2$$

Na mocy [twierdzenia o równości potęg](#) możemy zauważyć, że $x = 2$.

Przykład 4

Wyznamy liczbę x , dla której $\frac{3^x \cdot 15^x}{5^x} = 3$.

Korzystając z własności potęgowania, możemy równanie przekształcić do postaci:

$$\frac{(3 \cdot 15)^x}{5^x} = 3$$

$$\left(\frac{3 \cdot 15}{5}\right)^x = 3$$

$$9^x = 3$$

$$9^x = 9^{\frac{1}{2}}$$

Na mocy twierdzenia o równości potęg możemy zauważyć, że $x = \frac{1}{2}$.

Przykład 5

Obliczymy stosując prawa działań na potęgach:

$$5^{12} \cdot 2^{10} : 10^{10} = 5^2 \cdot 5^{10} \cdot 2^{10} : 10^{10} = 5^2 \cdot (5 \cdot 2)^{10} : 10^{10} = 25 \cdot 10^{10} : 10^{10} =$$

$$= 25 \cdot (10 : 10)^{10} = 25 \cdot 1^{10} = 25$$

$$(3^{10})^2 : 6^{19} \cdot 2^{18} = 3^{20} : 6^{19} \cdot 2^{18} = \frac{3^{20} \cdot 2^{18}}{6^{19}} = \frac{3^2 \cdot 3^{18} \cdot 2^{18}}{6 \cdot 6^{18}} =$$

$$= \frac{9}{6} \cdot \left(\frac{3 \cdot 2}{6}\right)^{18} = \frac{3}{2} \cdot 1^{18} = 1,5$$

Przykład 6

Obliczymy stosując prawa działań na potęgach:

$$8^{-7} : (1,6)^{-7} : 5^{-6} = (8 : 1,6)^{-7} : 5^{-6} = 5^{-7} : 5^{-6} = 5^{-7-(-6)} = 5^{-7+6} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$(0,5)^{-6} \cdot 2^{-6} + (0,125)^{-5} \cdot 2^{-15} = (0,5 \cdot 2)^{-6} + (0,125)^{-5} \cdot (2^3)^{-5} =$$

$$= 1^{-6} + (0,125)^{-5} \cdot 8^{-5} = 1 + (0,125 \cdot 8)^{-5} =$$

$$= 1 + 1^{-5} = 1 + 1 = 2$$

Przykład 7

Rozwiążemy równanie $3^x - 2^x = 7 \cdot 3^{x-2} - 2^{x-2}$.

Możemy wykonać kolejne przekształcenia:

$$3^x - 2^x = 7 \cdot 3^{x-2} - 2^{x-2}$$

Od obu stron równania odejmujemy $7 \cdot 3^{x-2}$, do obu stron równania dodajemy 2^x :

$$3^x - 7 \cdot 3^{x-2} = 2^x - 2^{x-2}$$

Korzystamy ze wzoru na iloczyn potęg o tych samych podstawach, aby zamienić $3^x = 3^2 \cdot 3^{x-2}$ oraz $2^x = 2^2 \cdot 2^{x-2}$:

$$3^2 \cdot 3^{x-2} - 7 \cdot 3^{x-2} = 2^2 \cdot 2^{x-2} - 2^{x-2}$$

$$9 \cdot 3^{x-2} - 7 \cdot 3^{x-2} = 4 \cdot 2^{x-2} - 2^{x-2}$$

Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych:

$$2 \cdot 3^{x-2} = 3 \cdot 2^{x-2}$$

Dzielimy obie strony równania przez 3 oraz przez 3^{x-2} :

$$\frac{2}{3} = \frac{2^{x-2}}{3^{x-2}}$$

Korzystamy ze wzoru na iloraz potęg o tych samych wykładnikach:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$$

Korzystamy z twierdzenia o równości potęg:

$$1 = x - 2$$

$$x = 3$$

Słownik

rozdzielność potęgowania względem mnożenia

własność potęgowania, która orzeka, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b oraz dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; jeżeli rozważamy potęgi o wykładnikach całkowitych, wówczas podstawy potęg mogą być dowolnymi liczbami różnymi od zera

rozdzielność potęgowania względem dzielenia

własność potęgowania, która orzeka, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b oraz dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $(a : b)^x = a^x : b^x$; jeżeli rozważamy potęgi o wykładnikach całkowitych, wówczas podstawy potęg mogą być dowolnymi liczbami różnymi od zera

twierdzenie o równości potęg

(inaczej: *różnowartościowość funkcji wykładniczej*) jeżeli potęgi o równych podstawach, które są liczbami dodatnimi i różnymi od 1, są równe, to ich wykładniki również są

| równe; zatem dla liczby $a > 0$ i $a \neq 1$, jeżeli $a^x = a^y$, to $x = y$

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady rozwiązane w animacji.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DvOqBBDqL>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej mnożenia i dzielenia potęg o tych samych wykładnikach.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wykonaj poniższe działania. Uzupełnij komórki tabeli, wpisując odpowiednie wartości.

Oblicz	Wynik
$(0,25)^8 \cdot 8^8$	
$\left(\frac{13}{17}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{17}{13}\right)^{-7}$	
$\left(\frac{3}{8}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-5}$	
$(10)^4 : (2)^4$	
$\left(\frac{1}{2,4}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{0,6}\right)^{-3}$	
$\left(1\frac{5}{11}\right)^2 : \left(\frac{4}{11}\right)^2$	
$(0,5)^{-2} : (0,2)^{-2}$	

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Wyrażenie $(5^{0,5} - 2^{1,5})^2$ zapisz w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi. Uporządkuj poniższe wyrażenia tak, aby otrzymać rozwiązanie zadania. Złap element i przesun go w górę lub w dół.

$$= 5 - 5^{0,5} \cdot 2^{1,5} - 5^{0,5} \cdot 2^{1,5} + 2^3 =$$



$$= (5^{0,5} - 2^{1,5})(5^{0,5} - 2^{1,5}) =$$



$$= 13 - 2 \cdot 5^{0,5} \cdot 2^{1,5} =$$



$$= 13 - 2 \cdot 5^{0,5} \cdot 2 \cdot 2^{0,5} =$$



$$= 5^{0,5} \cdot (5^{0,5} - 2^{1,5}) - 2^{1,5} \cdot (5^{0,5} - 2^{1,5}) =$$



$$= 13 - 4\sqrt{10}$$



$$= 13 - 4 \cdot 10^{0,5} =$$



$$= 13 - 4 \cdot 5^{0,5} \cdot 2^{0,5} =$$



$$(5^{0,5} - 2^{1,5})^2 =$$



$$= 5^{0,5} \cdot 5^{0,5} - 5^{0,5} \cdot 2^{1,5} - 2^{1,5} \cdot 5^{0,5} + 2^{1,5} \cdot 2^{1,5} =$$



Ćwiczenie 4



Poniżej przedstawiono pewne wyrażenia. Połącz w pary wyrażenia o równych wartościach.

$$(3^{0,5} + 2^{0,5})^2$$

$$11 + 4\sqrt{6}$$

$$(3^{0,5} + 2^{1,5})^2$$

$$35 + 12\sqrt{6}$$

$$(3^{1,5} + 2^{0,5})^2$$

$$29 + 6\sqrt{6}$$

$$(6^{0,5} + 1)^2$$

$$7 + 2\sqrt{6}$$

$$(3^{1,5} + 2^{1,5})^2$$

$$5 + 2\sqrt{6}$$

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Równanie $\frac{6^x}{3 \cdot 2^x} = 27^{\frac{2}{3}}$ jest spełnione przez liczbę $x = 1$.

☐ Równanie $\frac{10^{x^2}}{5^{x^2}} = 4^{0,5}$ jest spełnione przez liczbę $x = -1$

☐ Wyrażenie $(7^{0,5} + 2^{0,5})^2$ jest równe $9 + 2\sqrt{14}$.

☐ Wyrażenie $36^{\frac{2}{3}} : 6^{\frac{2}{3}}$ ma wartość równą $\sqrt[3]{6}$.

☐ Wyrażenie $6^{\frac{2}{3}} \cdot 36^{\frac{2}{3}}$ ma wartość równą 36.

Ćwiczenie 7



Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2^{-\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}}}{3^{-\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{4}} \cdot 15^{-\frac{3}{4}}}$.

Ćwiczenie 8



Oblicz wartość wyrażenia $\frac{15^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{25}{3}\right)^{0,75} \cdot 5^{-\frac{3}{4}}}{3\sqrt{5}}.$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Mnożenie i dzielenie potęg o tych samych wykładnikach

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Zastosujesz rozdzielną potęgowania względem mnożenia.
- Zastosujesz rozdzielną potęgowania względem dzielenia.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Mnożenie i dzielenie potęg o tych samych wykładnikach” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 z sekcji „Animacja” – „Obejrzyj animację o mnożeniu i dzieleniu potęg o tych samych wykładnikach, a następnie wykonaj poniższe polecenie”. Uczniowie zapoznają się z treścią zawartą w materiale, w razie wątpliwości zadają pytania nauczycielowi na forum klasy.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

[Prawa działań na potęgach](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Mnożenie i dzielenie potęg o tych samych wykładnikach”.