



Rozkład wielomianu na czynniki różnymi metodami

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozkład wielomianu na czynniki różnymi metodami

Źródło: Carlos Irineu da Costa, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Umiejętność rozkładania wielomianu na czynniki bardzo ułatwia wyszukiwanie pierwiastków wielomianu. Jest też kluczową techniką przy rozwiązywaniu równań wielomianowych, czyli równań postaci $W(x) = 0$, oraz nierówności wielomianowych, czyli nierówności typu $W(x) > 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) \leq 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem zmiennej x . Znajdzie również swoje zastosowania przy wyrażeniach wymiernych (ilorazy dwóch wielomianów).

Twoje cele

- Poznasz rozkłady na czynniki wykonywane za pomocą kilku różnych metod zastosowanych łącznie (np. grupowanie, wzory skróconego mnożenia, szukanie pierwiastków wymiernych i dzielenie schematem Hornera).
- Zastosujesz różne metody rozkładu wielomianu na czynniki w sytuacjach mniej typowych, rzadziej spotykanych w zadaniach.

Przeczytaj

Na początku przypomnimy różne metody rozkładu wielomianu na czynniki:

- wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia;
- wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias;
- grupowanie wyrazów;
- szukanie pierwiastków wymiernych.

W tym materiale skupimy się na analizie rozwiązań kilku ciekawszych i być może trochę trudniejszych zadań. Każde zadanie jest opatrzone pełnym rozwiązaniem i wyjaśnieniami.

Przykład 1

Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = (x + 1)^4 - (x^4 + 1).$$

Rozwiązanie

- Skorzystajmy ze wzoru skróconego mnożenia

$$W(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - x^4 - 1$$

$$W(x) = 4x^3 + 6x^2 + 4x$$

- Po wyłączeniu przed nawias uzyskujemy postać iloczynową

$$W(x) = 2x(2x^2 + 3x + 2)$$

(występujący w rozkładzie wielomian drugiego stopnia jest [nierozkładalny](#)).

Przykład 2

Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = (x + 1)^4 - 2(x^4 + 1).$$

Rozwiązanie

- Skorzystajmy ze wzorów skróconego mnożenia

$$W(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 2x^4 - 2$$

$$W(x) = -x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1$$

$$W(x) = 12x^2 - (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)$$

- Możemy teraz wykorzystać wzór na różnicę kwadratów

$$W(x) = 12x^2 - (x - 1)^4$$

$$W(x) = (2\sqrt{3}x)^2 - (x^2 - 2x + 1)^2$$

$$W(x) = (2\sqrt{3}x - x^2 + 2x - 1)(2\sqrt{3}x + x^2 - 2x + 1)$$

- Po uporządkowaniu

$$W(x) = -\left(x^2 - (2\sqrt{3} + 2)x + 1\right)\left(x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + 1\right)$$

- Uzyskaliśmy iloczyn dwóch wielomianów drugiego stopnia. Drugi z nich jest **nierozkładalny** ($\Delta < 0$), natomiast pierwszy można sprowadzić do postaci iloczynowej tak, jak to robimy dla funkcji kwadratowej. Po wykonaniu dość żmudnych obliczeń uzyskamy zapis $W(x)$ w postaci iloczynu **wielomianów nierozkładalnych**

$$W(x) = -\left(x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + 1\right)\left(x + \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3} - 1\right) \cdot \left(x - \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3} - 1\right).$$

Przykład 3

Sprowadzimy do postaci iloczynu czynników nierozkładalnych wielomian

$$W(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 15.$$

Rozwiązanie

- Na początek wymnożmy parami nawiasy - pierwszy z ostatnim oraz dwa środkowe:

$$W(x) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 15.$$

- Zauważmy, że uzyskane dwa nawiasy można wymnożyć używając wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$W(x) = ((x^2 + 5x + 5) - 1)((x^2 + 5x + 5) + 1) - 15$$

$$W(x) = (x^2 + 5x + 5)^2 - 1 - 15$$

$$W(x) = (x^2 + 5x + 5)^2 - 4^2$$

$$W(x) = (x^2 + 5x + 5 - 4)(x^2 + 5x + 5 + 4)$$

$$W(x) = (x^2 + 5x + 1)(x^2 + 5x + 9)$$

- Pierwszy z uzyskanych wielomianów drugiego stopnia można rozłożyć za pomocą wyróżnika Δ , drugi jest nierozkładalny:

$$W(x) = \left(x + \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)(x^2 + 5x + 9).$$

Przykład 4

Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 5) - (x^2 + 2x + 1).$$

Rozwiązanie

- Dla ułatwienia obliczeń podstawmy zmienną pomocniczą $p = x^2 + 2x$

$$W(x) = (p + 2)(p + 5) - (p + 1)$$

$$W(x) = p^2 + 7p + 10 - p - 1 = p^2 + 6p + 9$$

- Możemy teraz zauważyć wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy i powrócić do zmiennej x

$$W(x) = (p + 3)^2$$

$$W(x) = (x^2 + 2x + 3)^2$$
 przy czym uzyskany wielomian drugiego stopnia jest **nierozkładalny**.

Przykład 5

Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12.$$

Rozwiązanie

- Pogrupujemy wyrazy wielomianu dążąc do użycia wzorów skróconego mnożenia i wyłączenia wspólnego czynnika przed nawias:

$$W(x) = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + (x^2 + 4x + 4)$$

$$W(x) = (x + 2)^3 + (x + 2)^2$$

$$W(x) = (x + 2)^2(x + 2 + 1)$$

$$W(x) = (x + 2)^2(x + 3).$$

Przykład 6

Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = x^4 - 2x^3 + x - 20.$$

Rozwiązanie

- Pogrupujemy wyrazy wielomianu

$$W(x) = (x^4 - 2x^3 + x^2) - (x^2 - x) - 20$$

$$W(x) = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - 20$$
- Podstawmy dla ułatwienia pomocniczą zmienną $t = x^2 - x$:

$$W(x) = t^2 - t - 20$$
- Korzystając z rozkładu funkcji kwadratowej na czynniki możemy zapisać

$$W(x) = (t - 5)(t + 4)$$
 czyli wracając do niewiadomej x

$$W(x) = (x^2 - x - 5)(x^2 - x + 4)$$
- Drugi wielomian jest nierozkładalny, po rozłożeniu pierwszego na czynniki uzyskamy rozkład wielomianu $W(x)$:

$$W(x) = \left(x - \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)(x^2 - x + 4).$$

Przykład 7

Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = (x - 4)^4 + (x + 1)^4 - (2x - 3)^4.$$

Rozwiązanie

- Zauważmy, że wyrażenie w trzecim nawiasie jest sumą wyrażeń w dwóch poprzednich nawiasach.
- Podstawmy pomocniczo $a = x - 4$, $b = x + 1$.
- $$\begin{aligned} W(x) &= a^4 + b^4 - (a + b)^4 \\ W(x) &= a^4 + b^4 - a^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 - b^4 \\ W(x) &= -4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 \\ W(x) &= -2ab(2a^2 + 3ab + 2b^2) \end{aligned}$$
- Zatem po wykorzystaniu wcześniejszego podstawienia i wykonaniu obliczeń
$$W(x) = -2(x - 4)(x + 1)(7x^2 - 21x + 22),$$
 przy czym uzyskany wielomian drugiego stopnia jest nierozkładalny.

Słownik

wielomian nierozkładalny

wielomian stopnia dodatniego, którego nie można przedstawić w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopnia dodatniego

zasadnicze twierdzenie teorii wielomianów

- jedyne wielomiany nierozkładalne stopnia dodatniego o współczynnikach rzeczywistych to wszystkie wielomiany pierwszego stopnia oraz wielomiany drugiego stopnia z ujemnym wyróżnikiem Δ ;
- każdy wielomian stopnia większego od 2 można zapisać w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych i niezerowej stałej;
- zapis w postaci iloczynu jest jednoznaczny z dokładnością do przemnożenia czynników przez stałą niezerową

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj trzy metody rozkładu tego samego wielomianu na czynniki nierozkładalne.

Polecenie 2

Rozłóż na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 1.$$

Rozwiąż zadanie dwoma różnymi sposobami.

Polecenie 3

Rozłóż na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4. \text{ Rozwiąż zadanie dwoma różnymi sposobami.}$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest wielomian $W(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3) - 6$.

Kolorem zielonym oznacz zdania prawdziwe.

Kolorem czerwonym oznacz zdania fałszywe.

- {zielony}Wielomian $W(x)$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.{/zielony}
- {zielony}W rozkładzie na czynniki wielomianu $W(x)$ występuje nierozkładalny wielomian drugiego stopnia. {/zielony}
- {czerwony}Wielomian $W(x)$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.{/czerwony}
- {czerwony}Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x)$ jest pewien całkowity dzielnik liczby 6.{/czerwony}

Ćwiczenie 2



Dany jest wielomian

$$W(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1.$$

Wiadomo, że $W(x)$ można sprowadzić do postaci iloczynowej

$$W(x) = (x - 1)^a (x + 1)^b (x^2 + 1)^c.$$

Podaj wartości wykładników a , b i c :

- $a =$
- $b =$
- $c =$

Ćwiczenie 3



Dany jest wielomian

$$W(x) = x^6 - 7x^3 - 8.$$

Uzupełnij brakujące liczby w zapisie obliczeń prowadzących do rozkładu wielomianu $W(x)$ na czynniki nierozkładalne.

Każdy wpisywany element musi być liczbą całkowitą dodatnią jednocyfrową.

- $W(x) = (x^3 - \boxed{})(x^3 + \boxed{})$
- $W(x) = (x - \boxed{})(x^2 + \boxed{}x + \boxed{}) \cdot (x + \boxed{})(x^2 - x + \boxed{})$

Ćwiczenie 4



Wskaż rozkład wielomianu

$$W(x) = (x - 1)^4 - (x^4 - 1)$$

na czynniki nierozkładalne.

☐ $-(x - 1)^2(2x + 1)$

☐ $-2(x - 1)\left(x - \frac{1 - \sqrt{7}}{4}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{7}}{4}\right)$

☐ $-2(x - 1)(2x^2 - x + 1)$

☐ $-2(x - 1)\left(x + \frac{\sqrt{7} - 1}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{7} + 1}{4}\right)$

☐ $-(x - 1)(x + 1)(2x - 1)$

Ćwiczenie 5



Dany jest wielomian

$$W(x) = 3x^3 - 5x^2 - 5x + 3.$$

Wskaż czynniki jego rozkładu na iloczyn wielomianów nierozkładalnych.

☐ $(3x^3 - 4x + 3)$

☐ $(2x^3 - 8x + 3)$

☐ $3(x + 1)$

☐ $\left(x - \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$

☐ $\left(x - \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$

Ćwiczenie 6



Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$.

Ustaw we właściwej kolejności kolejne kroki prowadzące do uzyskania rozkładu wielomianu $W(x)$ na czynniki nierozkładalne.

$$W(x) = (x^2 + 1)^2 - 2x(x^2 + 1) + (x^2 + 1)$$



$$W(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)$$



Możemy teraz wyłączyć przed nawias czynnik $x^2 + 1$:

$$W(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 1 - 2x + 1)$$



Oba uzyskane wielomiany drugiego stopnia są nierozkładalne, więc powyższy rozkład spełnia warunki zadania.



Pogrupujemy wyrazy wielomianu dążąc do wyłączenia wspólnego czynnika przed nawias:

$$W(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^3 - 2x + x^2 + 1$$



Ćwiczenie 7



Wskaż rozkład wielomianu

$$W(x) = (3x + 1)^3 + (x + 3)^3 - (4x + 4)^3$$

na iloczyn wielomianów nierozkładalnych.

☐ $18(x + \frac{1}{3})(x + 3)(x - 1)$

☐ $4(x + 1)(23x^2 + 34x + 23)$

☐ $-6(3x + 1)(x + 3)(x - 1)$

☐ $-12(3x + 1)(x + 3)(x + 1)$

☐ $(3x + 1)(x + 3)(4x + 4)$

Ćwiczenie 8



Uzupełnij obliczenia prowadzące do rozkładu wielomianu

$$W(x) = (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x + 6) - 3.$$

- $W(x) = (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x + 6) - 3$
- $W(x) = (x^2 + 2x \boxed{})(x^2 + 2x \boxed{}) - 3$
- $W(x) = (x^2 + 2x \boxed{})^2 - 1 - 3$
- $W(x) = (\boxed{})^2 - \boxed{}$
- $W(x) = (x^2 + 2x \boxed{})(x^2 + 2x + 5 + 2)$
- $W(x) = (\boxed{})(\boxed{})$
- Oba uzyskane wielomiany są nierozkładalne.

$x^2 + 2x + 7$

$+5 - 2$

$x^2 + 2x + 3$

$+5 + 1$

$+5 - 1$

$+5$

4

$x^2 + 2x + 5$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozkład wielomianu na czynniki różnymi metodami

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozkłada na czynniki wielomiany stosując grupowanie, wzory skróconego mnożenia, szukanie pierwiastków wymiernych i dzielenie schematem Hornera,
- łączy wskazane metody do rozkładu wielomianów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- drzewo pomysłów;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają wspólnie znane im wzory skróconego mnożenia trzeciego stopnia i ich zastosowania.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami rozkładu wielomianu na czynniki zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania.
2. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady rozkładu na czynniki różnymi metodami.
3. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
4. Teraz uczniowie w grupach zapoznają się z galerią zdjęć interaktywnych i ewentualnie dopisują na plakacie pozyskane informacje.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „drzemie na brzegu rzeki” i tylko „ożywia się” w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji – uczniowie mogą korzystać z wytworzonych plakatów.
2. Liderzy grup omawiają wyniki prac uczestników, uczniowie wzajemnie oceniają swoją pracę.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Wielomiany](#)

Wskazówki metodyczne:

Galerię można wykorzystać jako powtórzenie przed kartkówką.