



Jak obliczyć iloraz różnicowy korzystając ze wzoru funkcji?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak obliczyć iloraz różnicowy korzystając ze wzoru funkcji?

Źródło: Max Ostrozhinskiy, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Głównym zagadnieniem w rachunku różniczkowym jest badanie przebiegu funkcji zmiennej rzeczywistej, w tym obliczanie, ile wynosi stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu. Gdy rozpatrujemy funkcję liniową, to ten przyrost jest równy współczynnikowi kierunkowemu prostej, która jest wykresem tej funkcji. W tej lekcji omówimy, jak obliczyć iloraz różnicowy funkcji, gdy dany jest wzór tej funkcji. Bazując na treściach teoretycznych i przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Obliczysz iloraz różnicowy funkcji określonych za pomocą różnych wzorów.
- Wyznaczysz, ile wynoszą ilorazy różnicowe funkcji, gdy funkcja jest liniowa, kwadratowa, wymierna itp.
- Obliczysz wartości parametrów, które występują we wzorach funkcji, gdy dana jest wartość ilorazu różnicowego tej funkcji.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję **ilorazu różnicowego funkcji**.

Definicja: iloraz różnicowy

Założmy, że funkcja f jest dowolną funkcją określoną w otoczeniu punktu x_0 .

Ilorazem różnicowym funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu h zmiennej niezależnej x , nazywamy wyrażenie:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

które jest równoważne wyrażeniu:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Inaczej mówiąc, jest to stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu funkcji.

Do wyznaczania ilorazu różnicowego funkcji będziemy stosować wzór, który zapisujemy następująco:

$$U(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

W poniższych przykładach pokażemy, jak obliczyć iloraz różnicowy w podanym punkcie x_0 oraz przy zadanym przyroście h .

Przykład 1

Wyznamy iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = -3x + 2$ w punkcie $x_0 = 2$ i przy przyroście $h = 4$.

Rozwiązanie:

$$U(h) = \frac{-3 \cdot (x_0 + h) + 2 - (-3x_0 + 2)}{h} = \frac{-3x_0 - 3h + 2 + 3x_0 - 2}{h} = \frac{-3h}{h} = -3.$$

Ważne!

Jeżeli funkcja f jest funkcją liniową określoną wzorem $f(x) = ax + b$, to iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0 i przy przyroście h jest równy a .

Przykład 2

Wyznamy iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2$ dla $x_0 = 3$ i przy przyroście argumentu $h = -2$.

Rozwiązanie:

Po podstawieniu do wzoru na iloraz różnicowy funkcji otrzymujemy:

$$U(h) = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2 \cdot x_0 \cdot h + h^2}{h} = 2 \cdot x_0 + h.$$

Dla $x_0 = 3$, przy przyroście argumentu $h = -2$, otrzymujemy:

$$2 \cdot 3 + (-2) = 6 - 2 = 4.$$

Przykład 3

Wyznamy iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = x^3$ dla $x_0 = 1$, przy przyroście argumentu $h = -3$.

Rozwiązanie:

Po podstawieniu do wzoru na iloraz różnicowy funkcji otrzymujemy:

$$U(h) = \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{x_0^3 + 3 \cdot x_0^2 \cdot h + 3 \cdot x_0 \cdot h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2.$$

Dla $x_0 = 1$, przy przyroście argumentu $h = -3$ otrzymujemy:

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-3)^2 = 3 - 9 + 9 = 3.$$

Przykład 4

Wyznamy iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$ dla $x_0 = 3$, przy przyroście argumentu $h = 4$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że w przypadku funkcji wymiernej możliwe jest obliczenie ilorazu różnicowego, gdy $h \neq -x_0$.

Po podstawieniu do wzoru na iloraz różnicowy funkcji otrzymujemy:

$$\begin{aligned} U(h) &= \frac{\frac{4}{x_0+h} - \frac{4}{x_0}}{h} = \frac{\frac{4x_0 - 4 \cdot (x_0+h)}{(x_0+h) \cdot x_0}}{h} = \\ &= \frac{\frac{4x_0 - 4x_0 - 4h}{(x_0+h) \cdot x_0}}{h} = \frac{-4}{(x_0+h) \cdot x_0}. \end{aligned}$$

Dla $x_0 = 3$, przy przyroście argumentu $h = 4$, otrzymujemy:

$$\frac{-4}{(3+4) \cdot 3} = \frac{-4}{21} = -\frac{4}{21}.$$

Wzór na obliczanie ilorazu różnicowego funkcji możemy wykorzystać do znajdowania wartości parametrów, które występują we wzorze funkcji.

Przykład 5

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = ax^3 - 2$. Wiadomo, że iloraz różnicowy tej funkcji dla $x_0 = 2$, przy przyroście argumentu $h = 1$, wynosi 4.

Wyznamy wartość parametru a .

Rozwiązanie:

Po podstawieniu do wzoru na iloraz różnicowy funkcji mamy:

$$\begin{aligned} U(h) &= \frac{a \cdot (x_0 + h)^3 - 2 - (ax_0^3 - 2)}{h} = \\ &= \frac{a \cdot (x_0^3 + 3 \cdot x_0^2 \cdot h + 3 \cdot x_0 \cdot h^2 + h^3) - 2 - ax_0^3 + 2}{h} = \\ &= \frac{ax_0^3 + 3ax_0^2h + 3ax_0h^2 + ah^3 - 2 - ax_0^3 + 2}{h} = \\ &= \frac{3ax_0^2h + 3ax_0h^2 + ah^3}{h} = 3ax_0^2 + 3ax_0h + ah^2. \end{aligned}$$

Ponieważ iloraz różnicowy tej funkcji dla $x_0 = 2$, przy przyroście argumentu $h = 1$ wynosi 4, to w celu wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$3 \cdot a \cdot 2^2 + 3 \cdot a \cdot 2 \cdot 1 + a \cdot 1^2 = 4,$$

$$12a + 6a + a = 4,$$

$$19a = 4, \text{ zatem } a = \frac{4}{19}.$$

Słownik

iloraz różnicowy funkcji

stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu funkcji, określony za pomocą wzoru:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem, a następnie wykonaj polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DDF4PI9r9>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej iloraz różnicowego funkcji liniowej.

Polecenie 2

Wyznacz ilorazy różnicowe funkcji określonych poniższymi wzorami, jeżeli $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz $h \neq 0$.

a) $f(x) = -x + 2$,

b) $f(x) = 2x^2 - x$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = 3x - 2$, dla $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz $h \neq 0$, jest równy:

☐ 2

☐ 1

☐ 3

Ćwiczenie 2



Połącz w pary wzór funkcji z odpowiadającą jej wartością ilorazu różnicowego w punkcie $x_0 = 2$ i $h = 1$.

$$f(x) = x^2 - 1$$

4

$$f(x) = 4x - 1$$

5

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

19

$$f(x) = x^3$$

$-\frac{1}{6}$

Ćwiczenie 3



Wiadomo, że $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz $h \neq 0$. Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐ Iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{x}$ jest równy $\frac{-\sqrt{3}h}{(x_0+h) \cdot x_0}$.

☐ Iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = \sqrt{2}x + 2$ jest równy $\sqrt{2}h$.

☐ Iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = \sqrt{x} - 2$ jest równy $\frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}$.

☐ Iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 + 1$ jest równy $2x_0 + h^2$.

Ćwiczenie 4



Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = x^3 - 3x$. Wpisz wartości ilorazu różnicowego tej funkcji dla:

$x_0 = -3$ i $h = 2$:

$x_0 = -1$ i $h = 3$:

$x_0 = 1$ i $h = 4$:

Ćwiczenie 5



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = x^4$. Wartość ilorazu różnicowego tej funkcji:

- dla $x_0 = 2$ i $h = \frac{1}{2}$ wynosi

- dla $x_0 = -2$ i $h = -2$ wynosi

- dla $x_0 = -1$ i $h = 3$ wynosi

Ćwiczenie 6



Zaznacz zdanie, które jest prawdziwe.



Jeżeli funkcja jest określona wzorem $f(x) = ax^3 + 1$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, to wartość ilorazu różnicowego nie zależy od wartości parametru a .



Jeżeli funkcja jest określona wzorem $f(x) = \frac{a}{\sqrt{x}}$, to wartość ilorazu różnicowego dla $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz $h = 1$ wynosi $\frac{a}{\sqrt{(x+1) \cdot x}}$.



Jeżeli funkcja jest określona wzorem $f(x) = x + b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$, to wartość ilorazu różnicowego nie zależy od wartości parametru b .

Ćwiczenie 7



Wyznacz iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^3 - 1$ dla $x_0 = -1$ i $h = 3$.

Ćwiczenie 8



Wyznacz wartość parametru a , jeżeli wiadomo, że iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x) = ax^2 + 3$ dla $x_0 = -2$ oraz $h = 2$, jest równy 4.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak obliczyć iloraz różnicowy korzystając ze wzoru funkcji?

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony 3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza iloraz różnicowy funkcji określonych za pomocą różnych wzorów.
- wyznacza, ile wynoszą ilorazy różnicowe funkcji, gdy funkcja jest liniowa, kwadratowa, wymierna itp,
- znajduje wartości parametrów, występujące we wzorach funkcji, gdy dana jest wartość ilorazu różnicowego funkcji,
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa;
- metoda krokodyla;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Jak obliczyć iloraz różnicowy korzystając ze wzoru funkcji?” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Film samouczek”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Argumenty i wartości funkcji.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Film samouczek” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy przed lekcją w ten sposób, aby samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące obliczania ilorazu różnicowego funkcji, gdy dany jest jej wzór.