Prawa działań na potęgach

Prawa działań na potęgach

Źródło: Eric Tompkins, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

W tej lekcji przypomnimy własności działań, które są wspólne dla wszystkich potęg niezależnie od tego, do którego z podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych należą wykładniki. Pokażemy też proste przykłady zastosowania tych własności ze szczególnym akcentem położonym na potęgi o wykładnikach nie będących liczbami naturalnymi.

Twoje cele

- Zastosujesz własności potęg dotyczące iloczynu i ilorazu potęg o tych samych podstawach.
- Zastosujesz własności potęg dotyczące iloczynu i ilorazu potęg o tych samych wykładnikach.
- Zastosujesz własność dotyczącą potęgowania potęgi.

Przeczytaj

Przypomnijmy, w jaki sposób skonstruowaliśmy potęgę o wykładniku rzeczywistym.

Zaczęliśmy od wykładników będących liczbami naturalnymi. Takie potęgowanie to po prostu uogólnienie mnożenia: iloczyn kilku równych czynników zapisujemy w postaci potęgi, np.: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$.

Jeżeli wykładnik jest liczbą całkowitą ujemną, wówczas minus z wykładnika zamienia podstawę potęgi na jej odwrotność, np.: $5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

Następnie omówiliśmy potęgi o wykładnikach wymiernych. W tym przypadku, po zapisaniu wykładnika w postaci ułamka zwykłego (być może niewłaściwego), jego mianownik można zamienić na stopień pierwiastka, którym należy spierwiastkować podstawę potęgi, np.: $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2$.

Potęgę o wykładniku niewymiernym moglibyśmy zaś zdefiniować dzięki faktowi, że liczby niewymierne pozwalają się przybliżać liczbami wymiernymi.

Ponieważ $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, więc do dokładnej wartości potęgi $3^{\sqrt{2}}$ zbliża nas ciąg potęg o wykładnikach wymiernych:

$3^{1{,}4}, 3^{1{,}41}, 3^{1{,}414}, 3^{1{,}4142}, 3^{1{,}41421}, 3^{1{,}414213}, 3^{1{,}4142135}, 3^{1{,}41421356}, \ldots$

Na każdym etapie konstruowania potęgowania jako działania, niezależnie od tego do jakiego zbioru liczbowego należy wykładnik, zwracaliśmy uwagę, że chcemy zachować własności działań na potęgach, które były prawdziwe dla wykładników naturalnych.

Zatem dla dowolnych liczb dodatnich a i b oraz dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą następujące własności:

1. iloczyn potęg o takich samych podstawach: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
2. iloraz potęg o takich samych podstawach: $a^x : a^y = a^{x-y}$,
3. potęga potęgi: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$,
4. iloczyn potęg o takich samych wykładnikach (rozdzielność potęgowania względem mnożenia): $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$,
5. iloraz potęg o takich samych wykładnikach (rozdzielność potęgowania względem dzielenia): $a^x : b^x = (a : b)^x$.

Przykład 1

Rozważmy wyrażenie $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$. Korzystając z definicji potęgi o wykładniku wymiernym i własności potęgowania mamy:

$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$

Powyższy przykład można uogólnić.

Rozważmy $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, gdzie $a \geq 0$ oraz m i n są liczbami naturalnymi większymi od 1.

Wówczas:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Przykład 2

Dla x różnego od zera rozważmy wyrażenie $\left(x^{-2} - x^{-1}\right)\left(2x + x^2\right)$:

$\left(x^{-2} - x^{-1}\right)\left(2x + x^2\right) = 2x\left(x^{-2} - x^{-1}\right) + x^2\left(x^{-2} - x^{-1}\right) =$

$= 2x \cdot x^{-2} - 2x \cdot x^{-1} + x^2 \cdot x^{-2} - x^2 \cdot x^{-1} =$

$= 2x^{1-2} - 2x^{1-1} + x^{2-2} - x^{2-1} = 2x^{-1} - 2 + 1 - x = 2x^{-1} - x - 1$

Przykład 3

Uprościmy poniższe wyrażenia korzystając z własności potęgowania:

z własności 1):

$2,5^{\frac{3}{4}} \cdot 2,5^{\frac{5}{4}} = 2,5^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}} = 2,5^{\frac{8}{4}} = 2,5^2 = 6{,}25$

z własności 2):

$81^{0{,}5} \ : \ 81^{0{,}25} = 81^{0{,}25} = \sqrt[4]{81} = 3$

z własności 3):

$\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

z własności 4):

$1,2^{1{,}5} \cdot 0,3^{1{,}5} = (1{,}2 \cdot 0{,}3)^{1{,}5} = 0{,}36^{1{,}5} = 0{,}36^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{0{,}36}\right)^3 = 0,6^3 = 0{,}216$

z własności 5):

$200^{\frac{2}{3}} : 0,2^{\frac{2}{3}} = (200 : 0{,}2)^{\frac{2}{3}} = 1000^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{1000}\right)^2 = 10^2 = 100$

Przykład 4

Obliczymy wartości wyrażeń:

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 32^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = (3 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} + (32 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} + 64^{\frac{1}{2}} = 3 + \sqrt{64} = 3 + 8 = 11$

b) $16^{\frac{1}{3}} \cdot 32^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{3}} = (16 \cdot 32)^{\frac{1}{3}} + (7 \cdot 49)^{\frac{1}{3}} = 512^{\frac{1}{3}} + \left(7^3\right)^{\frac{1}{3}} =$

$= \sqrt[3]{512} + 7^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 8 + 7 = 15$

Zwróćmy uwagę na kolejność wykonywania działań, gdy wykładnik potęgi również ma postać potęgi.
Jeśli liczby a, b i c są dodatnie, wówczas zapis a^{b^c} rozumiemy jako $a^{\left(b^c\right)}$.

Przykład 5

Obliczymy wartości potęg:

a) $2^{\sqrt{2}^2} = 2^{\left(\sqrt{2}^2\right)} = 2^2 = 4$

b) $2^{2^3} = 2^{\left(2^3\right)} = 2^8 = 256$

Dla porównania $\left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64$.

Słownik

rozdzielność potęgowania względem mnożenia

własność potęgowania, która orzeka, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b oraz dowolnej liczby rzeczywistej r zachodzi równość

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

rozdzielność potęgowania względem dzielenia

własność potęgowania, która orzeka, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b oraz dowolnej liczby rzeczywistej r zachodzi równość

$$(a : b)^r = a^r : b^r$$

Infografika

Polecenie 1

Analizując zawartość infografiki, przypomnij sobie własności działań na potęgach.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Oblicz wartości potęg:

a) 3^{2^2} oraz $\left(3^2\right)^2$

b) 2^{3^2} oraz $\left(2^3\right)^2$

c) $2^{\sqrt{2}^{4}}$ oraz $\sqrt{2}^{2^4}$

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prawa działań na potęgach

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:
4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje własności potęg dotyczące iloczynu i ilorazu potęg o tych samych podstawach,
- stosuje własności potęg dotyczące iloczynu i ilorazu potęg o tych samych wykładnikach,
- stosuje własność dotyczącą potęgowania potęgi.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metaplan;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Prawa działań na potęgach” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizayjne:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Infografika”, czyta treść polecenia nr 1 - „Analizując zawartość infografiki przypomnij sobie własności działań na potęgach”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie rozwiązują zadania indywidualnie wykonując ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze

- Działania na potęgach. Część II

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Prawa działań na potęgach”.